

LEPKOPLASTYCZNE PŁYNIĘCIE POWŁOKI WALCOWEJ PRZY WARUNKU PLASTYCZNOŚCI HUBERA-MISESA

ANNA P A B J A N E K (WARSZAWA)

1. WSTĘP

W pracy rozważa się quasi-statyczne płynięcie obrotowo-symetrycznej powłoki walcowej, obciążonej ciśnieniem rozłożonym równomiernie wzdłuż długości powłoki. Przyjęto, że materiał powłoki jest sztywno-lepkoplastyczny i zastosowane prawo płynięcia opiera się na warunku plastyczności Hubera-Misesa.

Uwzględnienie wrażliwości materiału na prędkość odkształcenia jest bardzo istotne w procesach dynamicznych. Zagadnieniem tym zajmowało się wielu autorów [3, 4, 7, 9 i 10].

Wpływ prędkości odkształcenia na chwilową i końcową reakcję równomiernie rozciąganego pierścienia i długiej powłoki walcowej przeanalizowano w pracy [3]. Zagadnienie sprowadzono do jednowymiarowego problemu dla materiału sprężysto-plastycznego z liniową zależnością dynamicznej granicy plastyczności od prędkości odkształcenia. Rozwiązanie podobnego problemu dla powłoki sferycznej dla tego samego typu obciążenia i materiału uzyskano w pracy [4].

W [1] podano ogólną metodę numeryczną (tzw. metodę elementów skończonych) rozwiązywania dynamicznych problemów dla belek, płyt, pierścieni i powłok, uwzględniającą różne modele materiału. Zamieszczone jednocześnie wyniki doświadczalne wskazują na konieczność uwzględnienia lepkich własności materiałów rozpatrywanych konstrukcji.

Problem lepkoplastycznego płynięcia płyt przy warunku plastyczności Hubera-Misesa przedstawiono w pracy [9].

Dotychczasowe rozważania problemów brzegowych dla powłok z materiałów sztywno-idealnie plastycznego i sztywno-lepkoplastycznego, poddanych obciążeniom ciągłym, ograniczały się do odcinkowo liniowych warunków plastyczności. Prowadziło to w niektórych przypadkach do uproszczenia statycznej bądź dynamicznej analizy zagadnień, pozwalając na uzyskiwanie zamkniętych rozwiązań. Z drugiej jednak strony występowała konieczność rozpatrywania szeregu obszarów, w których obowiązywały różne układy równań. Prowadziło to do nieciągłych pól prędkości i utrudniało rozwiązanie wielu problemów dynamicznych (np. przy zamocowanych brzegach konstrukcji).

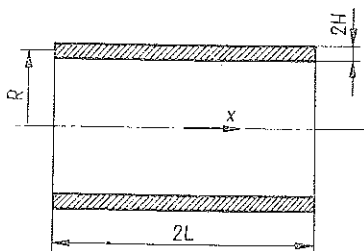
Celem niniejszej pracy jest otrzymanie rozwiązania problemu lepkoplastycznego płynięcia powłoki dla gładkiego warunku plastyczności. Dzięki przyjęciu prawa

plynięcia opartego na warunku plastyczności Hubera-Misesa uzyskuje się jeden podstawowy układ równań różniczkowych, opisujących problem, spełniony dla wszystkich kombinacji występujących parametrów.

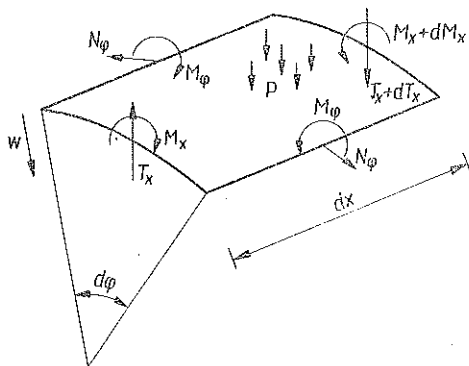
Dalszym celem pracy jest zbadanie wpływu geometrii powłoki na charakter i wielkość prędkości ugięcia i sił wewnętrznych oraz przedyskutowanie możliwości różnych aproksymacji związków konstytutywnych dla lepkoplastycznej powłoki cylindrycznej.

2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA I RÓWNANIA PROBLEMU

Rozpatrzmy powłokę walcową kołową z materiału sztywno-lepkoplastycznego, obciążoną równomiernie rozłożonym ciśnieniem zewnętrznym P (rys. 1). Przy założeniu osiowej symetrii zagadnienia i wobec braku innych obciążeń zewnętrznych jedynymi uogólnionymi naprężeniami występującymi w rozpatrywanej powłoce są: M_x — moment zginający wzdłuż tworzącej walca i N_φ — siła normalna obwodowa. Odpowiadającymi tym siłom wewnętrznym prędkościami uogólnionych odkształceń są: $\dot{\kappa}_x$ — prędkość krzywizny podłużnej i $\dot{\lambda}_\varphi$ — prędkość wydłużenia obwodowego powierzchni środkowej powłoki. Siła poprzeczna T_x nie jest uogólnionym naprężeniem, gdyż pomija się odkształcenia ścinania.



Rys. 1



Rys. 2

Jeśli przyłożone do powierzchni powłoki ciśnienie P wzrasta monotonicznie w czasie od zera, powłoka nie odkształca się, dopóki P nie osiągnie wartości P_0 , zwanej nośnością graniczną danej powłoki. Następnie, dla stałych już w czasie obciążeń $P > P_0$, prędkość deformacji zależy od różnicy pomiędzy aktualnym stanem naprężenia i stanem statycznie uplastyczniającym (tzn. stanem powstającym w powłoce pod wpływem obciążenia $P = P_0$). Przy pominięciu sił bezwładności, w powłoce ustala się wtedy quasi-statyczny stan równowagi. Takim właśnie procesem lepkoplastycznego pływnięcia powłoki pod obciążeniem większym od jej nośności granicznej zajmujemy się w tej pracy.

Siły działające na element powłoki przedstawione są na rys. 2. Odległość X mierzona jest wzdłuż tworzącej od brzołu powłoki; W jest przemieszczeniem radialnym

skierowanym do środka walca. Dzięki symetrii zadania wystarczy rozpatrywać połowę powłoki: $0 \leq X \leq L$.

Cała analiza będzie prowadzona w ramach założeń teorii cienkich powłok. Zakładamy, że odkształcenia są małe. Wielkości $\dot{\kappa}_x$ oraz $\dot{\lambda}_\varphi$ określone są wzorami

$$(2.1) \quad \dot{\kappa}_x = -\frac{\partial^2 \dot{W}}{\partial X^2}, \quad \dot{\lambda}_\varphi = -\frac{\dot{W}}{R},$$

gdzie kropka oznacza różniczkowanie względem czasu.

Jeśli pominiemy siły bezwładności, to równania równowagi dla powłoki walcowej kołowej mają postać

$$(2.2) \quad \frac{1}{2c^2} \frac{dt}{dx} + n + p = 0, \quad \frac{dm}{dx} = t,$$

gdzie bezwymiarowe wielkości zdefiniowane są w sposób następujący:

$$(2.3) \quad x = \frac{X}{L}, \quad m = \frac{M_x}{M_0}, \quad n = \frac{N_\varphi}{N_0}, \\ c^2 = \frac{L^2}{RH}, \quad t = \frac{L}{M_0} T_x, \quad p = \frac{PR}{N_0},$$

przy czym $M_0 = \sigma_0 H^2$, $N_0 = 2\sigma_0 H$, a σ_0 jest granicą plastyczności materiału przy rozciąganiu.

Zakładamy, że materiał powłoki może być opisany równaniami konstytutywnymi dla materiału sztywno-plastycznego, wrażliwego na prędkość odkształcenia [8]:

$$(2.4) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \gamma_0 \Phi(F) \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}},$$

gdzie $\dot{\varepsilon}_{ij}$ jest tensorem prędkości odkształcenia, γ_0 jest stałą lepkości materiału, $\Phi(F)$ jest ogólnie nieliniową funkcją argumentu $F = \sqrt{J_2}/k - 1$, σ_{ij} tensorem naprężenia; J_2 oznacza drugi niezmiennik dewiatora naprężenia i k granicę plastyczności przy czystym ścinaniu.

Jako szczególną postać przyjmujemy funkcję potęgową $\Phi(F) = F^\delta$, gdzie δ jest liczbą naturalną.

W płaskim stanie naprężenia związki (2.4) dają dwa niezależne równania (1):

$$(2.5) \quad \dot{\varepsilon}_x = \bar{\gamma} \left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \right)^\delta \frac{2\sigma_x - \sigma_\varphi}{\sqrt{J_2}}, \quad \dot{\varepsilon}_\varphi = \bar{\gamma} \left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \right)^\delta \frac{2\sigma_\varphi - \sigma_x}{\sqrt{J_2}},$$

gdzie

$$\sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{1}{3} (\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_\varphi + \sigma_\varphi^2)}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{3} = \frac{\gamma_0}{6k}.$$

(1) W płaskim stanie naprężenia występuje jeszcze $\dot{\varepsilon}_z$, ale nie jest to prędkość uogólnionego odkształcenia, nie występuje więc w dalszej części pracy i dlatego nie podano tutaj wzoru $\dot{\varepsilon}_z = -(\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_\varphi)$ (który jest warunkiem nieściśliwości materiału powłoki).

W przypadku powłok interesują nas nie same naprężenia i prędkości odkształceń, ale wielkości uogólnionych naprężeń i prędkości uogólnionych odkształceń; dlatego należy dokonać transformacji równań konstytutywnych (2.5) do przestrzeni wielkości uogólnionych. Transformację tę przedstawiono w pracy [6]. Wykorzystamy tutaj wyprowadzone w [6] wzory określające prędkości uogólnionych odkształceń i uogólnione naprężenia w powłoce walcowej z materiału lepkoplastycznego w zależności od dwóch parametrów q i v_1 ; q służy do parametryzacji powierzchni płynięcia, v_1 jest parametrem wielkości wektora prędkości odkształcenia. W przypadku $\delta=1$ wzory te zawierają proste funkcje elementarne parametrów q i v_1 .

W dalszym ciągu rozważać będziemy przypadek $\delta=1$, dla którego w pracy [6] otrzymano następujące wzory:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} n &= \pm \frac{1}{2} \operatorname{ctg} q \ln \frac{1+\sin q}{1-\sin q} \pm \frac{\sqrt{3}}{\gamma} v_1 \operatorname{ctg} q, \\ m &= \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{ctg}^2 q \ln \frac{1+\sin q}{1-\sin q} - \frac{2}{\sin q} \right) \mp \frac{4v_1}{3\gamma}, \\ \lambda &= \pm 2v_1 \operatorname{ctg} q, \quad \dot{\kappa}_x = \mp \frac{\sqrt{3}}{2} v_1, \end{aligned}$$

gdzie

$$-\pi/2 \leq q \leq \pi/2, \quad 0 \leq v_1 < \infty.$$

Wprowadźmy jeszcze dalsze wielkości bezwymiarowe i podstawienia:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} w &= \frac{W}{R}, & v &= \frac{v_1}{\gamma}, \\ \dot{w} &= v_1, & v &= \frac{v_1}{\gamma}, \\ \frac{dv_1}{dx} &= u_1, & u &= \frac{u_1}{\gamma}. \end{aligned}$$

Wykorzystując (2.7), ze związków (2.1), (2.2), (2.6) otrzymamy podstawowy układ równań opisujący problem quasi-statycznego płynięcia lepkoplastycznej powłoki walcowej:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} n &= \pm \frac{1}{2} \operatorname{ctg} q \ln \frac{1+\sin q}{1-\sin q} \pm \sqrt{3} v \operatorname{ctg} q, \\ m &= \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{ctg}^2 q \ln \frac{1+\sin q}{1-\sin q} - \frac{2}{\sin q} \right) \mp \frac{4v}{3}, \\ m' &= t, \quad t' = -2c^2(n+p), \quad v = \pm 2v \operatorname{ctg} q, \quad v' = u, \quad u' = \mp \sqrt{3} v c^2, \end{aligned}$$

gdzie $()' = d()/dx$.

Bardzo dobrą aproksymacją związków płynięcia (2.6) są funkcje (4.18) i (4.19) zaproponowane w pracy [6]:

$$m = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sin q \pm \frac{4}{3} v, \quad n = \mp \cos q \mp \sqrt{3} v \operatorname{ctg} q,$$

które łącznie z (2.1), (2.2), (2.6)—(2.7)₃ tworzą układ

$$(2.9) \quad n = \mp \cos q \mp \sqrt{3} v \operatorname{ctg} q, \quad m = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sin q \pm \frac{4}{3} v, \quad m' = t, \\ t' = -2c^2(n+p), \quad v = \pm 2v \operatorname{ctg} q, \quad v' = u, \quad u' = \mp \sqrt{3} c^2 v.$$

Opierając się na warunkach plastyczności Treski, BYKOWCEW [2] wyprowadził dla lepkoplastycznej powłoki wzory odpowiadające zależnościom (2.6). Prawo płynięcia uzyskane w [2] w różnych obszarach powłoki opisane jest różnymi formułami; w szczególności normalna do aktualnej powierzchni płynięcia (wektor prędkości odkształcenia) w pewnych punktach może być nieciągła, co oznacza, że krzywa prędkości ugięcia nie zmienia się gładko wzdłuż długości powłoki.

Należy zaznaczyć, że w przypadku warunku plastyczności Hubera-Misesa [na podstawie którego został wyprowadzony wzór (2.6)] mamy do czynienia tylko z jednym układem równań opisującym płynięcie całej powłoki.

3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU MATEMATYCZNEGO

Rozważmy powłokę walcową swobodnie podpartą na obu brzegach, dla której warunki brzegowe mają postać

$$(3.1) \quad m(0)=0, \quad v(0)=0; \quad m'(1)=0, \quad v'(1)=0.$$

Ponieważ (3.1) muszą być spełnione niezależnie od rodzaju materiału powłoki [wzory (2.8)_{2,5} i (2.9)_{2,5}], to otrzymujemy z (3.1)_{1,2} równoważne warunki

$$(3.2) \quad v(0)=0, \quad q(0)=0,$$

przy czym $v(0) \operatorname{ctg} q(0)=0$.

Oba układy (2.8) i (2.9) zawierają równania algebraiczne i różniczkowe. Można je sprowadzić do układów samych równań różniczkowych, które będą wygodniejsze do numerycznego całkowania [przy określonych warunkach brzegowych (3.1)₃, (3.1)₄ i (3.2)].

Przekształcając układ (2.8) otrzymujemy

$$(3.3) \quad q' = \frac{2u \sin^2 q - 3/2 t \cos q \sin q}{\sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 q \left(2 \sin q - \ln \frac{1 + \sin q}{1 - \sin q} \right) - 2v}, \\ v' = \frac{2uv \operatorname{tg} q - 3/2 tv}{\sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 q \left(2 \sin q - \ln \frac{1 + \sin q}{1 - \sin q} \right) - 2v} + u \operatorname{tg} q, \\ t' = c^2 \left(\operatorname{ctg} q \ln \frac{1 + \sin q}{1 - \sin q} + 2\sqrt{3} v \operatorname{ctg} q - 2p \right), \\ u' = -\frac{\sqrt{3}}{2} c^2 v.$$

Podobnie układ (2.9) po przekształceniu przyjmuje postać

$$(3.4) \quad \begin{aligned} q' &= \frac{\frac{3}{2} t \cos q \sin q - 2u \sin^2 q}{\sqrt{3} \cos^2 q \sin q + 2v}, \\ v' &= \frac{\sqrt{3} u \sin^2 q \cos q + \frac{3}{2} tv}{\sqrt{3} \cos^2 q \sin q + 2v}, \\ t' &= 2c^2 (\sqrt{3} v \operatorname{ctg} q + \cos q - p), \\ u' &= -\frac{\sqrt{3}}{2} c^2 v. \end{aligned}$$

Oba układy (3.3) i (3.4) przedstawione w postaci normalnej są nieliniowymi układami równań różniczkowych zwyczajnych, które łącznie z warunkami brzegowymi można rozwiązać na drodze numerycznej. Dla $x=0$ w prawych stronach wymienionych układów występują nieoznaczoności, które można określić wykorzystując regułę de l'Hospitala:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} q'(0) &= \frac{\sqrt{3}}{2} t(0), & u'(0) &= 0, \\ v'(0) &= 0, & t'(0) &= -2c^2(1-p). \end{aligned}$$

Aby rozwiązać numerycznie oba powyższe zagadnienia, należy przyjąć konkretne wielkości parametrów p i c^2 .

Zauważmy, że dla powłoki nieskończenie długiej (w której realizuje się błonowy stan naprężenia), tzn. dla $c^2 \rightarrow \infty$, wprost ze związków (2.8) lub (2.9) otrzymujemy rozwiązanie zagadnienia:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} q(x) &= 0, & n(x) &= -p, & v(x) &= \frac{2}{\sqrt{3}}(p-1), \\ v(x) &= 0, & t(x) &= 0, & u(x) &= 0. \end{aligned}$$

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla następujących wartości p ($p > 1$)⁽²⁾ i c^2 ⁽³⁾:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} p &= 1,5, & p &= 2,0, & p &= 3,0; \\ c^2 &= 1,5, & c^2 &= 12,8, & c^2 &= 51,2 \end{aligned}$$

(co odpowiada np. powłokom, dla których $R/H=80$, przy czym $L/R=0,15$; $L/R=0,4$; $L/R=0,8$).

Stała lepkości materiału γ nie występuje *explicite* w danych do obliczeń dzięki podstawieniom (2.7).

⁽²⁾ Wg Hodge'a [5] nośność graniczna rozpatrywanej powłoki dla warunku plastyczności Treski wynosi $p^* \approx 1$

⁽³⁾ Wg klasyfikacji Hodge'a powłoki, dla których $c \geq \pi/2$, nazywane są długimi, natomiast gdy $c < \pi/2$, mamy do czynienia z powłokami krótkimi (taki podział wynika z przyjęcia dla materiału powłoki warunku plastyczności Treski).

4. METODA NUMERYCZNEGO ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA

Rozwiązanie zagadnienia różniczkowego nieliniowego z dwupunktowymi warunkami brzegowymi należy do stosunkowo trudnych zadań numerycznych. Zapiszmy układy (3.3) i (3.4) w postaci

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \frac{dq}{dx} &= f_1(q(x), v(x), t(x), u(x)), & \frac{dv}{dx} &= f_2(q(x), v(x), t(x), u(x)), \\ \frac{dt}{dx} &= f_3(q(x), v(x)), & \frac{du}{dx} &= f_4(v(x)). \end{aligned}$$

Rozwiązania powyższego układu szukamy w przedziale $0 \leq x \leq 1$ dla warunków początkowych

$$(4.2) \quad \begin{aligned} q(0) &= 0, & t(1) &= 0, \\ v(0) &= 0, & u(1) &= 0, \\ v(0) \operatorname{ctg} q(0) &= 0. \end{aligned}$$

Znając rozwiązanie powyższego zagadnienia wyznaczmy v oraz z algebraicznych zależności określmy n i m . Układ (4.1) całkować będziemy dwukrotnie: najpierw dla ścisłych prawych stron [wzory (3.3)], a następnie dla ich aproksymacji [podanej wzorami (3.4)].

Sprowadzimy dwupunktowe zagadnienie brzegowe do zagadnienia jednopunktowego, które będzie można bezpośrednio scałkować metodą Rungego-Kutta. Wykorzystamy w tym celu metodę Newtona rozwiązywania układu równań algebraicznych danych w postaci uwikłanej.

Założmy, że

$$(4.3) \quad \varphi(\xi, \zeta) = t(1), \quad \psi(\xi, \zeta) = u(1),$$

gdzie $t(0) = \xi$, $u(0) = \zeta$.

Należy znaleźć takie wartości ξ i ζ , że

$$(4.4) \quad \varphi(\xi, \zeta) = 0, \quad \psi(\xi, \zeta) = 0.$$

Rozwiązanie ostateczne znajdziemy rozwiązując zagadnienie początkowe dla układu (4.1) z warunkami początkowymi:

$$(4.5) \quad q(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad t(0) = \xi, \quad u(0) = \zeta$$

[przy czym $v(0) \operatorname{ctg} q(0) = 0$], gdzie ξ i ζ są rozwiązaniami układu równań (4.4).

Układ (4.4) rozwiązujemy iteracyjnie. Rozpoczynając od wybranych wartości $\xi_0, \zeta_0, \xi_1, \zeta_1$, określamy proces iteracyjny w sposób następujący:

$$(4.6) \quad \begin{bmatrix} \frac{\varphi(\xi_{n-1}, \zeta_n) - \varphi(\xi_n, \zeta_n)}{\xi_{n-1} - \xi_n} & \frac{\varphi(\xi_n, \zeta_{n-1}) - \varphi(\xi_n, \zeta_n)}{\zeta_{n-1} - \zeta_n} \\ \frac{\psi(\xi_{n-1}, \zeta_n) - \psi(\xi_n, \zeta_n)}{\xi_{n-1} - \xi_n} & \frac{\psi(\xi_n, \zeta_{n-1}) - \psi(\xi_n, \zeta_n)}{\zeta_{n-1} - \zeta_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{n+1} - \xi_n \\ \zeta_{n+1} - \zeta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi(\xi_n, \zeta_n) \\ \psi(\xi_n, \zeta_n) \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Z układu równań algebraicznych liniowych (4.6), mając $\xi_{n-1}, \zeta_{n-1}, \xi_n, \zeta_n$, określamy ξ_{n+1}, ζ_{n+1} , $n=1, 2, \dots$. Tworzenie ciągu ξ_n, ζ_n przerywamy, gdy $\varphi(\xi_n, \zeta_n)$ i $\psi(\xi_n, \zeta_n)$ są dostatecznie małe.

Rozważany układ równań różniczkowych (4.1) łącznie z (3.5) przedstawić można w postaci

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \frac{dq}{dx} &= \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \xi, & \text{jeśli } x=0, \\ f_1(q, v, t, u), & \text{jeśli } x>0; \end{cases} \\ \frac{dv}{dx} &= \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x=0, \\ f_2(q, v, t, u), & \text{jeśli } x>0; \end{cases} \\ \frac{dt}{dx} &= \begin{cases} 2c^2(1-p), & \text{jeśli } x=0, \\ f_3(q, v), & \text{jeśli } x>0; \end{cases} \\ \frac{du}{dx} &= \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x=0, \\ f_4(v), & \text{jeśli } x>0. \end{cases} \end{aligned}$$

Wartości funkcji $\varphi(\xi, \zeta)=t(1)$ i $\psi(\xi, \zeta)=u(1)$ obliczamy, rozwiązując powyższy układ dla warunków początkowych:

$$(4.8) \quad q(0)=0, \quad v(0)=0, \quad t(0)=\xi, \quad u(0)=\zeta$$

[wartości funkcji q, v, t, u należy rejestrować dla całego przedziału tylko w rozwiązaniu ostatecznym; w pozostałych przypadkach wystarczy znać $t(1)$ i $u(1)$].

Dla określenia układu (4.6) potrzebne są dla każdego $n=1, 2, \dots$ wartości funkcji φ i ψ :

$$(4.9) \quad \begin{aligned} &\varphi(\xi_n, \zeta_n), \quad \psi(\xi_n, \zeta_n), \\ &\varphi(\xi_{n-1}, \zeta_n), \quad \psi(\xi_{n-1}, \zeta_n); \\ &\varphi(\xi_n, \zeta_{n-1}), \quad \psi(\xi_n, \zeta_{n-1}). \end{aligned}$$

Potrzebne wartości znajdujemy całkując układ (4.7) z następującymi warunkami początkowymi:

dla wartości (4.9)₁

$$q(0)=0, \quad v(0)=0, \quad t(0)=\xi_n, \quad u(0)=\zeta_n;$$

dla wartości (4.9)₂

$$q(0)=0, \quad v(0)=0, \quad t(0)=\xi_{n-1}, \quad u(0)=\zeta_n;$$

dla wartości (4.9)₃

$$q(0)=0, \quad v(0)=0, \quad t(0)=\xi_n, \quad u(0)=\zeta_{n-1}.$$

Zatem na każdym kroku iteracji (4.6) układ (4.7) należy rozwiązywać trzy razy [proces (4.6) powinien dawać zbieżność zbliżoną do kwadratowej].

Obliczenia numeryczne wykonano na maszynie elektronicznej GIER. Zagadnienia początkowe (4.7) i (4.8) całkowano metodą Rungego-Kutta rzędu czwartego ze zmiennym krokiem całkowania dobieranym tak, aby zapewniona była dokładność, z jaką liczy procedura RKRZ4-MERSN. Dla rozwiązania układu algebraicznego (4.6) wykorzystano procedurę DET-GAUSS. Wyniki obliczeń numerycznych dane w postaci wykresów 3-12 omówione są w p. 6.

W trakcie obliczeń numerycznych zauważono, że szybkość zbieżności malała ze wzrostem parametru geometrycznego c^2 . Dla $c^2 > 51,2$ zastosowany proces iteracyjny (4.6) nie był zbieżny, dlatego dla większych wartości c^2 nie podano tutaj wyników.

5. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA ZE ZLINEARYZOWANYMI ZWIĄZKAMI KONSTITUTYWNYMI

W pracy [10] zaproponowano następującą linearyzację funkcji płynięcia dla obrotowo-symetrycznych lepkoplastycznych powłok:

$$(5.1) \quad m - m^* = \frac{4}{3} \frac{Hk}{\gamma\sigma_0} \dot{\kappa}_x, \quad n - n^* = \frac{3}{2} \frac{k}{\gamma\sigma_0} \dot{\lambda}_\varphi,$$

gdzie m^* i n^* spełniają statyczny warunek plastyczności i są w równowadze statycznej z ciśnieniem p^* .

Z powyższych wzorów, równań równowagi (2.2) oraz równań równowagi dla stanu m^* , n^* i p^* uzyskujemy równanie opisujące quasi-statyczne płynięcie rozpatrywanej powłoki walcowej dla zlinearyzowanych związków konstytutywnych

$$(5.2) \quad v^{IV} + av = b(p - p^*),$$

gdzie p^* jest bezwymiarową nośnością graniczną powłoki walcowej, natomiast stałe współczynniki a i b mają wartości następujące:

$$(5.3) \quad a = \frac{9}{4} c^4, \quad b = \frac{3}{2} c^4 \gamma_0 \sigma_0.$$

Rozwiązanie równania (5.2) ma postać

$$(5.4) \quad v = \frac{4\sqrt{3}}{3} (p - p^*) (C_1 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - C_2 \operatorname{ch} x \sin x - \operatorname{ch} x \cos x + 1),$$

gdzie stałe C_1 i C_2 , wyznaczone z warunków brzegowych

$$(5.5) \quad v'(1) = 0, \quad v'''(1) = 0,$$

wynoszą

$$(5.6) \quad C_1 = \frac{\operatorname{ch} 1 \operatorname{sh} 1}{\operatorname{sh}^2 1 + \cos^2 1}, \quad C_2 = \frac{\cos 1 \sin 1}{\operatorname{sh}^2 1 + \cos^2 1}.$$

Mając v z formuł (5.1), (2.1) i (2.2)₂ otrzymujemy wzory na siły wewnętrzne w powłoce:

$$(5.7) \quad n = -[-n^* + 2(p-p^*)(C_1 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - C_2 \operatorname{ch} x \sin x - \operatorname{ch} x \cos x + 1)],$$

$$(5.8) \quad m = m^* - \frac{32}{9c^2} (p-p^*) \left(\operatorname{sh} x \sin x - \frac{\cos 1 \sin 1 \operatorname{sh} x \cos x + \operatorname{ch} 1 \operatorname{sh} 1 \operatorname{ch} x \sin x}{\operatorname{sh}^2 1 + \cos^2 1} \right),$$

$$(5.9) \quad t = t^* - \frac{32(p-p^*)}{9c^2} \left[\operatorname{ch} x \sin x + \cos x \operatorname{sh} x - \frac{(\operatorname{ch} 1 \operatorname{sh} 1 + \cos 1 \sin 1) \operatorname{ch} x \cos x}{\operatorname{sh}^2 1 + \cos^2 1} + \frac{(\operatorname{ch} 1 \operatorname{sh} 1 - \cos 1 \sin 1) \sin x \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}^2 1 + \cos^2 1} \right].$$

Zauważmy, że rozwiązanie zależy tutaj od wielkości p^* , n^* , m^* i t^* znanych z odpowiedniego rozwiązania problemu nośności granicznej powłoki z materiału sztywno-idealnie plastycznego. Wielkości te (w postaci analitycznej) znane są w literaturze tylko dla pewnych aproksymacji krzywej granicznej, wyprowadzonej przy warunku plastyczności Treski. Na przykład HODGE [5] podaje rozwiązanie przybliżone, w którym krzywa graniczna aproksymowana jest kwadratem. Rozwiązanie to ma postać:

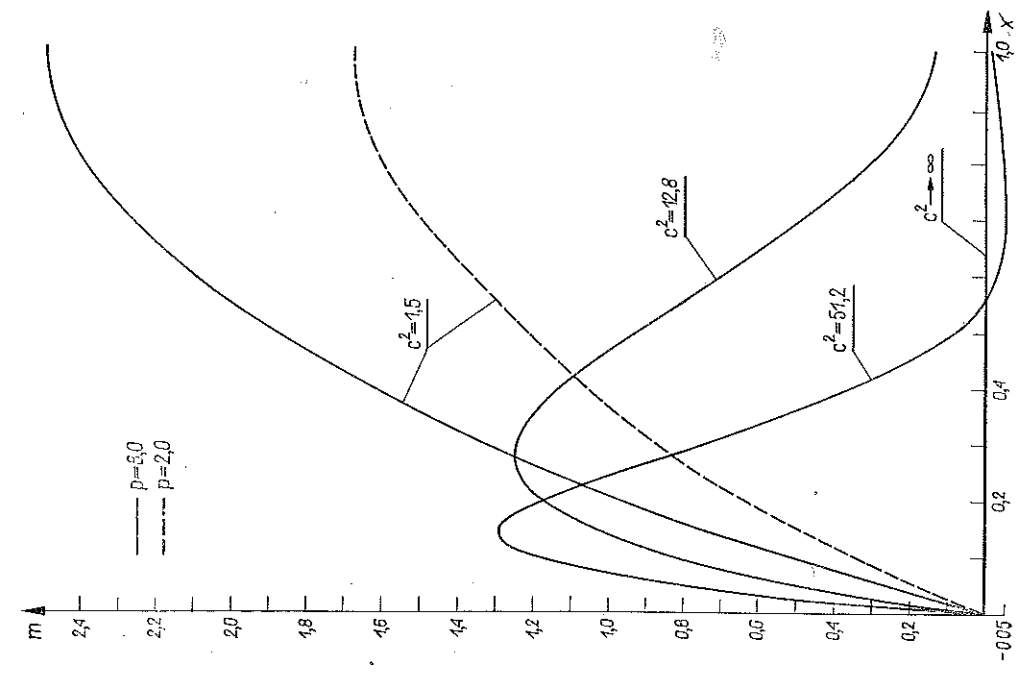
$$(5.10) \quad \begin{aligned} p^* &= 1 + \frac{1}{c^2}, & m^* &= 1 - (1-x)^2, \\ n^* &= -1, & t^* &= 2(1-x). \end{aligned}$$

6. Dyskusja i porównanie uzyskanych rozwiązań

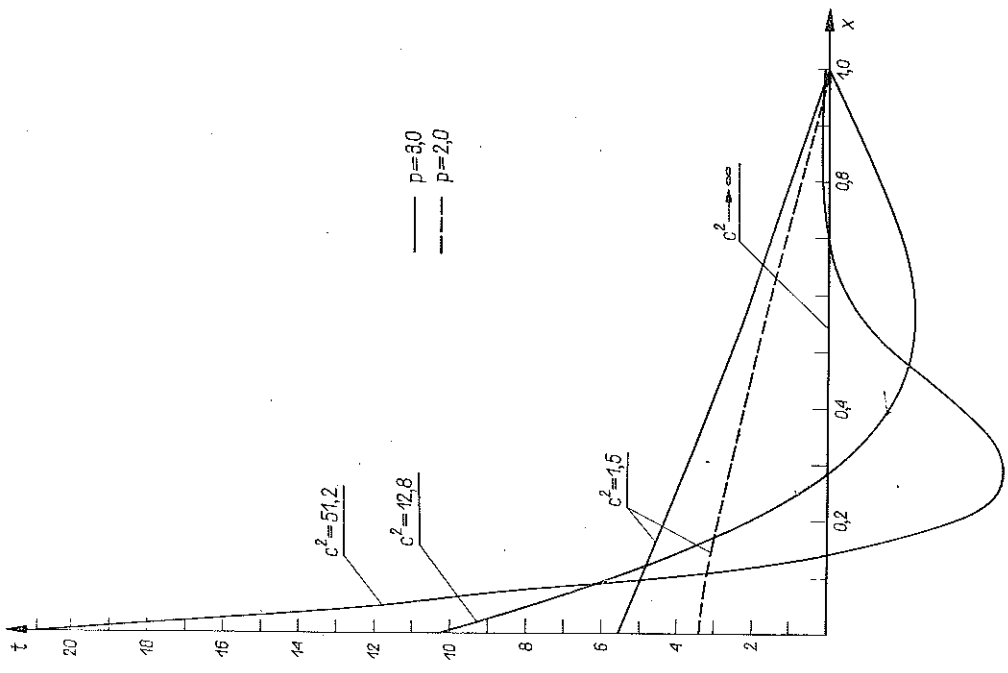
Wyniki obliczeń numerycznych dla dwóch zmieniających się parametrów p i c^2 przedstawiono na rys. 3-12.

Rysunki 3-7 ilustrują rozwiązanie zagadnienia dla powłoki sandwiczowej [układ (3.4)]. Wskazują one na wyraźną zależność profilu prędkości ugięcia i sił wewnętrznych od parametru geometrycznego powłoki c^2 . W powłoce krótkiej ($c^2=1,5$) realizuje się stan momentowy, przy czym większemu obciążeniu odpowiadają większe wartości sił wewnętrznych i prędkości ugięcia powłoki. Ze wzrostem długości powłoki (tzn. dla większych c^2) moment zginający m maleje w kierunku środka powłoki, pozostając właściwie efektem brzegowym. Dla powłoki nieskończenie długiej wykres momentów pokrywa się z osią x , co oznacza, że w powłoce realizuje się błonowy stan naprężenia, stały wzdłuż długości. Istotnie, siła normalna obwodowa n równa jest co do wartości bezwzględnej stałemu obciążeniu zewnętrznemu p .

Na rys. 6 pokazano, że profil naprężenia nie leży na jednej powierzchni płynięcia (jak to jest w przypadku materiału sztywno-idealnie plastycznego), lecz przecina nieskończenie wiele chwilowych powierzchni płynięcia, odchylając się od statycznej powierzchni płynięcia (linia cienka) tym więcej, im większe jest obciążenie zewnętrzne i długość powłoki. Czystemu stanowi błonowemu odpowiada na rysunku punkt A .

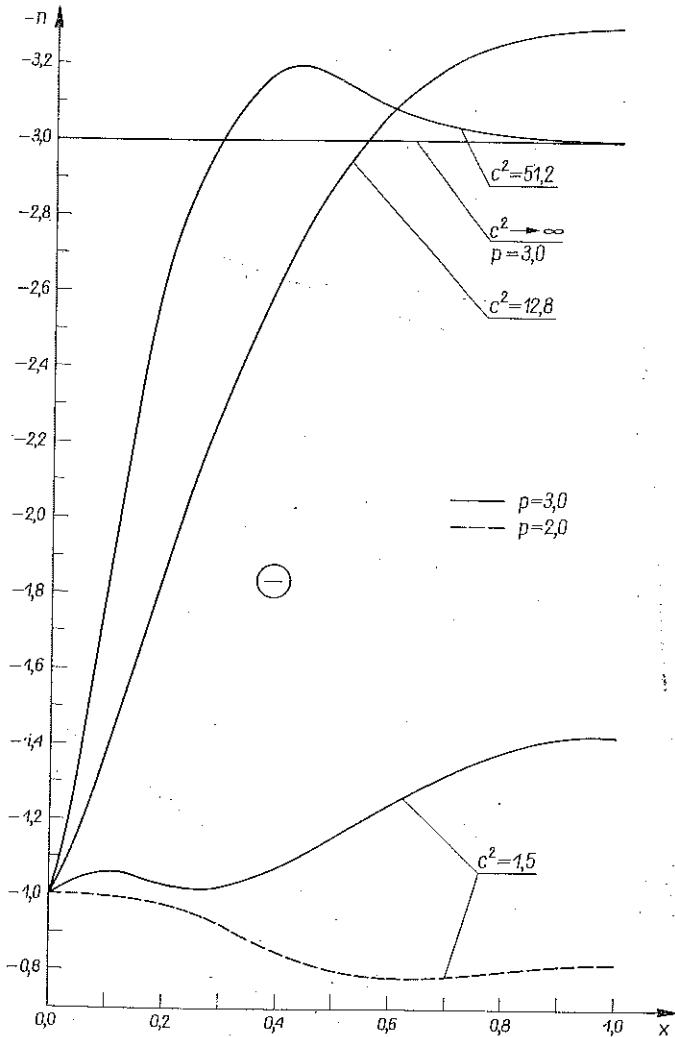


Rys. 3



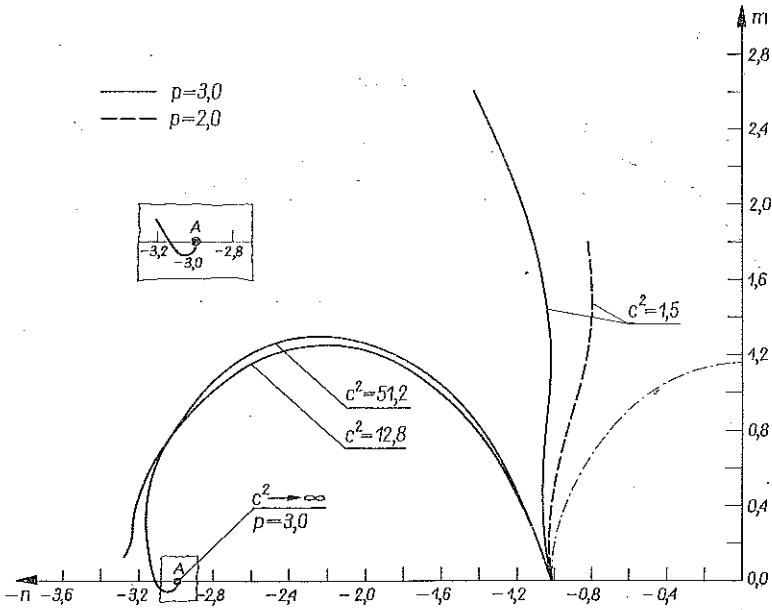
Rys. 4

Ostatni rysunek z grupy charakteryzującej geometrię powłoki, rys. 7, pokazuje zmianę profilu prędkości ugięcia wzdłuż długości powłoki. Dla powłok krótkich prędkość ugięcia v rośnie monotonicznie w kierunku środka powłoki. W powłoce dłuższej maximum v występuje w pobliżu swobodnie podpartego brzegu; od tego miejsca v nieznacznie maleje w kierunku środka powłoki. Wykres $v(x)$ (w pewnej odległości od brzegu) oscyluje wokół linii prędkości ugięcia powłoki nieskończenie długiej. Z powyższych uwag wynika, że geometria powłoki w zasadniczy sposób wpływa na rozkład sił, momentów i prędkości ugięcia w powłoce.

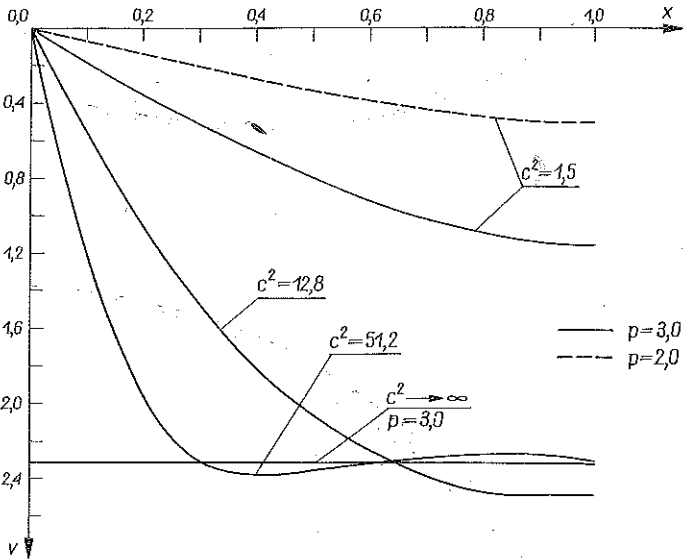


Rys. 5

Rysunki 8–12 pokazują zależność rozwiązania od przyjętego warunku plastyczności powłoki (dla średnich wartości parametrów p i c^2). Linia ciągła ilustruje rozwiązanie układu (3.3), tj. układu dla ściślej statycznej powierzchni płynięcia, uzyskanej



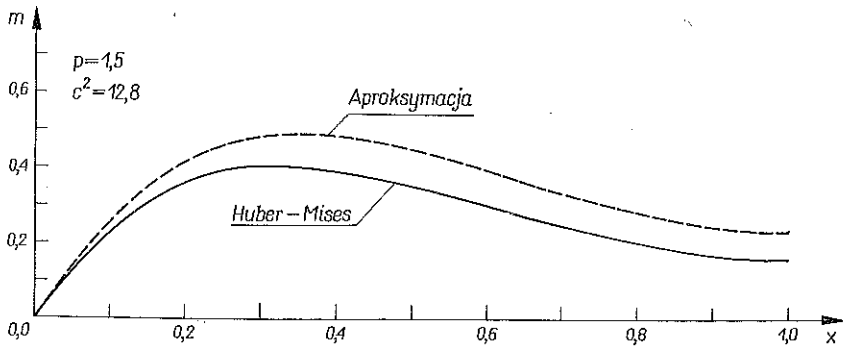
Rys. 6



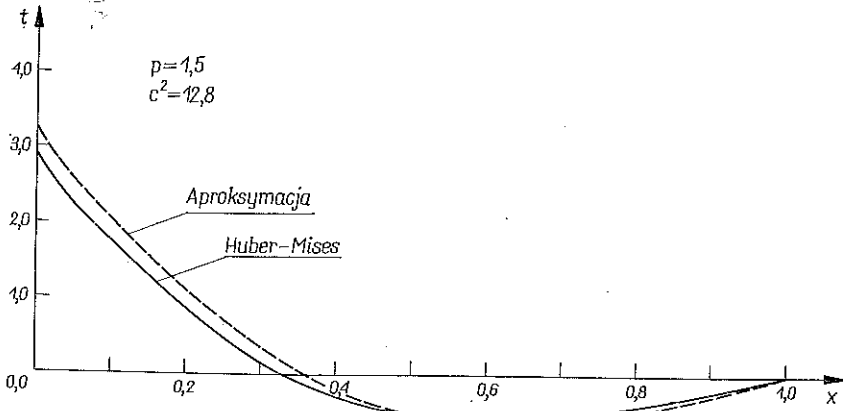
Rys. 7

z warunku Hubera-Misesa. Linia kreskowana przedstawia rozwiązanie dla aproksymacji tej powierzchni elipsą.

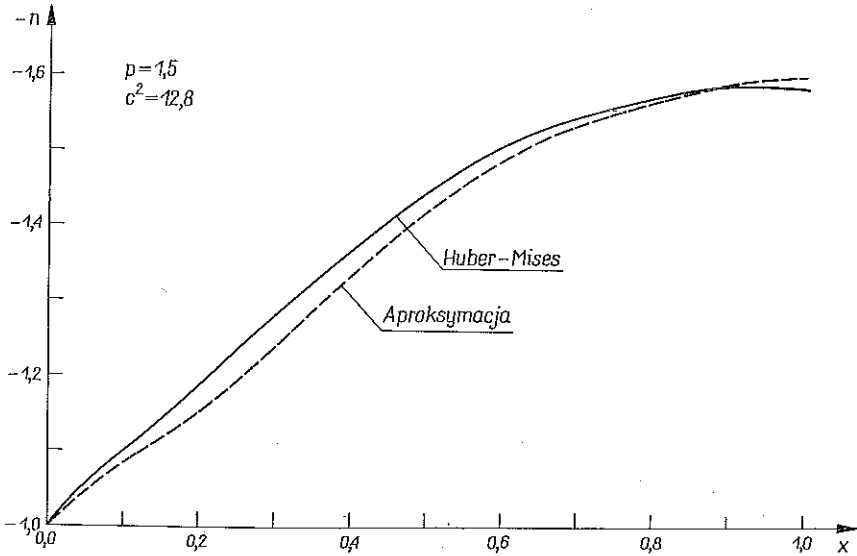
W pracy [5] wykazano, że elipsa jest bardzo dobrym przybliżeniem dokładnej powierzchni płynięcia powłoki walcowej. Wyniki przedstawione na rys. 8-12 potwierdzają ten wniosek, ponieważ wykazują bardzo małą różnicę obu rozwiązań.



Rys. 8

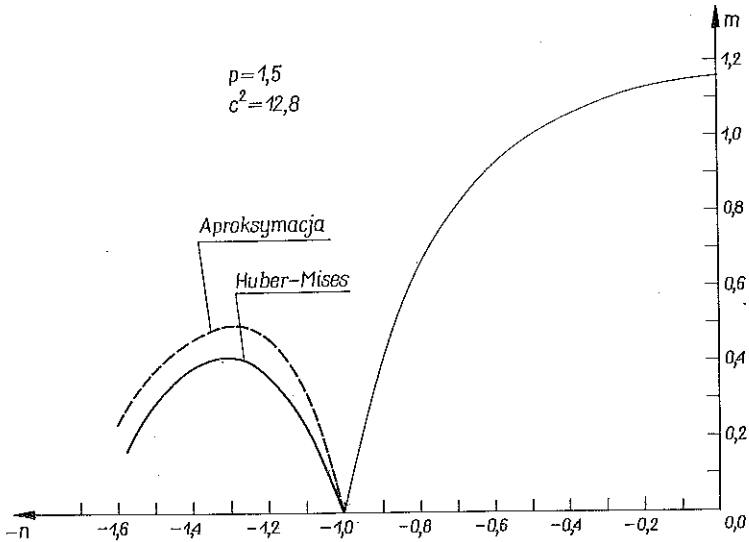


Rys. 9

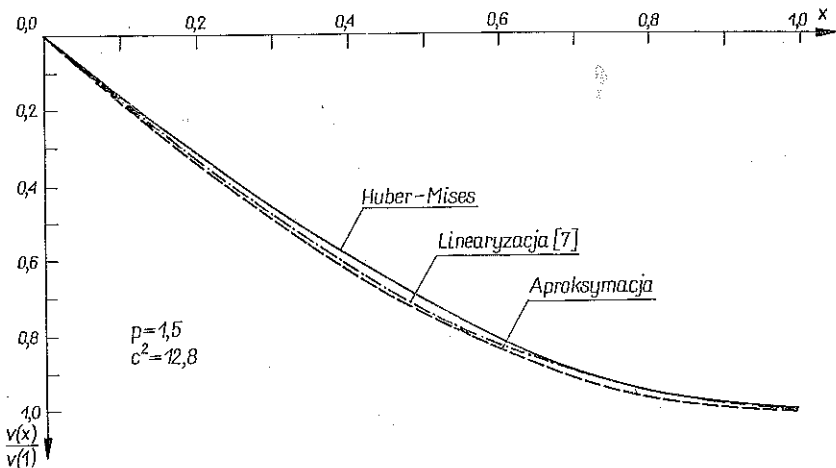


Rys. 10

Linia kropka-kreska ilustruje rozwiązanie zagadnienia zlinearyzowanego, przedstawionego w poprzednim punkcie (rys. 12). Widać, że rozwiązanie ścisłe dla powłoki z materiału sztywno-lepkoplastycznego o liniowej funkcji lepkości jest bliskie rozwiązaniom przybliżonym. Będzie to wskazówką na przyszłość przy rozwiązywaniu zagadnień dynamicznych dla lepkoplastycznych powłok.



Rys. 11



Rys. 12

Linearyzacja związków konstytutywnych dla materiału sztywno-lepkoplastycznego zaproponowana w pracy [10] doprowadziła również do rozwiązania poprawnego i stosunkowo bliskiego rozwiązaniu ścisłemu. Pamiętać jednak należy, że rozwiązanie zagadnienia zlinearyzowanego zależy od wielkości charakteryzujących nośność graniczną powłoki (p^* , n^* , m^* , t^*). W literaturze brak jest ścisłego rozwiązania

problemu nośności granicznej powłoki z materiału sztywno-idealnie plastycznego dla warunku plastyczności Hubera-Misesa. Dlatego wykres na rys. 12 podano dla znormalizowanego pola prędkości, co pozwoliło przedstawić wyniki niezależnie od wielkości p^* .

Przedstawione graficznie rozwiązania nie zależą od stałej lepkości materiału γ , gdyż wprowadzono wielkości bezwymiarowe. Przejście graniczne do materiału sztywno-idealnie plastycznego uzyskuje się, gdy $\gamma \rightarrow \infty$; wielkości sił wewnętrznych dążą wtedy do odpowiadających im wielkościom z problemu nośności granicznej, natomiast prędkość odkształcenia v dąży do zera.

7. WNIOSKI KOŃCOWE

Przyjęcie prawa płynięcia opartego na ciągłym warunku plastyczności umożliwiło zbadanie wpływu parametru geometrycznego na rozkład sił, momentów i prędkości ugięcia w powłoce w szerokich granicach zmienności tego parametru: $1,5 \leq c^2 \leq 51,2$. W przedziale tym znajdują się prawie wszystkie powłoki spotykane w praktyce inżynierskiej, od krótkich (pierścieni) aż po umiarkowanie długie powłoki.

Zaproponowana metoda iteracyjna sprowadzenia zagadnienia dwupunktowego do zagadnienia początkowego okazała się szybko zbieżna dla $c^2 < 52$ i może być wykorzystana w przyszłości do rozwiązania odpowiedniego zagadnienia dynamicznego dla kolejnych warstw względem czasu. Natomiast samo rozwiązanie problemu quasi-statycznego jest asymptotycznym rozwiązaniem dla problemu dynamicznego w przypadku długotrwałych obciążeń i dlatego może służyć jako sprawdzenie stateczności i zbieżności użytych metod numerycznych.

W pracy wykazano również stosowalność aproksymacji jak i linearyzacji ścisłych równań konstytutywnych dla powłok cylindrycznych. Ten ostatni wynik posiadać może duże znaczenie praktyczne, gdyż wskazuje na możliwości sprowadzenia zagadnienia dynamicznego do rozwiązania układów liniowych równań różniczkowych cząstkowych.

Wszystkie powyższe rozważania są poprawne tylko dla małych ugięć powłoki. Wymaga to wprowadzenia pewnych ograniczeń dla wielkości ciśnienia i dla czasu jego działania.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. E. A. WITMER, H. A. BALMER, J. W. LEECH, T. H. H. PIAN, *Large dynamic deformations of beams, rings, plates and shells*, AIAA J. 1, 8, 1963.
2. Г. М. БЫКОВЦЕВ, Т. Д. СЕМЬКИНА, *О вязко-пластическом течении круглых пластин и оболочек вращения*, Известия АН СССР, Мех. Мат., 4, 68 – 76, 1964.
3. T. DUFFEY, R. KRIEG, *The effects of strain-hardening and strain-rate sensitivity on the transient response of elastic-plastic rings and cylinders*, Int. J. Mech. Sci., 11, 1969.

4. T. DUFFEY, *Significance of strain-hardening and strain-rate effects on the transient response of elastic-plastic spherical shells*, Report SC-RR-69-477, 1969.
5. P. G. HODGE, *Limit Analysis of Rotationally Symmetric Plates and Shells*, Prentice-Hall, Inc./Englewood Cliffs, N. J. 1963.
6. А. ПАВЛАНЕК, *Constitutive equations for viscoplastic rotationally symmetric shells with Huber-Mises yield condition*, Arch. Mech. Stos., **21**, 6, 1969.
7. А. ПАВЛАНЕК, *Dynamic loading of rigid-viscoplastic cylindrical shell*, Arch. Mech. Stos., **21**, 2, 1969.
8. P. PERZYNA, *The constitutive equations for rate sensitive plastic materials*, Quart. Appl. Math., **20**, 4, 1963.
9. Т. ВІЕРЗЫЦКІ, *Bending of rigid-viscoplastic circular plate*, Arch. Mech. Stos., **16**, 6, 1964.
10. Т. ВІЕРЗЫЦКІ, *Non-associated constitutive law in viscoplasticity with application to dynamics of plates and shells*, Acta Mechanica, **11**, 1, 1970.

Резюме

ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ДЛЯ УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ ГУБЕРА-МИЗЕСА

В работе рассмотрена тонкая цилиндрическая оболочка свободно опертая на концах, осесимметрично нагруженная постоянным равномерно распределенным внешним давлением, превышающим несущую способность оболочки. Предположены: жестко-вязко-пластический, несжимаемый материал оболочки и условие пластичности Губера-Мизеса. Рассмотрен случай линейной функции, описывающей влияние скорости деформации.

Для нагрузки, превышающей несущую способность, в оболочке, если не учитывать сил инерции, устанавливается квази-статическое состояние равновесия.

Задача свелась к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая была решена численно. Вычисления проведены для ряда значений нагрузки и геометрического параметра оболочки. Полученная в работе двумерная дифференциальная задача сведена к задаче Коши при использовании метода Ньютона решения системы неявных алгебраических уравнений. Задача Коши решена методом Рунге-Кутты.

Сравнены решения для «точной» статической поверхности течения оболочки и ее приближения. Решения оказались близкими.

Исследовано влияние геометрического параметра оболочки на величину и характер решения задачи.

SUMMARY

VISCO-PLASTIC FLOW OF A CYLINDRICAL SHELL WITH THE HUBER-MISES YIELD CONDITION

In this paper a thin cylindrical shell is considered, loaded by an axially-symmetrical uniformly distributed external pressure, constant in time and greater than the limiting load capacity of the shell. Rigid visco-plastic incompressible material of the shell and the Huber-Mises yield condition are assumed.

A quasi-static state of equilibrium is established for the load greater than the limiting load capacity in the shell, the forces of inertia being disregarded.

The problem of quasi-static flow of the shell is described by a non-linear set of ordinary differential equations of the first order which have been solved numerically. The calculations are

carried out for several values of load and geometrical parameters of the shell. The two-point differential problem obtained here is reduced to Cauchy's problem with the use of Newton's method of solving a set of implicit algebraic equations. The Cauchy problem was solved by the Runge-Kutta method.

The solutions for an «exact» surface of flow of the shell (for the Huber-Mises condition) and its approximation are discussed and compared. The high compatibility of both solutions is shown.

The influence of the geometrical shell parameter on the magnitude and character of the solution of the problem has been investigated.

**INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK**

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 listopada 1970 r.
