

## SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNE SKRĘCANIE WYCINKA TORUSA

ANDRZEJ MIODUCHOWSKI (WARSZAWA)

Problemem sprężystego skręcania wycinka pierścienia kołowego zajmowało się wielu badaczy. Dopiero w roku 1930 O. GÖHNER [1, 2 i 3] zastosował do tego problemu ogólne równania teorii sprężystości we współrzędnych walcowych, co pozwoliło (przy uwzględnieniu zasady Saint Venanta) na otrzymanie ścisłych równań.

Zagadnienie plastycznego skręcania wycinka pierścienia kołowego zostało rozwiązane w pracy [4], gdzie jednak przyjęto błędne założenie o prędkości wzdłuż linii nieciągłości pola naprężeń [5]. Z dalszych prac poświęconych temu zagadnieniu należy wymienić jeszcze prace [6, 7 i 8], w których autorzy podali m.in. równania charakterystyk problemu oraz rozwiązania kilku przykładów wykorzystując metodę graficzno-analityczną.

Zagadnienie sprężysto-plastycznego skręcania takich prętów jest bardzo trudne. Do tej pory uzyskano tylko rozwiązania dla pewnych zbliżonych do okręgu przekrojów poprzecznych [9] posługując się odwrotną metodą zaproponowaną przez SOKOŁOWSKIEGO dla eliptycznych prętów pryzmatycznych (por. np. [10]).

Niniejsza praca ma na celu przedstawienie ogólnej metody pozwalającej na uzyskanie rozwiązania sprężysto-plastycznego dla dowolnych przekrojów poprzecznych skręcanego wycinka torusa, zarówno jednorodnego jak i niejednorodnego.

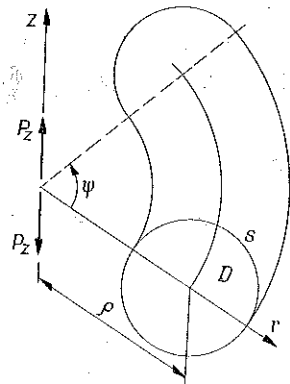
Rozpatrzmy wycinek torusa o dowolnym przekroju poprzecznym w walcowym układzie współrzędnych  $r, \psi, z$ , poddany działaniu dwóch równych i przeciwnie skierowanych sił  $P_z$ , położonych na osi przechodzącej przez środek pierścienia i prostopadłych do jego płaszczyzny (rys. 1). Siły te powodują jednakowy we wszystkich przekrojach pierścienia moment skręcający  $M = \rho P_z$ . Przyjmując, że w tym przypadku skręcania jedynie składowe naprężeń stycznych

$$\tau_{r\psi} = \tau_{r\psi}(r, z), \quad \tau_{z\psi} = \tau_{z\psi}(r, z)$$

są różne od zera możemy, wprowadzając pojęcie funkcji naprężeń

$$(1) \quad \tau_{r\psi} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \tau_{z\psi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r},$$

sformułować problem sprężysto-plastycznego skręcania pierścienia następująco:



Rys. 1

W obszarze  $D$  przekroju poprzecznego należy znaleźć taką funkcję naprężeń  $\Phi$ , która spełnia nierówność

$$(2) \quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 \leq r^4 k^2,$$

gdzie  $k$  jest granicą plastyczności rozpatrywanego materiału pierścienia przy czystym ścinaniu; w obszarach uplastycznionych w zależności tej występuje znak równości. W obszarze sprężystym funkcja ta spełnia ponadto równanie

$$(3) \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} = -2c.$$

Wielkość  $c$  jest parametrem zależnym od działającej siły  $P_z$ . Na brzegu  $S$  obszaru  $D$  mamy  $\Phi(r, z) = \text{const}$  i w przypadku obszaru jednopójnego możemy przyjąć  $\Phi(r, z) = 0$ . na  $S$ . Moment skręcający jest oczywiście równy

$$(3') \quad M = \rho \int_D \tau_{z\psi} dr dz = \rho \int_D r^{-2} \frac{\partial\Phi}{\partial r} dr dz.$$

Wprowadzając nową funkcję naprężeń  $u = \Phi/\alpha$  i oznaczając  $\alpha = 2c$  możemy równanie (3) napisać w postaci

$$(4) \quad -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r^3} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{1}{r^3}.$$

Tak sformułowany problem sprężysto-plastycznego skręcania możemy teraz łatwo przedstawić jako pewne zagadnienie wariacyjne, poszukując minimum funkcjonału

$$(5) \quad F[u] = (Lu, u) - 2(u, f).$$

Jeśli mianowicie operator  $L$  nad poszukiwaną funkcją  $u$  ma postać

$$Lu = - \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ A_{jk}(P) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right] = f(P)$$

i spełnione są warunki

$$A_{jk} = A_{kj}, \quad [u]_s = 0,$$

to pierwszy wyraz po prawej stronie równości (5) wynosi [11]

$$(Lu, u) = \int_D \left[ \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right] dx dy.$$

Ponieważ, jak widać z (4),

$$A_{11} = A_{22} = \frac{1}{r^3}, \quad A_{12} = A_{21} = 0,$$

to przyjmując  $k \equiv 1$ , problem sprężysto-plastycznego skręcania wycinka torusa możemy przedstawić jako następujące zagadnienie wariacyjne:

W obszarze  $D$  przekroju poprzecznego należy znaleźć taką ciągłą funkcję  $u(r, z)$ , która spełnia następujące warunki:

- a) funkcja spełnia warunek  $u=0$  na brzegu  $S$ ;
- b) funkcja  $u$  spełnia nierówność

$$(6) \quad u_{,r}^2 + u_{,z}^2 \leq r^4 \alpha^{-2};$$

- c) minimalizuje funkcjonal

$$(7) \quad F[u] = \int_D r^{-3} (u_{,r}^2 + u_{,z}^2 - 2u) dr dz.$$

Rozwiązanie zadania o propagacji stref plastycznych sprowadza się do znalezienia granic obszarów, dla których

$$u_{,r}^2 + u_{,z}^2 = r^4 \alpha^{-2}.$$

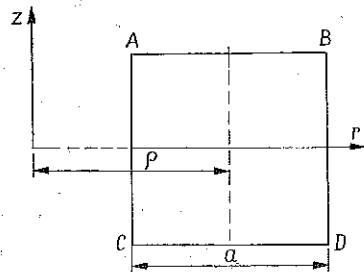
Moment skręcający jest teraz zgodnie z (3') równy

$$(8) \quad \mu = \rho \alpha \int_D r^{-2} u_{,r} dr dz.$$

Problem poszukiwanej funkcji  $u(r, z)$  sformułowany powyżej rozwiązaliśmy numerycznie stosując metodę lokalnych wariacji [12]. Przy jej pomocy uzyskano m.in. szereg rozwiązań dla sprężysto-plastycznego skręcania prętów przyrównanych jednorodnych [12 i 13] lub niejednorodnych [14]. Pozwala ona na rozwiązanie zadania dla pręta o dowolnym przekroju poprzecznym, przy czym nie musimy znać z góry rozwiązania dla strefy plastycznej; otrzymujemy je równocześnie z rozwiązaniem dla strefy sprężystej.

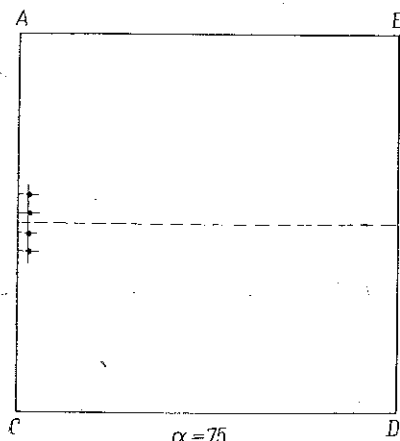
Jako przykład rozpatrzmy wycinek torusa o przekroju poprzecznym  $D$  w kształcie kwadratu o boku  $a$  i promieniu zwinienia  $\rho$  (rys. 2). Niech  $a/\rho = 1/5$ . Założymy ponadto, że pręt jest plastycznie jednorodny.

Problemy takie, jak wybór liczby punktów podziału płaszczyzny przekroju poprzecznego  $D$ , dobór rozwiązania zerowego itp. oczywiście pominiemy. Zagadnienia te są wyczerpująco omówione w pracy [12]. Tu ograniczymy się do podania najistotniejszych parametrów charakteryzujących to zadanie. Cały obszar przekroju poprzecznego  $D$  podzielono na 400 jednakowych kwadracików (dzieląc każdy z boków na  $n=20$  części). Podział ten został zachowany przez cały czas przeprowadzania obliczeń. Punktami, w których sprawdzano wartość gradientu, były zawsze środki małych kwadracików. W przypadku spełnienia przez gradient równości (6) — środek odpowiedniego kwadracika zostawał oznaczony na rysunku kropką.



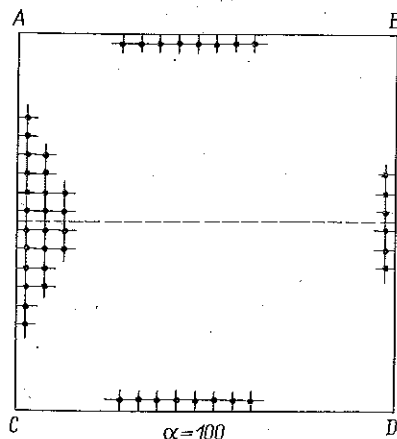
Rys. 2

Zadanie zostało rozwiązane dla trzech różnych wartości przyłożonej siły  $P_z$  (parametru  $\alpha$ ). Wartości parametru dobrane zostały tak, aby uwypuklić charakterystyczne momenty w procesie propagacji stref plastycznych.



$\alpha = 75$

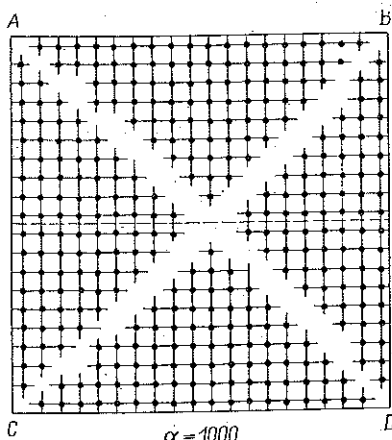
Rys. 3



$\alpha = 100$

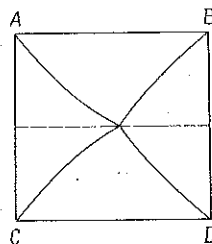
Rys. 4

Rysunek 3 przedstawia obszar stref plastycznych dla  $\alpha = 75$ . Pojawiają się one tylko w niewielkim stopniu od strony wewnętrznej torusa; zgodne jest to oczywiście z przewidywaniami, gdyż w stanie sprężystym największe naprężenia ścinające panują właśnie w tej strefie przekroju poprzecznego. Zwiększanie siły  $P_z$  prowadzi do



$\alpha = 1000$

Rys. 5



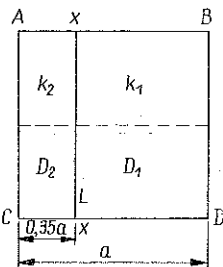
Rys. 6

powiększenia strefy uplastycznionej i pojawienia się nowych, w tym również od strony zewnętrznej. Sytuacja taka przedstawiona jest na rys. 4 dla  $\alpha = 100$ . Widać wyraźną dysproporcję w powierzchni stref plastycznych od strony wewnętrznej i zewnętrznej pierścienia.

Na rys. 5 pokazano bardzo zaawansowany stan uplastycznienia dla  $\alpha = 1000$ . Z układu stref sprężystych można już wnioskować układzie linii nieciągłości dla

stanu pełnego uplastycznienia. Jak widać układają się one w charakterystyczny dla takiego przypadku sposób (wklęsła linia od strony wewnętrznej i wypukła od strony zewnętrznej torusa) przedstawiony na rys. 6 (por. np. rys. 4 z pracy [7]).

Rozpatrzmy teraz przypadek plastycznej, skokowej niejednorodności poprzecznej (rys. 7). W jednym obszarze przekroju poprzecznego  $D_1$  mamy granicę plastyczności  $k_1$ , a w drugim  $D_2$  granicę  $k_2$ ; obszary te rozdziela linia kontaktu  $L$ . Jeżeli przyjmiemy tak jak poprzednio  $k_1 \equiv 1$  i  $k_2 \geq k_1$ , to problem sprężysto-plastyczny możemy przedstawić jako następujące zagadnienie wariacyjne:



Rys. 7

W obszarze  $D$  należy znaleźć taką funkcję  $u(r, z)$ , która powinna spełniać następujące warunki:

- funkcja spełnia warunek  $u=0$  na brzegu  $S$ ;
- funkcja  $u$  jest ciągła razem ze swoimi pierwszymi pochodnymi w obszarach  $D_1$  i  $D_2$ ;
- funkcja  $u$  jest ciągła na linii  $L$ ;
- spełnione są następujące warunki:

$$(9) \quad \begin{aligned} u_{,r}^2 + u_{,z}^2 &\leq r^4 \alpha^{-2} \text{ w obszarze } D_1, \\ u_{,r}^2 + u_{,z}^2 &\leq k_2 r^4 \alpha^{-2} \text{ w obszarze } D_2; \end{aligned}$$

- funkcja  $u$  minimalizuje funkcjonal

$$(10) \quad F[u] = \int_D r^{-3} (u_{,r}^2 + u_{,z}^2 - 2u) dr dz.$$

Problem propagacji stref plastycznych sprowadza się do znalezienia obszarów, w których spełnione są następujące warunki:

$$(9') \quad \begin{aligned} u_{,r}^2 + u_{,z}^2 &= r^4 \alpha^{-2} \text{ w obszarze } D_1, \\ u_{,r}^2 + u_{,z}^2 &= k_2 r^4 \alpha^{-2} \text{ w obszarze } D_2 \end{aligned}$$

dla kolejnych wartości parametru  $\alpha$ . Moment skręcający  $\mu$  jest tak jak poprzednio równy

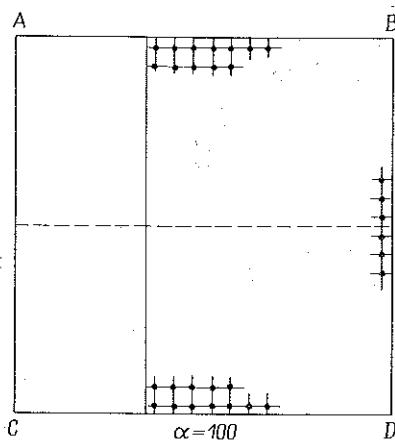
$$\mu = \rho \alpha \int_D r^{-2} u_{,r} dr dz.$$

Oczywiście należy pamiętać, że w naszym przypadku w obszarze  $D$  występuje linia kontaktu  $L$ , na której pochodne nie są ciągłe. Ponieważ jednak dana jest z góry, to możemy tak dobrać punkty podziału obszaru, aby znajdowały się one na tej linii, co eliminuje problem nieciągłości pochodnych i zapewnia poprawność wyniku. W przypadku gdyby taki dobór punktów był trudny, można początkowy  $n$ -krotny podział zmniejszać sukcesywnie przez dzielenie obszaru  $D$  na coraz mniejsze części aż do osiągnięcia wymaganej dokładności.

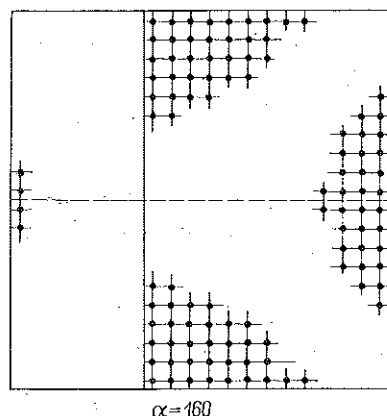
Jako przykład rozpatrzmy tak jak poprzednio wycinek torusa o kwadratowym przekroju poprzecznym i zwinięciu  $a/\rho = 1/5$  (rys. 7). Różnym granicom plastyczności  $k_2/k_1 = 2$  niech odpowiadają obszary  $D_2$  i  $D_1$ .

Przypadek ten został rozwiązany dla trzech wartości parametrów  $\alpha$  tak, aby można było prześledzić charakterystyczne momenty w procesie propagacji stref plastycznych.

Rysunek 8 przedstawia obszar stref plastycznych dla  $\alpha=100$ . Pojawiają się one tylko w obszarze materiału o niższej granicy plastyczności (w sąsiedztwie materiału



Rys. 8



Rys. 9

o wyższej granicy plastyczności i na zewnętrznej stronie torusa). Jak widać, obszar uplastyczniony po zewnętrznej stronie jest taki sam jak w przypadku materiału jednorodnego dla  $\alpha=100$  (rys. 4).

Zwiększanie siły  $P_z$  prowadzi do powiększenia stref plastycznych w obszarze o granicy plastyczności  $k_1$  i pojawienia się nowych stref w obszarze o wyższej granicy plastyczności, a zwłaszcza na wewnętrznej stronie torusa (rys. 9).

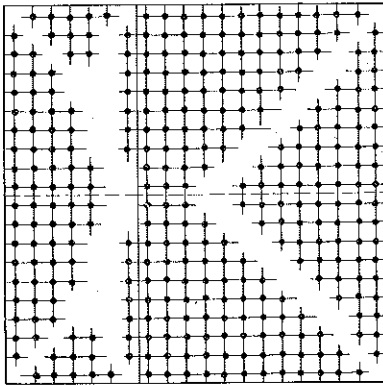
Na rys. 10 pokazany jest stan zaawansowanego uplastycznienia dla  $\alpha=1000$ . Z układu stref sprężystych możemy wnioskować o układzie linii nieciągłości pola naprężeń dla stanu pełnego uplastycznienia. W sposób szkicowy jest on przedstawiony na rys. 11.

W tabelcy 1 przedstawiono wartości momentu  $\mu$  odpowiadające poszczególnym stanom uplastycznienia (wielkościom parametru  $\alpha$ ).

$k \equiv 1$		$k_2/k_1 = 2$	
$\alpha$	$\mu$	$\alpha$	$\mu$
75	11,08	100	15,90
100	13,80	160	20,40
1000	20,50	1000	24,40

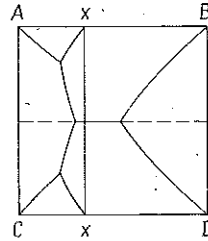
Obliczenia numeryczne zostały przeprowadzone na maszynie cyfrowej Odra 1204 w Pracowni Obliczeń Numerycznych IPPT PAN.

Na zakończenie należy tu zwrócić uwagę na następujący fakt. W pracy [15], omawiającej problem optymalnego z punktu widzenia nośności granicznej rozkładu niejednorodności plastycznej w przekroju poprzecznym pręta pryzmatycznego



$\alpha = 1000$

Rys. 10



Rys. 11

pokazano, iż ewentualne wkładki wzmacniające należy umieszczać tam, gdzie przy sprężysto-plastycznym skręcaniu pojawiają się strefy plastyczne. Jeśli porównamy teraz otrzymane tu wyniki z zaproponowanymi w pracy [16] sposobami wzmacniania za pomocą wkładek (w zależności od ich liczby) skręcanego wycinka torusa, to również zauważymy pełną analogię. Np. wzmacniając niewielką wkładką z materiału mocniejszego musimy ją umieścić od strony wewnętrznej pierścienia (por. rys. 3 z rys. 14a w pracy [16]); jak widać natomiast z rys. 8, 9 i 10 taki typ wzmocnienia prowadzi do bardziej równomiernego rozkładu naprężeń w przekroju poprzecznym w procesie obciążania.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. O. GÖHNER, *Ingenieur-Archiv*, **1**, 619, 1930.
2. O. GÖHNER, *Schubspannungsverteilung im Querschnitt eines gedrehten ringstabes mit Anwendung auf Schraubfedern*, *Ingenieur-Archiv*, **2**, 1, 1931.
3. O. GÖHNER, *Die Berechnung Zylindrischer Schraubfedern*, *Zeitschrift VDI*, 269, 1932.
4. W. FREIBERGER, *The uniform torsion of a perfectly plastic circular ring*, *Aeronaut. Research Labs., Rept. SM 213*, Melbourne 1953.
5. A. J. WAUG, W. PRAGER, *Plastic twisting of a circular ring sector*, *J. Mech. Phys. Solids*, **8**, 169-175, 1955.
6. W. FREIBERGER, *Torsion*, Chapter 48 of "Handbook of Engineering Mechanics", Mc Graw-Hill, New York 1962.
7. W. FREIBERGER, W. PRAGER, *Plastic twisting of a thick-walled circular ring sectors*, *J. Appl. Mech.*, **23**, 1955.
8. A. M. WAHL, *Mechanical springs*, Mc Graw-Hill, New York-Toronto, London 1963.
9. W. FREIBERGER, *Elastic-plastic torsion of circular ring sectors*, *Quart. Appl. Math.*, **14**, 3, 1956.

10. W. PRAGER, P. G. HODGE, Jr., *Theory of perfectly plastic solids*, John Wiley and Sons, New York 1951.
11. С. Г. Михлин, *Вариационные методы в математической Физике*, Гостехиздат, 1957.
12. Н. В. Баничук, В. М. Петров, Ф. Л. Черноусько, *Численно-решение вариационных и крайних задач методом локальных вариаций*, Ж. вычисл. мат. и маш. физ., 6, 6, 1966.
13. Н. В. Баничук, *Расчет упруго-пластического кручения стержней методом локальных вариаций*, Инж. Ж. МТТ, 1, 1967.
14. А. Демская, А. Мiodуховски, *Упруго-пластическое кручение составных стержней*, Изв. АН СССР, МТТ, 6, 1969.
15. А. Miodуховски, *Оптымна неједнороднось пластычна скрѣцањего прѣта прызматычнаго*, Rozpr. Inżyn., 19, 3, 501—512, 1971.
16. А. Miodуховски, *Оптымна неједнороднось пластычна скрѣцањего вycinка torusa*, Rozpr. Inżyn., 19, 3, 523—531, 1971.

## Резюме

## УПРУГОЕ ПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ СЕКТОРА ТОРА

Представлен общий метод, дающий возможность, получить пластическое упругое решение для произвольных сечений поперечно скручиваемого сектора тора. Представлены решения, полученные численным путем для квадратного поперечного сечения. Эти решения показывают способ распространения пластических зон по мере увеличения крутящего момента для случаев однородного и неоднородного торов.

## SUMMARY

## ELASTO-PLASTIC TWISTING OF A TORUS SECTION

Here a general method is presented enabling the obtainment of elasto-plastic solutions for arbitrary cross-sections of the twisted section of a torus.

Solutions obtained numerically are presented for the cross-section in the form of a square. These solutions show the method of propagation of the plastic zones with increasing torque in the case of a homogeneous and inhomogeneous torus.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

*Praca została złożona w Redakcji dnia 9 kwietnia 1971 r.*