

NIESTACJONARNY PRZEPIY W CIEPŁA W GRUBEJ RURZE OGRZANEJ RUCHOMYM POLEM TEMPERATURY

TADEUSZ ROŻNOWSKI I KONSTANTY SKAŁSKI (WARSZAWA)

1. WSTĘP

Rury są często opływane przez ośrodki o różnych w ogólności zmiennych własnościach i parametrach oraz temperaturach. Tak np. w laboratoriach i technologii przemysłowej, jak również w energetyce, napełnia się cylindryczne zbiorniki ciekłym metalem lub gazem, wytwarza rury «metodą odśrodkową», przepuszcza strumienie gorącej i zimnej wody przez przewody studzone z zewnątrz lub ogrzane.

Aby określić kryteria celowości i trwałości takich urządzeń, należy uwzględnić obok efektów ciśnienia mechanicznego na ściankach rury także efekty termiczne, wywołane przez źródła ciepła na pobocznicach. Badania w tym zakresie mają długą historię dotyczącą zarówno strony doświadczalnej jak i teoretycznej oraz przedstawiają bogaty materiał do dalszych studiów [1].

Z myślą o prowadzonych w kraju badaniach doświadczalnych nad wytrzymałością termiczną form odlewniczych i naczyń w postaci drążonych walców w niniejszej pracy rozwiązujemy teoretyczne zagadnienie wyznaczania temperatury w długiej rurze, zakładając pewien model ruchomego obciążenia termicznego na pobocznicach oraz przyjmując, że temperatura wewnątrz rury spełnia klasyczne równanie przewodnictwa ciepła ze stałymi współczynnikami.

Oznaczenia

- r, φ, z współrzędne cylindryczne w pewnym układzie inercyjnym,
- a, b promień zewnętrzny i wewnętrzny rury,
- v prędkość źródła ciepła,
- t czas,
- $\theta = \theta(r, z; t)$ temperatura w ściance rury,
- θ_0 temperatura jednostkowa, skok temperatury na pobocznicę zewnętrzną,
- $\kappa\theta_0$ skok temperatury na pobocznicę wewnętrzną,
- $\theta(a, z; t)$ temperatura na pobocznicę zewnętrzną,
- $\theta(b, z; t)$ temperatura na pobocznicę wewnętrzną,
- $\kappa_0 = \lambda/cq$
- λ współczynnik przewodzenia ciepła,
- c ciepło właściwe,
- q gęstość materiału,

- \bar{l}, \bar{m} wymiar skarpy odpowiednio na poboczniczy zewnętrznej i wewnętrznej,
 $\rho = r/a$
 $\zeta = z/a$ współrzędne bezwymiarowe,
 $\tau = \frac{\kappa_0 t}{a^2}$
 $1, b = \frac{\bar{b}}{a}, 0 < b < 1$ bezwymiarowy promień zewnętrzny i wewnętrzny rury,
 $w = \frac{va}{\kappa_0}$ prędkość bezwymiarowa,
 l, m bezwymiarowa długość skarpy odpowiednio na poboczniczy zewnętrznej i wewnętrznej,
 $\bar{\theta} = \bar{\theta}(\rho, \zeta; \tau) = \frac{\theta(r, z; t)}{\theta_0}$ temperatura bezwymiarowa wewnątrz rury,
 $\bar{\theta}(1, \zeta; \tau) = \frac{\theta(1, z; t)}{\theta_0}$ temperatura bezwymiarowa na poboczniczy zewnętrznej,
 $\bar{\theta}(b, \zeta; \tau) = \frac{\theta(b, z; t)}{\theta_0}$ temperatura bezwymiarowa na poboczniczy wewnętrznej,
 $J_0(x), J_1(x), Y_0(x), Y_1(x)$ funkcje Bessela pierwszego i drugiego rodzaju zerowego i pierwszego rzędu,
 $I_0(x), I_1(x), K_0(x), K_1(x)$ zmodyfikowane funkcje Bessela pierwszego i drugiego rodzaju zerowego i pierwszego rzędu,
 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}$ laplasjan.

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Rozpatrzmy nieustalony rozkład temperatury w długiej rurze, której pobocznicze ogrzano nagle po stronie zewnętrznej i wewnętrznej do temperatury zmieniającej się wg zarysu skarpy, przy czym odpowiednie źródło ciepła powoduje ogrzanie przesuwające się ze stałą prędkością wzdłuż dodatniego kierunku osi symetrii układu. Temperatura powierzchni rury poza obszarem ogrzania jest stała i równa zero. Ponadto założymy, że w chwili początkowej temperatura w całym ciele jest równa zero.

Uwzględniając przyjęte oznaczenie możemy napisać równanie przewodnictwa ciepła w rozpatrywanym ciele w postaci

$$(2.1) \quad \left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \bar{\theta} = 0, \quad b < \rho < 1, \quad |\zeta| < \infty; \quad 0 < \tau < \infty.$$

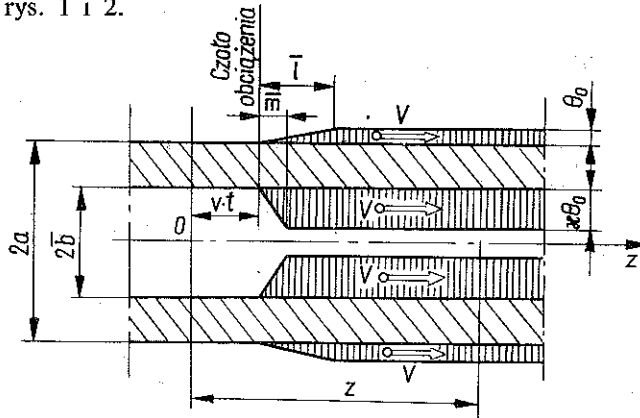
Warunki początkowe i brzegowe wyrazimy zgodnie z rozważaniami w pracy [2] za pomocą wzorów

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \bar{\theta}(\rho, \zeta; 0) &= 0, \quad b \leq \rho \leq 1, \quad |\zeta| < \infty, \\ \bar{\theta}(1, \zeta; \tau) &= \frac{1}{l} [(\zeta - w\tau) \eta(\zeta - w\tau) - (\zeta - l - w\tau) \eta(\zeta - l - w\tau)], \\ \bar{\theta}(b, \zeta; \tau) &= \kappa \frac{1}{m} [(\zeta - w\tau) \eta(\zeta - w\tau) - (\zeta - m - w\tau) \eta(\zeta - m - w\tau)], \\ &|\zeta| < \infty, \quad 0 < \tau < \infty, \end{aligned}$$

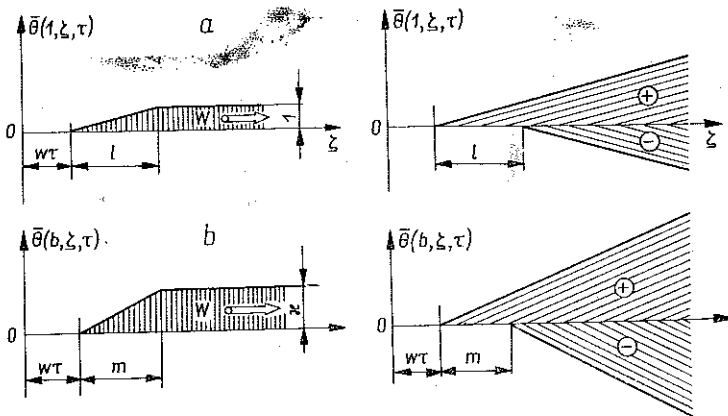
gdzie

$$(2.3) \quad \eta(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \lambda > 0, \\ 0, & \text{jeśli } \lambda < 0, \end{cases}$$

Model obciążenia termicznego rury, opisany równaniami (2.2)_{2,3} i (2.3) przedstawiony został na rys. 1 i 2.



Rys. 1. Model obciążenia termicznego na pobocznicach drążonego walca w układzie współrzędnych (r, φ, z) w chwili t



Rys. 2. Ilustracja warunków brzegowych (we współrzędnych bezwymiarowych) na pobocznicach: a) zewnętrznej, b) wewnętrznej

3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

Rozwiązanie równania (2.1) z warunkami początkowymi (2.2)₁ i warunkami brzegowymi (2.2)_{2,3} i (2.3) otrzymamy metodą transformacji całkowych Fouriera i Laplace'a, dla których kolejno przyjmujemy oznaczenia:

$$(3.1) \quad \mathcal{F}[\bar{\theta}(\rho, \zeta; \tau)] = \hat{\theta}(\rho, \alpha; \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\theta}(\rho, \zeta; \tau) e^{i\alpha\zeta} d\zeta,$$

$$\mathcal{F}^{-1} [\bar{\theta}(\rho, \alpha; \tau)] = \bar{\theta}(\rho, \zeta; \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\theta}(\rho, \alpha; \tau) e^{-i\alpha\zeta} d\alpha,$$

$$(3.1) \quad \mathcal{L}[\hat{\theta}(\rho, \alpha; \tau)] = \hat{\theta}^*(\rho, \alpha; p) = \int_0^{\infty} \hat{\theta}(\rho, \alpha; \tau) e^{-p\tau} d\tau,$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\hat{\theta}^*(\rho, \alpha; p)] = \hat{\theta}(\rho, \alpha; \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \hat{\theta}^*(\rho, \alpha; p) e^{p\tau} dp,$$

gdzie α i p są parametrami transformacji Fouriera i Laplace'a, a γ jest promieniem zbieżności całki w polu zmiennej zespolonej p , przy czym $\text{Re}[p] > \gamma$.

Równanie (2.1) i warunki (2.2) w obszarze podwójnie przetransformowanym przyjmują postać

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - (\alpha^2 + p) \right] \hat{\theta}^* = 0,$$

$$(3.2) \quad \hat{\theta}(\rho, \alpha; 0) = \hat{\theta}^*(\rho, \alpha; 0) = 0, \quad b \leq \rho \leq 1, \quad |\alpha| < \infty,$$

$$\hat{\theta}^*(1, \alpha; p) = \frac{A(\alpha, l)}{p - i\alpha w},$$

$$\hat{\theta}^*(b, \alpha; p) = \frac{\kappa A(\alpha, m)}{p - i\alpha w},$$

gdzie

$$(3.3) \quad A(\alpha, l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} l \alpha^2} (e^{l\alpha} - 1) + \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} \delta(\alpha) e^{l\alpha}.$$

Symbol $\delta(\alpha)$ oznacza deltę Diraca.

Istnieją granice funkcji

$$(3.4) \quad \lim_{l \rightarrow 0} A(\alpha, l) = \lim_{m \rightarrow 0} A(\alpha, m) = \sqrt{2\pi} \delta_+(\alpha),$$

gdzie

$$\delta_+(\alpha) = \frac{1}{2} \delta(\alpha) - \frac{1}{2\pi i \alpha}$$

jest deltą Heisenberga oraz

$$(3.5) \quad \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ w \rightarrow 0}} \hat{\theta}^*(1, \alpha; p) = \sqrt{2\pi} \frac{\delta_+(\alpha)}{p},$$

$$\lim_{\substack{m \rightarrow 0 \\ w \rightarrow 0}} \hat{\theta}^*(b, \alpha; p) = \kappa \sqrt{2\pi} \frac{\delta_+(\alpha)}{p}.$$

Zatem sformułowane zagadnienie obejmuje jako przypadki szczególne ruchome warunki brzegowe w postaci funkcji Heaviside'a o skoku jednostkowym na poboczniczy zewnętrznej i skoku κ na poboczniczy wewnętrznej, jak również przypadek

obciążenia nieruchomego, opisanego funkcją skokową [wzór (3.5)], co może zachodzić podczas intensywnego napromieniowania powierzchni przez źródła ruchome lub stałe o odpowiedniej wydajności.

Rozwiązanie równania (3.2)₁ ma postać

$$(3.6) \quad \hat{\theta}^*(\rho, \alpha; p) = A_1 I_0(\mu\rho) + A_2 K_0(\mu\rho),$$

gdzie

A_1 i A_2 oznaczają stałe całkowania, $\mu = (\alpha^2 + p)^{1/2}$.

Uwzględniając (3.2)₃ i (3.2)₄ napiszemy

$$(3.7) \quad \hat{\theta}^*(\rho, \alpha; p) = [A(\alpha, l) F_1(b, \rho; \mu) - \kappa A(\alpha, m) F_2(b, \rho; \mu)] \frac{1}{p - i\alpha\omega},$$

gdzie

$$(3.8) \quad F_1(b, \rho; \mu) = \frac{G(b, \rho; \mu)}{G(b, 1; \mu)}, \quad F_2(b, \rho; \mu) = \frac{G(1, \rho; \mu)}{G(b, 1; \mu)},$$

$$G(b, \rho; \mu) = I_0(\mu\rho) K_0(\mu b) - I_0(\mu b) K_0(\mu\rho).$$

Wykonamy obecnie transformacje odwrotne funkcji $\hat{\theta}^*(\rho, \alpha; p)$. Dla otrzymania $\hat{\theta}(\rho, \alpha; \tau)$ z wyrażenia (3.7) zastosujemy przekształcenie (3.1)₄, co prowadzi do równania

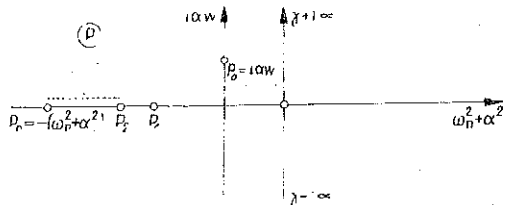
$$(3.9) \quad \hat{\theta}(\rho, \alpha; \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \{A(\alpha, l) F_1[b, \rho; (\alpha^2 + p)^{1/2}] - \kappa A(\alpha, m) F_2[b, \rho; (\alpha^2 + p)^{1/2}]\} \frac{e^{p\tau}}{p - i\alpha\omega} dp.$$

Zamienimy tę całkę na całkę po konturze zamkniętej i zastosujemy do jej obliczenia metodę rachunku residuów. Bieguny funkcji podcałkowej określa równanie

$$(3.10) \quad [I_0(\mu) K_0(\mu b) - I_0(\mu b) K_0(\mu)] (p - i\alpha\omega) = 0.$$

Jest ono spełnione w punkcie $p = p_0 = i\alpha\omega$ oraz w punktach $p = p_n = -(\alpha^2 + \omega_n^2)$, gdzie $\xi_n = \pm i\omega_n$, $n = 1, 2, \dots$, są pierwiastkami równania przestępnego (rys. 3):

$$(3.11) \quad J_0(\xi_n) Y_0(\xi_n b) - J_0(\xi_n b) Y_0(\xi_n) = 0, \quad \xi_n = i\omega_n.$$



Rys. 3. Wykres biegunów funkcji analitycznej $\hat{\theta}^*(\rho, \alpha; p)$ w płaszczyźnie zespolonej p

Skorzystalismy tutaj z następnego wzoru przedstawionego m.in. w [4], na stronie 180

$$(3.12) \quad [I_0(\mu\rho) K_0(\mu b) - I_0(\mu b) K_0(\mu\rho)]_{p = -(\alpha^2 + \omega_n^2)} = -\frac{\pi}{2} [J_0(\omega_n \rho) Y_0(\omega_n b) - J_0(\omega_n b) Y_0(\omega_n \rho)] \stackrel{df}{=} F(b, \rho; \omega_n).$$

Residuum funkcji podcałkowej (3.9) w punkcie p_0 ma wartość

$$(3.13) \quad \{A(\alpha, l) F_1 [b, \rho; (\alpha^2 + i\alpha w)^{\frac{1}{2}}] - \kappa A(\alpha, m) F_2 [b, \rho; (\alpha^2 + i\alpha w)^{\frac{1}{2}}]\} e^{i\alpha w \tau}.$$

Dla znalezienia residuów w punktach $p_n = -(\alpha^2 + \omega_n^2)$ przekształcimy wyrażenie

$$(3.14) \quad \left\{ \frac{d}{dp} (p - i\alpha w) G [b, 1; (\alpha^2 + p)^{\frac{1}{2}}] \right\}_{p_n = -(\alpha^2 + \omega_n^2)} = \\ = \left\{ (p - i\alpha w) \frac{d}{dp} [I_0(\mu) K_0(\mu b) - I_0(\mu b) K_0(\mu)] \right\}_{p_n = -(\alpha^2 + \omega_n^2)} = \\ = \left\{ \frac{p - i\alpha w}{2\mu} [I'_0(\mu) K_0(\mu b) - I_0(\mu b) K'_0(\mu)] + \right. \\ \left. + \frac{p - i\alpha w}{2\mu} b [I_0(\mu) K'_0(\mu b) - I'_0(\mu b) K_0(\mu)] \right\}_{p_n = -(\alpha^2 + \omega_n^2)}.$$

Uwzględniając pewne związki dla funkcji Bessela możemy doprowadzić wzór (3.14) do zwięzłej postaci:

$$(3.15) \quad \frac{\omega_n^2 + \alpha^2 + i\alpha w}{2\omega_n^2} \frac{J_0^2(\omega_n b) - J_0^2(\omega_n)}{J_0(\omega_n b) J_0(\omega_n)}.$$

Ponadto biorąc pod uwagę (3.12) otrzymamy

$$(3.16) \quad \hat{\theta}(\rho, \alpha; \tau) = \{A(\alpha, l) F_1 [b, \rho; (\alpha^2 + i\alpha w)^{\frac{1}{2}}] - \\ - \kappa A(\alpha, m) F_2 [b, \rho; (\alpha^2 + i\alpha w)^{\frac{1}{2}}]\} e^{i\alpha w \tau} + \\ + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^2 J_0(\omega_n b) J_0(\omega_n)}{(\omega_n^2 + \alpha^2 + i\alpha w) [J_0^2(\omega_n b) - J_0^2(\omega_n)]} e^{-(\alpha^2 + \omega_n^2)\tau} \times \\ \times [A(\alpha, l) F(\rho, b; \omega_n) - \kappa A(\alpha, m) F(\rho, 1; \omega_n)].$$

Podstawiając wyrażenie powyższe do formuły (3.1)₂ i uwzględniając (3.3) otrzymamy

$$(3.17) \quad \bar{\theta}(\rho, \zeta; \tau) = \bar{\theta}_1(\rho, \tau) + \bar{\theta}_2(\rho, \zeta; \tau) + \bar{\theta}_3(\rho, \zeta; \tau),$$

gdzie

$$(3.18) \quad \bar{\theta}_1(\rho, \tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \{F_1 [b, \rho; (\alpha^2 + i\alpha w)^{\frac{1}{2}}] \exp[-i\alpha(\zeta - l - w\tau)] - \\ - \kappa F_2 [b, \rho; (\alpha^2 + i\alpha w)^{\frac{1}{2}}] \exp[-i\alpha(\zeta - m - w\tau)]\} \delta(\alpha) d\alpha + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^2 J_0(\omega_n b) J_0(\omega_n)}{J_0^2(\omega_n b) - J_0^2(\omega_n)} \left\{ F(\rho, b; \omega_n) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-(\alpha^2 + \omega_n^2)\tau - i\alpha(\zeta - l)]}{\omega_n^2 + \alpha^2 + i\alpha w} \times \right. \\ \left. \times \delta(\alpha) d\alpha - \kappa F(\rho, 1; \omega_n) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-(\alpha^2 + \omega_n^2)\tau - i\alpha(\zeta - m)]}{\omega_n^2 + \alpha^2 + i\alpha w} \delta(\alpha) d\alpha \right\};$$

$$\begin{aligned}
 (3.19) \quad \bar{\theta}_2(\rho, \zeta; \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{l} F_1[b, \rho; (\alpha^2 + i\alpha w)^{\frac{1}{2}}] (\exp[-i\alpha(\zeta - l - w\tau)] - \right. \\
 &\quad \left. - \exp[-i\alpha(\zeta - w\tau)]) - \kappa \frac{1}{m} F_2[b, \rho; (\omega_n^2 + i\alpha w)^{\frac{1}{2}}] (\exp[-i\alpha(\zeta - m - w\tau)] - \right. \\
 &\quad \left. - \exp[-i\alpha(\zeta - w\tau)]) \right\} \frac{d\alpha}{\alpha^2}, \\
 \bar{\theta}_3(\rho, \zeta; \tau) &= \frac{2}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^2 J_0(\omega_n b) J_0(\omega_n)}{J_0^2(\omega_n b) - J_0^2(\omega_n)} \left\{ \frac{1}{l} F(b, \rho; \omega_n) \times \right. \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-(\omega_n^2 + \alpha^2)\tau]}{\omega_n^2 + \alpha^2 + i\alpha w} (\exp[-i\alpha(\zeta - l)] - \exp[-i\alpha\zeta]) \frac{d\alpha}{\alpha^2} - \kappa \frac{1}{m} F(1, \rho; \omega_n) \times \\
 &\quad \left. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-(\omega_n^2 + \alpha^2)\tau]}{\omega_n^2 + \alpha^2 + i\alpha w} (\exp[-i\alpha(\zeta - m)] - \exp[-i\alpha\zeta]) \frac{d\alpha}{\alpha^2} \right\}.
 \end{aligned}$$

Dla dalszej analizy otrzymanych wyników rozważymy przypadek ogrzania powierzchni rury w postaci funkcji Heavyside'a ($l = m = 0$). Rachunki przeprowadzimy wyznaczając granicę funkcji $\bar{\theta}(\rho, \zeta; \tau)$ w wyrażeniu (3.17), gdy $l, m \rightarrow 0$. Otrzymamy

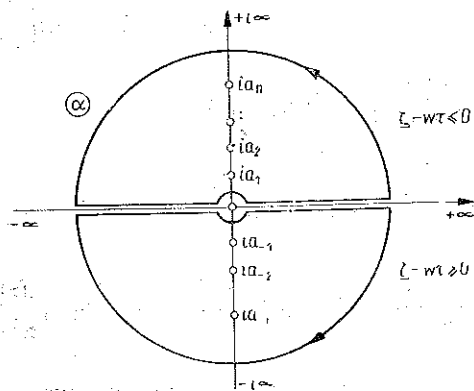
$$\begin{aligned}
 (3.20) \quad [\bar{\theta}(\rho, \zeta; \tau)]_{l, m=0} &= \lim_{l, m \rightarrow 0} \bar{\theta}(\rho, \zeta; \tau) = [\bar{\theta}_1(\rho, \tau)]_{l, m=0} + [\bar{\theta}_2(\rho, \zeta; \tau)]_{l, m=0} + \\
 &\quad + [\bar{\theta}_3(\rho, \zeta; \tau)]_{l, m=0},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 [\bar{\theta}_1(\rho, \tau)]_{l, m=0} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \{ F_1[b, \rho; (\alpha^2 + i\alpha w)^{\frac{1}{2}}] - \kappa F_2[b, \rho; (\alpha^2 + i\alpha w)^{\frac{1}{2}}] \} \times \\
 &\quad \times \exp[-i\alpha(\zeta - w\tau)] \delta(\alpha) d\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^2 J_0(\omega_n b) J_0(\omega_n)}{J_0^2(\omega_n b) - J_0^2(\omega_n)} [F(\rho, b; \omega_n) - \\
 &\quad - \kappa F(\rho, 1; \omega_n)] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-(\alpha^2 + \omega_n^2)\tau - i\alpha\zeta]}{\omega_n^2 + \alpha^2 + i\alpha w} \delta(\alpha) d\alpha, \\
 (3.21) \quad [\bar{\theta}_2(\rho, \zeta; \tau)]_{l, m=0} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \{ F_1[b, \rho; (\alpha^2 + i\alpha w)^{\frac{1}{2}}] - \\
 &\quad - \kappa F_2[b, \rho; (\alpha^2 + i\alpha w)^{\frac{1}{2}}] \} \exp[-i\alpha(\zeta - w\tau)] \frac{d\alpha}{\alpha}, \\
 [\bar{\theta}_3(\rho, \zeta; \tau)]_{l, m=0} &= -\frac{2}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^2 J_0(\omega_n b) J_0(\omega_n)}{J_0^2(\omega_n b) - J_0^2(\omega_n)} \times \\
 &\quad \times [F(b, \rho; \omega_n) - \kappa F(1, \rho; \omega_n)] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-(\omega_n^2 + \alpha^2)\tau - i\alpha\zeta]}{\omega_n^2 + \alpha^2 + i\alpha w} \frac{d\alpha}{\alpha}.
 \end{aligned}$$

Obliczając całki występujące we wzorach (3.21) podobnie jak w [3] otrzymamy (rys. 4)

$$(3.22) \quad [\bar{\theta}_1(\rho, \tau)]_{l, m=0} = \frac{1}{2} \left[1 + (\kappa - 1) \frac{\lg \rho}{\lg b} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\omega_n b) J_0(\omega_n) \exp[-\omega_n^2 \tau]}{\omega_n [J_0^2(\omega_n b) - J_0^2(\omega_n)]} \times \\ \times [F(\rho, b; \omega_n) - \kappa F(\rho, 1; \omega_n)],$$



$$[\bar{\theta}_2(\rho, \zeta; \tau)]_{l, m=0} = -\frac{1}{2} \left[1 + (\kappa - 1) \frac{\lg \rho}{\lg b} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \times \\ \times \frac{\omega_n^2 J_0(\omega_n b) J_0(\omega_n)}{a_n \left(\omega_n^2 + \frac{w^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} [J_0^2(\omega_n b) - J_0^2(\omega_n)]} \times \\ \times [F(b, \rho; \omega_n) - \kappa F(1, \rho; \omega_n)] \times \\ \times \exp[a_n(\zeta - w\tau)], \quad \zeta - w\tau < 0;$$

Rys. 4. Wykres biegunów funkcji $[\hat{\theta}_2(\rho, \alpha, \tau)]_{l, m=0}$ w płaszczyźnie zespolonej α .

$$[\bar{\theta}_2(\rho, \zeta; \tau)]_{l, m=0} = \frac{1}{2} \left[1 + (\kappa - 1) \frac{\lg \rho}{\lg b} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^2 J_0(\omega_n b) J_0(\omega_n)}{a_{-n} \left(\omega_n^2 + \frac{w^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} [J_0^2(\omega_n b) - J_0^2(\omega_n)]} [F(b, \rho; \omega_n) - \\ - \kappa F(1, \rho; \omega_n)] \exp[a_{-n}(\zeta - w\tau)], \quad \zeta - w\tau > 0;$$

$$[\bar{\theta}_3(\rho, \zeta; \tau)]_{l, m=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n J_0(\omega_n b) J_0(\omega_n)}{J_0^2(\omega_n b) - J_0^2(\omega_n)} [F(b, \rho; \omega_n) - \\ - \kappa F(1, \rho; \omega_n)] \Re(\zeta, \tau; a_n, a_{-n}), \quad |\zeta| < \infty,$$

gdzie

$$(3.23) \quad \Re(\zeta, \tau; a_n, a_{-n}) = \frac{1}{\omega_n^2 + a_n^2} \exp[(-\omega_n^2 + a_n^2)\tau + a_n \zeta] \operatorname{erfc} \left(a_n \sqrt{\tau} + \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) - \\ - \frac{1}{\omega_n^2 + a_{-n}^2} \exp[(-\omega_n^2 + a_{-n}^2)\tau + a_{-n} \zeta] \operatorname{erfc} \left(-a_{-n} \sqrt{\tau} - \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) + \\ + \frac{1}{\omega_n^2} \exp[-\omega_n^2 \tau] \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right),$$

$$a_n = \left[\left(\omega_n^2 + \frac{w^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{w}{2} \right] > 0, \quad a_{-n} = - \left[\left(\omega_n^2 + \frac{w^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{w}{2} \right] < 0.$$

Porównując teraz grupę wzorów (3.18)–(3.19) z grupą (3.21) widzimy, że (3.18) i (3.21)₁ dają tożsamościowo identyczne wyniki, natomiast odpowiednie całkowanie pozostałych wyrazów drugiej grupy prowadzi do wzorów grupy pierwszej (por. [2]). Wykonując wspomniane całkowanie na grupie funkcji (3.22)_{2, 3, 4} otrzymamy

(3.24)

$$\begin{aligned}
 \bar{\theta}_1(\rho, \tau) &\equiv [\bar{\theta}_1(\rho, \tau)]_{l, m=0}, \\
 \bar{\theta}_2(\rho, \zeta; \tau) &= -\frac{1}{2} \left[1 + (\kappa - 1) \frac{\lg \rho}{\lg b} \right] + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^2 J_0(\omega_n b) J_0(\omega_n)}{a_n^2 \left(\omega_n^2 + \frac{w^2}{4} \right) [J_0^2(\omega_n b) - J_0^2(\omega_n)]} \left\{ \frac{1}{l} F(b, \rho; \omega_n) (\exp [a_n (\zeta - l - w\tau)] - \right. \\
 &\quad \left. - \exp [a_n (\zeta - w\tau)]) - \kappa \frac{1}{m} F(1, \rho; \omega_n) (\exp [a_n (\zeta - m - w\tau)] - \right. \\
 &\quad \left. - \exp [a_n (\zeta - w\tau)]) \right\} \quad \text{dla } \zeta - w\tau \leq 0; \\
 \bar{\theta}_2(\rho, \zeta; \tau) &= -\frac{1}{2} \left[1 + (\kappa - 1) \frac{\lg \rho}{\lg b} \right] + \frac{1}{l} \left[1 + \left(\kappa \frac{l}{m} - 1 \right) \frac{\lg \rho}{\lg b} \right] (\zeta - w\tau) - \\
 &\quad - 2w \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\omega_n b) J_0(\omega_n)}{\omega_n^2 [J_0^2(\omega_n b) - J_0^2(\omega_n)]} \left[\frac{1}{l} F(b, \rho; \omega_n) - \kappa \frac{1}{m} F(1, \rho; \omega_n) \right] + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^2 J_0(\omega_n b) J_0(\omega_n)}{\left(\omega_n^2 + \frac{w^2}{4} \right) [J_0^2(\omega_n b) - J_0^2(\omega_n)]} \left\{ \frac{1}{l} F(b, \rho; \omega_n) \left(\frac{1}{a_n^2} \exp [a_n (\zeta - l - w\tau)] - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{a_{-n}^2} \exp [a_{-n} (\zeta - w\tau)] \right) - \frac{1}{m} \kappa F(1, \rho; \omega_n) \left(\frac{1}{a_n^2} \exp [a_n (\zeta - m - w\tau)] - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{a_{-n}^2} \exp [a_{-n} (\zeta - w\tau)] \right) \right\} \quad \text{dla } 0 \leq \zeta - w\tau \leq m. \\
 \bar{\theta}_2(\rho, \zeta; \tau) &= -\frac{1}{2} \left[1 - (\kappa + 1) \frac{\lg \rho}{\lg b} \right] + \frac{1}{l} \left(1 - \frac{\lg \rho}{\lg b} \right) (\zeta - w\tau) - \\
 &\quad - \frac{1}{l} 2w \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\omega_n b) J_0(\omega_n)}{\omega_n^2 [J_0^2(\omega_n b) - J_0^2(\omega_n)]} F(b, \rho; \omega_n) + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^2 J_0(\omega_n b) J_0(\omega_n)}{\left(\omega_n^2 + \frac{w^2}{4} \right) [J_0^2(\omega_n b) - J_0^2(\omega_n)]} \left\{ \frac{1}{l} F(b, \rho; \omega_n) \times \right. \\
 &\quad \times \left(\frac{1}{a_n^2} \exp [a_n (\zeta - l - w\tau)] - \frac{1}{a_{-n}^2} \exp [a_{-n} (\zeta - w\tau)] \right) - \\
 &\quad \left. - \kappa \frac{1}{ma_{-n}^2} F(1, \rho; \omega_n) (\exp [a_{-n} (\zeta - m - w\tau)] - \exp [a_{-n} (\zeta - w\tau)]) \right\} \\
 &\quad \text{dla } m \leq \zeta - wp \leq l;
 \end{aligned}$$

$$\bar{\theta}_2(\rho, \zeta; \tau) = \frac{1}{2} \left[1 + (\kappa - 1) \frac{\lg \rho}{\lg b} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^2 J_0(\omega_n b) J_0(\omega_n)}{a_{-n}^2 \left(\omega_n^2 + \frac{w^2}{4} \right) [J_0^2(\omega_n b) - J_0^2(\omega_n)]} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{l} F(b, \rho; \omega_n) (\exp [a_{-n}(\zeta - l - w\tau)] - \exp [a_{-n}(\zeta - w\tau)]) - \right.$$

$$\left. - \kappa \frac{1}{m} F(1, \rho; \omega_n) (\exp [a_{-n}(\zeta - m - w\tau)] - \exp [a_{-n}(\zeta - w\tau)]) \right\}$$

dla $\zeta - w\tau > l$.

W powyższych rozważaniach założono $l > m$. Otrzymamy w dalszym ciągu

$$(3.25) \quad \bar{\theta}_3(\rho, \zeta; \tau) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^2 J_0(\omega_n b) J_0(\omega_n)}{J_0^2(\omega_n b) - J_0^2(\omega_n)} \exp [-\omega_n^2 \tau] \times$$

$$\times \left[\frac{1}{l} F(b, \rho; \omega_n) \mathfrak{M}(\zeta, \tau; a_n, a_{-n}; l) - \kappa \frac{1}{m} F(1, \rho; \omega_n) \mathfrak{M}(\zeta, \tau; a_n, a_{-n}; m) \right]$$

dla $|\zeta| < \infty$,

gdzie

$$(3.26) \quad \mathfrak{M}(\zeta, \tau; a_n, a_{-n}; l) = \frac{1}{2a_n^2 \left(\omega_n^2 + \frac{w^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}}} \left(\exp [a_n^2 \tau + a_n(\zeta - l)] \times \right.$$

$$\times \operatorname{erfc} \left(a_n \sqrt{\tau} + \frac{\zeta - l}{2\sqrt{\tau}} \right) - \exp [a_n^2 \tau + a_n \zeta] \operatorname{erfc} \left(a_n \sqrt{\tau} + \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) \Big) +$$

$$+ \frac{1}{2a_{-n}^2 \left(\omega_n^2 + \frac{w^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}}} \left(\exp [a_{-n}^2 \tau + a_{-n}(\zeta - l)] \operatorname{erfc} \left(-a_{-n} \sqrt{\tau} - \frac{\zeta - l}{2\sqrt{\tau}} \right) - \right.$$

$$\left. - \exp [a_{-n}^2 \tau + a_{-n} \zeta] \operatorname{erfc} \left(-a_{-n} \sqrt{\tau} - \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) \right) +$$

$$+ \frac{2\sqrt{\tau}}{\omega_n^2 \sqrt{\pi}} \left(\exp \left[-\left(\frac{\zeta - l}{2\sqrt{\tau}} \right)^2 \right] - \exp \left[-\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right)^2 \right] \right) - \frac{\zeta - l}{\omega_n^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\zeta - l}{2\sqrt{\tau}} \right) +$$

$$+ \frac{\zeta}{\omega_n^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) - \frac{w}{\omega_n^4} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{\zeta - l}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) \right] - \frac{l}{\omega_n^2}$$

Wzory (3.24) do (3.26) przedstawiają rozwiązanie problemu przewodnictwa ciepła, sformułowanego na początku pracy. Otrzymane rozwiązanie obejmuje przypadek ruchomego ogrzania rury wg funkcji Heaviside'a, jak również przypadek zerowej prędkości brzegowego pola temperatury.

Przedstawiona metoda rozwiązania może być też zastosowana dla otrzymania temperatury wewnątrz rury, gdy jej jedna powierzchnia jest ogrzana do stałej temperatury, druga zaś jest poddana ruchomemu ogrzaniu typu skarpy.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. KÖNIGER, W. LIEBMAN, *Untersuchungen über die Haltbarkeit von Schleudergusskokillen aus Stahl*, Stahl und Eisen, 23, 12, 1730-1742, 1959.
2. T. ROŻNOWSKI, *Pewien przypadek niestabilnego rozkładu temperatury w długim walcu*, Rozpr. Inżyn., 13, 2, 1965.
3. T. ROŻNOWSKI, *Non-steady state of temperature in a long cylinder with moving boundary condition*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. tech., 13, 45, 1965.
4. I. N. SNEDDON, *Fourier transforms*, McGraw-Hill Book Company, INC. 1951.

Резюме

NESTACJONARNE TCZENIE TEPIA W TOLSTOJ TRUBIE,
 NAGRĘTOJ PODWIZNYM TEMPERATURNYM POLEM

В работе решается нестационарная задача распределения температуры, в длинном выдолбленном цилиндре внезапно нагретом на боковой поверхности и внутри подвижным температурным полем, изменяющимся согласно контуру откоса. В рассуждениях принято классическое уравнение тепла с постоянными коэффициентами, начальные и краевые условия (2.2).

Определяется функция температуры в зависимости от положения и времени, учитывая характеристикой интервала переменности температуры вдоль оси трубы. Полученные результаты имеют форму бесконечных рядов функции Бесселя и функции погрешности.

Исследуются граничные случаи, когда термическая нагрузка стремится к ступенчатой функции и когда скорость нагрева краям очень мала.

SUMMARY

NON-STEADY HEAT CONDUCTION IN A LONG HOLLOW CYLINDER
 UNDER A MOVING TEMPERATURE FIELD

A solution is given to the nonsteady problem of temperature in a long hollow cylinder suddenly heated by a moving ramp type temperature along its inner and outer boundary. The classical heat equation with constant coefficients subject to the initial and boundary conditions (2.2) is assumed as a point of departure. The solution is obtained in the form of infinite series involving both Bessel functions and error functions.

Limiting cases are discussed when (i) the thermal load tends to a step function and (ii) the velocity of the boundary temperature goes to zero.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
 POLSKIEJ AKADEMII NAUK
 POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 grudnia 1970 r.