

ELEKTRYCZNY ANALOG
DO ROZWIĄZYWANIA UKŁADÓW RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH
PIERWSZEGO STOPNIA TWORZĄCYCH MACIERZ NORMALNĄ

ALEKSANDER LISOWSKI (KRAKÓW)

Wstęp

Zjawisko analogii elektro-mechanicznej wykorzystane zostało do rozwiązania szeregu zagadnień mechaniki. W szczególności w sieci elektrycznej można zbudować model dla równania metody przemieszczeń w zastosowaniu do belek, ram i płyt. Opierając się na pracach radzieckich [4 i 7] i amerykańskich [1 i 2] autor przedstawił własne rozwiązania analogów modelowania belek i ram AL-1 – AL-3, zagadnienia transportowego AL-4 oraz belek i płyt na sprężystym podłożu AL-5.

Obecnie przedstawiony zostanie układ sieci elektrycznej, który pozwoli zbudować model dowolnego układu równań liniowych algebraicznych, którego współczynniki przy niewiadomych utworzą macierz normalną, tj. symetryczną względem głównej przekątnej oraz dla której ciąg iteracyjny będzie zbieżny.

1. Model sieci elektrycznej dla równania algebraicznego stopnia pierwszego

Rozpatrzmy równanie

$$(1.1) \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{ii}x_i + \dots + a_{i,n-1}x_{n-1} + a_{i,n}x_n = a_{i0}.$$

Założmy dodatkowo, że liczby a_{ik} są dodatnie,

$$(1.2) \quad a_{ik} \geq 0.$$

Wówczas przyjmując, że np. współczynniki przy niewiadomych x_3 oraz x_n są ujemne, równanie (1.1) przepiszemy w postaci

$$(1.3) \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 - a_{i3}x_3 + \dots + a_{ii}x_i + \dots + a_{i,n-1}x_{n-1} - a_{i,n}x_n = a_{i0}.$$

Niżej przedstawimy układ sieci elektrycznej, stanowiącej model dla powyższych równań (rys. 1). Przyjmiemy następujące podstawienie

$$(1.4) \quad R_{ik} = \frac{1}{a_{ik}} m_r, \quad U_i = x_i m_n,$$

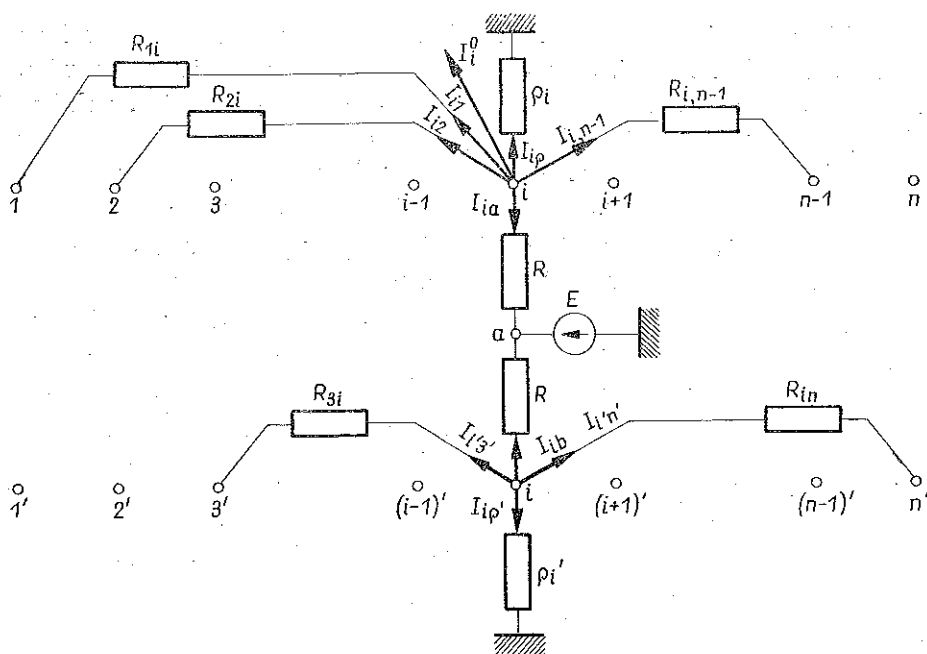
gdzie R i U przedstawiają wielkości elektryczne, a m_r i m_u są współczynnikami przeniesienia modelowego oporności i napięcia. Zatem równanie (1.3) można przepisać na podstawie (1.4) w postaci

$$(1.5) \quad \frac{1}{R_{i1}} m_r U_1 \frac{1}{m_u} + \frac{1}{R_{i2}} m_r U_2 \frac{1}{m_u} - \frac{1}{R_{i3}} m_r U_3 \frac{1}{m_u} + \dots + \frac{1}{R_{ii}} m_r U_i \frac{1}{m_u} + \dots + \frac{1}{R_{i,n-1}} m_r U_{n-1} \frac{1}{m_u} - \frac{1}{R_{i,n}} m_r U_n \frac{1}{m_u} = I_i^0 \frac{1}{m_i},$$

gdzie

$$(1.6) \quad I_i^0 = a_{i0} m_i.$$

W ostatnim wyrazie I_i^0 przedstawia prąd dopływający do węzła i , a m_i jest współczynnikiem przeniesienia modelowego napięcia.



Rys. 1

Zgodnie z prawem Ohma pomiędzy współczynnikami przeniesienia istnieje znana zależność

$$(1.7) \quad m_u = m_i m_r.$$

Uwzględniając w równaniu (1.5), że

$$\frac{m_r}{m_u} = \frac{1}{m_i},$$

można napisać

$$(1.8) \quad \frac{1}{R_{i1}} U_1 + \frac{1}{R_{i2}} U_2 - \frac{1}{R_{i3}} U_3 + \dots + \frac{1}{R_{ii}} U_i + \dots + \frac{1}{R_{i, n-1}} U_{n-1} - \frac{1}{R_{i, n}} U_n = I_i^0.$$

Przejdźmy do zbudowania modelu dla powyższej zależności przy zastosowaniu dwóch siatek. Siatkę górną tworzyć będą węzły, w których współczynniki a_{ik} są dodatnie. W odniesieniu do równania (1.8) będą to węzły, przed którymi przy odpowiednim wyrazie występuje znak plus.

Napiszmy warunki równowagi węzłów i (górnej siatki) oraz i' (dolnej siatki). Warunek równowagi węzła i (na podstawie pierwszego prawa Kirchhoffa) jest następujący:

$$\sum I_{ik} = I_{i1} + I_{i2} + \dots + I_{i, n-1} + \dots + I_{ip} + I_{ia} + I_i^0 = 0.$$

Wyrażając natężenia prądów za pomocą napięć i oporności otrzymamy

$$(1.9) \quad \frac{1}{R_{i1}} (U_i - U_1) + \frac{1}{R_{i2}} (U_i - U_2) + \dots + \frac{1}{R_{i, n-1}} (U_i - U_{n-1}) + \dots + \frac{1}{\rho} U_i + \frac{1}{R} (U_i - E) + I_i^0 = 0.$$

Warunek równowagi węzła i' ma postać

$$I_{i'3'} + \dots + I_{i'n'} + I_{i'\rho'} + I_{i'a} = 0.$$

Wyrażając natężenie prądów za pomocą napięć podobnie otrzymamy

$$\dots - \frac{1}{R_{i'3'}} (U_{i'} - U_{3'}) + \dots + \frac{1}{R_{i'n'}} (U_{i'} - U_{n'}) + \frac{1}{\rho_{i'}} U_{i'} + \frac{1}{R} (U_{i'} - E) = 0.$$

Z ostatniego równania obliczymy wyraz ostatni:

$$(1.10) \quad \frac{1}{R} (U_{i'} - E) = -\frac{1}{R_{i'3'}} (U_{i'} - U_{3'}) + \dots - \frac{1}{R_{i'n'}} (U_{i'} - U_{n'}) - \frac{1}{\rho_{i'}} U_{i'}$$

i wstawimy go do równania (1.9) przyjmując, że napięcia dolnych i górnych węzłów siatek są odpowiednio sobie równe

$$(1.11) \quad U_{i'} = U_i.$$

Wstawiając (1.10) do (1.9) otrzymamy

$$\frac{1}{R_{i1}} (U_i - U_1) + \frac{1}{R_{i2}} (U_i - U_2) - \frac{1}{R_{i3}} (U_i - U_3) + \dots + \frac{1}{R_{i, n-1}} (U_i - U_{n-1}) - \frac{1}{R_{i'n'}} (U_i - U_{n'}) + \frac{1}{\rho_i} U_i - \frac{1}{\rho_{i'}} U_i + I_i^0 = 0.$$

Po uporządkowaniu i zmianie znaków otrzymamy

$$(1.12) \quad \frac{1}{R_{i1}} U_1 + \frac{1}{R_{i2}} U_2 - \frac{1}{R_{i3}} U_3 + \dots - \left(\frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_{i2}} - \frac{1}{R_{i3}} + \dots + \frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{\rho_{i'}} + \dots + \frac{1}{R_{i,n-1}} - \frac{1}{R_{in}} \right) U_i + \dots + \frac{1}{R_{i,n-1}} U_{n-1} - \frac{1}{R_{in}} U_n = I_i^0.$$

Widzimy, że równanie (1.12) będzie identyczne z równaniem (1.8), jeżeli współczynniki przy niewiadomej U_i będą sobie równe. Otrzymujemy więc warunek

$$\frac{1}{R_{ii}} = - \left(\frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_{i2}} - \frac{1}{R_{i3}} + \dots + \frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{\rho_{i'}} + \dots + \frac{1}{R_{i,n-1}} - \frac{1}{R_{i,n}} \right),$$

co w odniesieniu do współczynników równania (1.3) prowadzi do wzoru

$$a_{ii} = -(a_{i1} + a_{i2} - a_{i3} + \dots + a_i - a_{i'} + \dots + a_{i,n-1} - a_{in}).$$

Odróżnimy zatem trzy następujące przypadki:

1 *przypadek*. Suma wszystkich współczynników przy niewiadomych równania jest równa zero; wówczas przyjmujemy

$$a_i = 0 \quad \text{oraz} \quad a_{i'} = 0.$$

Prowadzić to będzie do układu, w którym oba opory ρ_i oraz $\rho_{i'}$ są równe nieskończoności, czyli połączenie węzła i oraz i' z masą za pośrednictwem oporu ρ nie występuje.

2 *przypadek*. Suma wszystkich współczynników przy niewiadomych równania jest liczbą ujemną; wówczas wystąpi współczynnik a_i który jest dopełnieniem do zera sumy współczynników równania. W sieci elektrycznej wystąpi opór ρ_i , który będzie równy

$$(1.13) \quad \rho_i = \left| \frac{1}{\sum a_{ik}} \right| m_r.$$

3 *przypadek*. Suma wszystkich współczynników przy niewiadomych równania jest liczbą dodatnią; wówczas wystąpi współczynnik $a_{i'}$, który jest dopełnieniem do zera sumy współczynników równania.

W sieci elektrycznej wystąpi opór $\rho_{i'}$, który będzie równy

$$(1.14) \quad \rho_{i'} = \frac{1}{\sum a_{ik}} m_r.$$

Na podstawie przeprowadzonej powyższej analizy można w sieci elektrycznej zbudować model dowolnego równania algebraicznego pierwszego stopnia.

Jako przykład wstępny rozważmy model równania o ośmiu niewiadomych.

Przykład 1. Sporządzić należy sieć modelującą równanie

$$1 \cdot x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 0 \cdot x_6 - 2x_7 + 5x_8 = 21,$$

przyjmując, że współczynnikiem a_{ii} jest współczynnik przy niewiadomej x_4 .

Jako współczynniki przeniesienia przyjmiemy wg (1.4) i (1.6)

$$m_r = 1000 \Omega, \quad m_i = 0,0001 \text{ A}.$$

Wówczas znajdziemy

$$R_{14} = \frac{1}{1} \cdot 1000 = 1000 \Omega, \quad R_{24} = \frac{1}{3} \cdot 1000 = 333,3 \Omega,$$

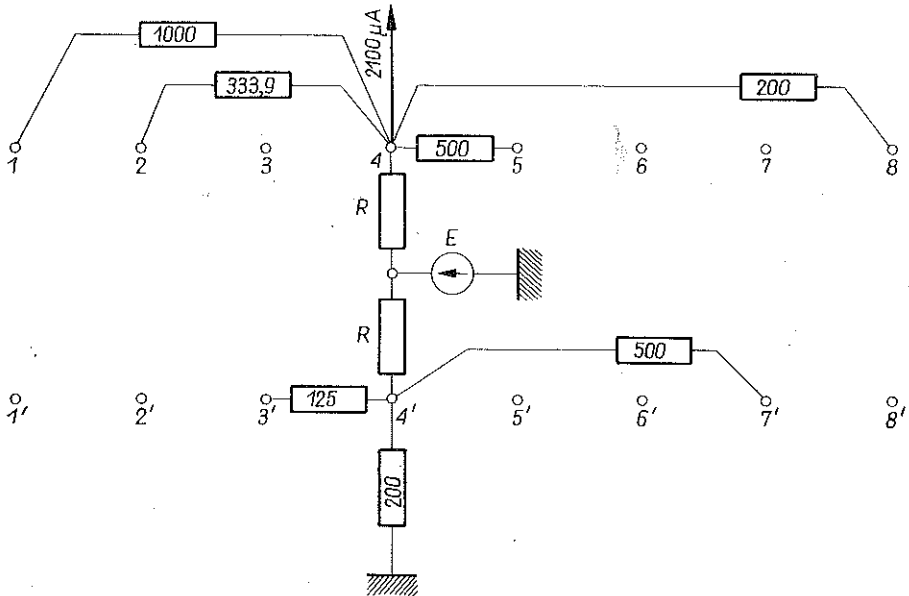
$$R_{34} = \frac{1}{8} \cdot 1000 = 125 \Omega, \quad \rho_4 = \left| \frac{1}{1+3-8+4+2-2+5} \right| \cdot 1000 = 200 \Omega,$$

$$R_{54} = \frac{1}{2} \cdot 1000 = 500 \Omega, \quad R_{64} = \infty,$$

$$R_{74} = \frac{1}{2} \cdot 1000 = 500 \Omega, \quad R_{84} = \frac{1}{5} \cdot 1000 = 200 \Omega.$$

Zgodnie z poprzednimi rozważaniami opory modelujące współczynniki dodatnie tworzą siatkę górną, a ujemne — dolną. Opór ρ_4 , a w danym przypadku ρ_4 , ze względu na dodatnią wartość sumy współczynników przy niewiadomych równania, podłączamy do węzła 4' dolnej siatki. Wyraz wolny przedstawia zasilanie węzła 4 prądem skierowanym od węzła o wartości [por. (1.6)]

$$I_i^p = a_{i0} m_i = 21 \cdot 0,0001 = 0,0021 \text{ A} = 2100 \mu\text{A}.$$



Rys. 2

Układ sieci modelującej równanie podano na rys. 2. W praktyce przedstawiony układ zastosować można do rozwiązywania układów równań algebraicznych, których współczynniki tworzą macierz symetryczną względem głównej przekątnej.

Tablica 2

| Nr | a_{11} | | a_{12} | | a_{13} | | a_{14} | | a_{15} | | a_{16} | | a_{17} | | a_{18} | | a_{19} | | a_{110} | | Σa_{1k} | | Wyrazy wolne | | | | | |
|----|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|---------------|--------------|--------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|---------|-----------------|---------|--------------|---------|---------|---------|---------|-------------------|
| | R_{11} | R_{12} | R_{13} | R_{14} | R_{15} | R_{16} | R_{17} | R_{18} | R_{19} | R_{18} | R_{17} | R_{16} | R_{15} | R_{14} | R_{13} | R_{12} | R_{11} | R_{10} | R_{9} | R_{8} | R_{7} | R_{6} | R_{5} | R_{4} | R_{3} | R_{2} | R_{1} | I_1^0 |
| 1 | 2,56 | -5,12 195,3Ω | 0,96 1041,7Ω | 0 | 1,6 625Ω | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | -5,16 195,13 | 16,80 142,0 | -7,04 142,0 | 0,96 1041,7 | -11,2 89,3 | 5,6 178,6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0,96 1041,7 | -7,04 142,0 | 15,12 142,0 | -7,04 142,0 | 3,6 277,8 | 11,2 89,3 | 3,6 277,8 | 2 500 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 0 | 0,96 1041,7 | -7,04 142,0 | 7,08 | 0 | 3,6 277,8 | 178,6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1,6 625 | -11,2 89,3 | 3,6 277,8 | 0 | 18 | 62,5 | 500 | 2 | 2 | 2 | 500 | 500 | 2 | 2 | 500 | 500 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 0 | 5,6 178,6 | -11,2 89,3 | 3,6 277,8 | -16 62,5 | 44 | 62,5 | -16 | 6 | -16 | 44 | 62,5 | -16 | 6 | 62,5 | 166,7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 0 | 0 0 | 3,6 277,8 | -5,6 178,6 | 2 500 | 62,5 | 500 | 2 | 2 | 2 | 500 | 500 | 2 | 2 | 500 | 500 | 1 | 1000 | 125 | 4 | 21,5077 | 250 | 4 | 24,5077 | 16 | 62,5 | 398,8 | 0 |
| 8 | 0 0 | 0 0 | 2 500 | 0 | 2 500 | 62,5 | 500 | 2 | 2 | 2 | 500 | 500 | 2 | 2 | 500 | 500 | 2 | 500 | 125 | 4 | 24,5077 | 250 | 4 | 24,5077 | 16 | 62,5 | 398,8 | 0 |
| 9 | 0 0 | 0 0 | 0 0 | 1 1000 | 0 | 6 166,7 | 62,5 | -8 | 6 | -8 | 125 | 125 | 0 | 1 | 1000 | 27,5077 | -8 | 125 | 27,5077 | 125 | 125 | 125 | 125 | 125 | 125 | 125 | 125 | 0 |
| 10 | 0 0 | 0 0 | 0 0 | 0 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,6269 6269,μA |

łączą węzły siatki dolnej. Opory ρ umieszczamy w węzłach, gdzie suma $\sum a_{ik}$ jest różna od zera, przy czym w przypadku gdy suma współczynników przy niewiadomych danego równania jest dodatnia, opór ρ włączamy do węzła dolnej siatki, a w przypadku gdy suma ta jest ujemna — do odpowiedniego węzła siatki górnej.

Układ ogólny sieci wraz z zasilaniem podany jest na rys. 3. Zasilania skierowane są do węzłów siatki górnej, przy czym, jeśli wyraz wolny a_{ik} jest dodatni [w sensie zapisu (2.1)], to prąd powinien być skierowany od węzła (w rozpatrywanym przypadku występuje tylko zasilanie do węzła 10).

Należy podkreślić, że opory R , występujące w schemacie sieci, mogą być w zasadzie dowolne, jednakże dla otrzymania modelu sieci odpowiadającego układowi równań (2.2) konieczne jest, aby opory łączące odpowiednie węzły siatki górnej i dolnej były sobie równe. Tak samo wielkości podłączonych sił elektromotorycznych E_i w zasadzie nas nie interesują: ich zadaniem jest zrównanie potencjałów odpowiednich węzłów siatki dolnej z potencjałami węzłów siatki górnej.

Na analogu elektrycznym rozwiązujemy układ równań w sposób następujący. Po zmontowaniu sieci zgodnie z objaśnieniem podanym w przykładzie 2 oraz po zasileniu jej prądami modelującymi wyrazy wolne — podłączamy woltomierz do wybranych węzłów i oraz i' , następnie sprawdzamy, czy potencjały te są sobie równe. W przypadku stwierdzenia różnicy, co normalnie ma miejsce, różnicę potencjałów tych węzłów sprowadzamy do zera za pomocą regulowanej siły elektromotorycznej E_0 . Końcówki woltomierza przykładamy do następnych węzłów dolnej i górnej siatki i potencjały tych węzłów wyrównujemy w podobny sposób za pomocą siły elektromotorycznej E_0 przynależnej do tego węzła.

Powtarzając omówione postępowanie w stosunku do dalszych węzłów drogą iteracji wyrównujemy potencjały odpowiadających sobie węzłów dolnej i górnej siatki. Dokładność tego wyrównania zależy od urządzenia technicznego lub założeń rachunkowych: Z chwilą osiągnięcia wyrównania postępowanie iteracyjne jest zakończone i spełnia modelowany układ równań algebraicznych. Należy wówczas zmierzyć napięcia np. górnej siatki i ze wzoru drugiego (1.4) obliczyć poszukiwane niewiadome; wynoszą one

$$x_i = U_i \frac{1}{m_u}.$$

Powracając do przykładu 2, otrzymano na drodze rachunkowej następujące wartości niewiadomych (przyjmując, że wyraz wolny $a_{10} = 2,5077$):

$$x_1 = -0,139315, \quad x_2 = -0,096873, \quad x_3 = -0,063576,$$

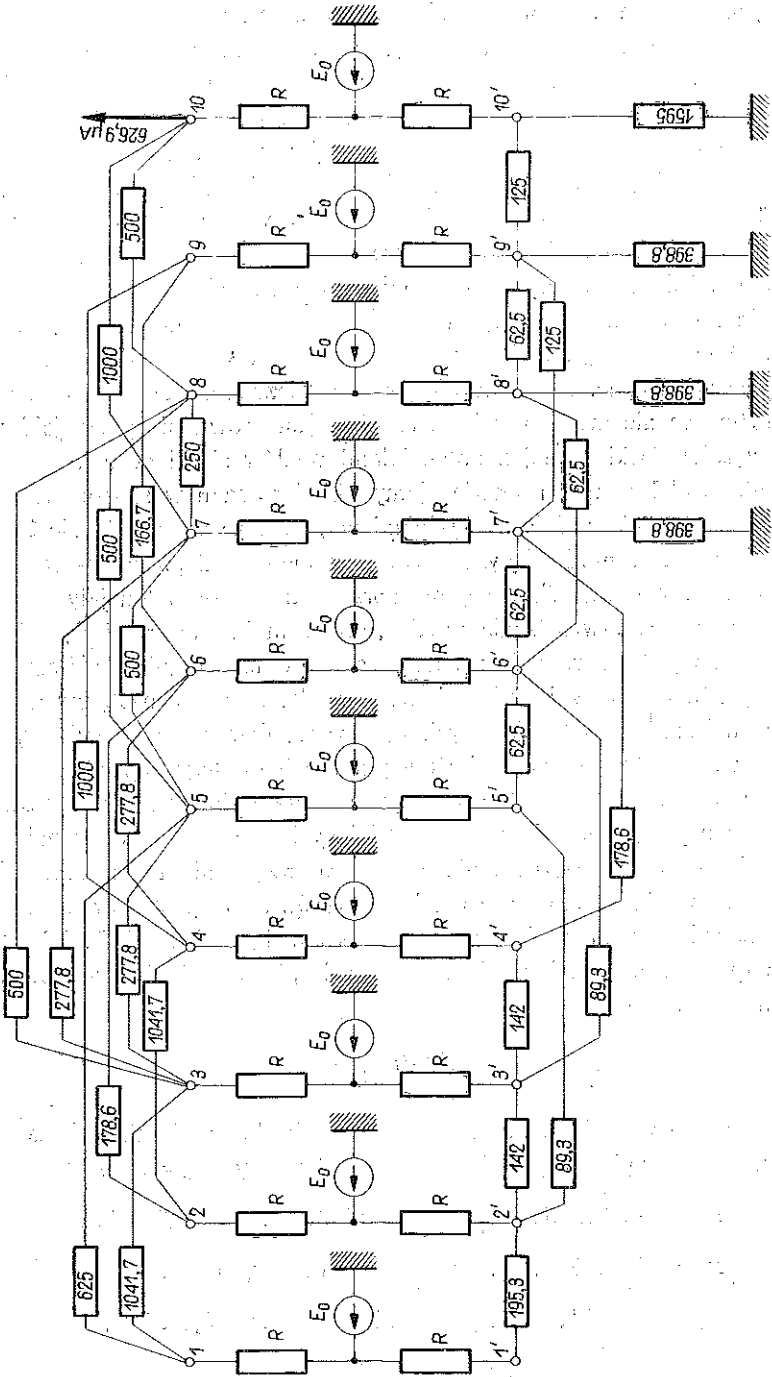
$$x_4 = -0,048613, \quad x_5 = -0,048961, \quad x_6 = -0,006251,$$

$$x_7 = 0,018114, \quad x_8 = 0,055895, \quad x_9 = 0,113549,$$

$$x_{10} = 0,249766.$$

Natomiast w sieci analogowej np. napięcie

$$U_{10} = 0,248 \text{ V},$$



Rys. 3

skąd uwzględniając wartość współczynnika przeniesienia napięcia, znajdziemy

$$m_u = m_i m_r = 0,001 [A] \cdot 1000 [\Omega] = 1 [V],$$

a zgodnie z zależnością (1.4) otrzymamy

$$x_{10} = 0,248 \frac{1}{1} = 0,248.$$

Na zbudowanym analogu elektrycznym uzyskiwano dokładność rozwiązania w granicach 1-5%, co w wielu przypadkach może się okazać dokładnością wystarczającą.

O dokładności decyduje zarówno sposób nastawienia potencjometrów modelujących opory R_{ik} , jak i zasilania siłami elektromotorycznymi E_0 ; dokładność ta zależy również od zastosowanego przyrządu do pomiaru napięć. Natomiast szybkość iteracji zależy m.in. od stosunków oporów R_{ik} względem siebie i oporu R .

Analog AL-6 nadaje się do rozwiązywania wielu układów liniowych równań algebraicznych. Wymaga łatwej, prawie mechanicznej obsługi i elementarnych obliczeń.

Literatura cytowana w tekście

1. I. W. BRAY, *A electrical analyser for rigid frameworks*, Struct. Eng., 9, 1957.
2. I. P. CORBETT, I. E. CALVERT, *An analog computer for indeterminate mechanical structures*, Proc. Electr. Conf., 6 (1950).
3. Z. DOWGIRD, R. DOWGIRD, *Krakowianowe metody obliczania konstrukcji ramowych. Cz. I. Ramy elementarne*, PWT, 1952.
4. К. К. Керопян, П. М. Чеголин, *Электрическое моделирование в строительной механике*, Госстройиздат, Москва 1963.
5. A. LISOWSKI, *Analogowe maszyny matematyczne*, PWN (skrypt), Wyd. II, Warszawa-Kraków 1968.
6. *Математическое моделирование и теория электрических цепей*, Институт Кибернетики АН Украинской ССР, Вып. I, II, III, Киев 1963, 1964, 1965.
7. Г. Е. Пухов, *Электрическое моделирование стержневых и тонкостенных конструкций*. Изд. АН Украинской ССР, Киев 1960.

Резюме

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ АНАЛОГ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ, ОБРАЗУЮЩИХ НОРМАЛЬНУЮ МАТРИЦУ

Явление электро-механической аналогии, использовано для вопросов, касающихся механики. В особенности, в электрической сети можно моделировать уравнения метода деформаций, применяя их к балкам, рамам и пластинкам.

В настоящей работе, автор представляет систему электрической сети, дающей возможность моделировать произвольную систему линейных алгебраических уравнений, с тем ограничением, что бы коэффициенты при неизвестных, создавали нормальную матрицу т. е. симметрическую по отношению к главной диагонали, а также чтобы итерационная последовательность была конвергентной.

Summary

THE ELECTRIC ANALOGUE FOR SOLVING ALGEBRAIC LINEAR EQUATIONS
OF THE FIRST ORDER WHICH MAKE A NORMAL MATRIX

The phenomenon of electromechanical analogue has been used for problems of mechanics. In particular may be modeled, in an electric net, equations of the method of deformation used for beams, frames and plates.

In this paper the author presents a system of an electric net which makes it possible to model an arbitrary set of algebraic linear equations provided that the coefficients of unknowns are a normal matrix — i.e., symmetrical in relation to the main diagonal — and the iterating series are convergent.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 czerwca 1969 r.
