ROZPRAWY INŻYNIERSKIE, 19, 2, 267—273, 1971, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Warszawa

RÓWNANIA ASYMPTOTYCZNE I EFEKT BRZEGOWY DLA PŁYT O ZŁOŻONEJ STRUKTURZE

SYLWESTER KONIECZNY (ŁÓDŹ)

1. Wstęp

W pracy [1] zostały podane podstawowe równania tarcz i płyt siatkowych o złożonej strukturze. W tego rodzaju płytach można wyróżnić dwa typy węzłów. Pierwszy typ charakteryzuje się tym, że węzły mogą być połączone ośmioma łącznikami z ośmioma sąsiednimi węzłami, natomiast w drugim typie węzły mogą być połączone czterema łącznikami z czterema sąsiednimi węzłami.

Wyznaczanie stanu naprężenia i przemieszczenia w płytach siatkowych o złożonej strukturze przy stosowaniu ciągłego modelu takich płyt, przedstawionego w pracy [1], wymaga rozwiązania zagadnienia brzegowego dla układu równań różniczkowych szóstego rzędu. W równaniach tych występuje mały parametr, charakteryzujący średnią odległość sąsiednich węzłów rusztu lub odległość sąsiednich otworów płyty perforowanej przy operatorze różniczkowym rzędu najwyższego. Fakt ten umożliwia otrzymanie rozwiązania przybliżonego przez zastosowanie teorii asymptotycznej (gdy mały parametr przyrównany do zera) oraz efektu brzegowego.

Celem poniższej pracy jest przedstawienie układu równań teorii asymptotycznej, dla płyt siatkowych o złożonej strukturze. W pracy zastosowano konwencję sumacyjną. Wskaźniki oznaczone dużymi literami alfabetu łacińskiego przebiegają ciąg 1, 2. Średnik oznacza pochodną kowariantną, a przecinek — pochodną cząstkową.

Przyjęto następujące oznaczenia:

p^K oznacza składowe «siłowe» tensora naprężeń, m^{KL} składowe «momentowego» tensora naprężeń, γ_L, κ_{KL} składowe tensorów odkształceń, v^K składowe wektora obrotu, u składową wektora przemieszczenia (ugięcia), C^{KLMN}, A^{KL}, $''B^{KLM}$ składowe tensorów sztywności sprężystej, b gęstość obciążenia siłowego, h^L gęstość obciążenia momentowego, ε_{KL} dwuwektor Ricciego, m_*^{KL}, p_*^K składowe tensorów naprężeń powstałych wskutek wstępnych odkształceń płyty.

2. Równania podstawowe

W pracy [1] zostały podane podstawy teoretyczne tarcz i płyt siatkowych o złożonej strukturze. Dla tych płyt równania równowagi, związki geometryczne i fizyczne w dowolnym układzie krzywoliniowym są następujące:

$$m^{KL}{}_{;K}+\varepsilon^{L}_{\cdot K}p^{K}+h^{L}=0, \quad p^{K}{}_{;K}+b=0; \tag{2.1}$$

$$\kappa_{KL}=v_{L;K}; \quad \gamma_{K}=u_{;K}+\varepsilon_{KM}\, v^{M}; \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} m^{KL}&=C^{KLMN}\kappa_{MN}+{}''B^{KLM}\gamma_{M}+m^{KL}_{*}, \\ p^{K}&=A^{KL}\gamma_{L}+{}''B^{LMK}\kappa_{LM}+p^{K}_{*}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

W równaniach (2.1) - (2.3) funkcje b i h^{L} są znanymi siłami zewnętrznymi i momentami zewnętrznymi obciążającymi płytę oraz C^{KLMN}, A^{KL} i $''B^{KLM}$ są znanymi składowymi tensorów sztywności spężystej. Wszystkie pozostałe funkcje występujące w (2.1) - (2.3) są niewiadomymi.

Funkcje te w obszarze π płaszczyzny, na której kształtujemy siatkę płyty, powinny spełniać równania (2.1) - (2.3), a na brzegu obszaru $\partial\pi$ powinny spełniać odpowiednie trzy warunki brzegowe. Dla brzegu swobodnego mają one postać

$$m^{KL}n_{K}t_{L}=\tilde{m}, \quad m^{KL}n_{K}n_{L}=m, \quad p^{K}n_{K}=\bar{p}, \tag{2.4}$$

gdzie $\tilde{m}$, m i $\bar{p}$ są danymi obciążeniami brzegu płyty oraz n_{K} i t_{L} są składowymi jednostkowego wektora kolejno normalnego i stycznego do brzegu. Dla brzegu sztywno utwierdzonego spełnione są warunki

$$u=0, \quad v^{K}=0. \tag{2.5}$$

Dla brzegu swobodnie podpartego lecz obciążonego momentami zginającymi $\tilde{m}$ i skręcającymi m mamy

$$u=0, \quad m^{KL}n_{K}t_{L}=\tilde{m}, \quad m^{KL}n_{K}n_{L}=m.$$

Po wyrugowaniu z równań (2.1), (2.2) i (2.3) składowych m^{KL}, p^{K} oraz składowych stanu odkształcenia κ_{KL} i γ_{L} otrzymamy równania przemieszczeniowe. Jeżeli w tych równaniach przyjmujemy za niewiadome funkcje ugięcia $u(x^{L})$ oraz niezależne obroty $\gamma_{K}(x^{L})$, to będą one miały następującą postać:

$$\begin{aligned} &(A^{KL}\gamma_{L})_{;K}+[{}''B^{LMK}\varepsilon_{M}^{\cdot N}(u_{;N}-\gamma_{N})_{;L}]_{;K}+b+p^{K}_{*;K}=0, \\ &[C^{KLMN}\varepsilon_{N}^{\cdot S}(u_{;S}-\gamma_{S})_{;M}]_{;K}+({}''B^{KLM}\gamma_{M})_{;K}-\varepsilon_{K}^{\cdot L}A^{KM}\gamma_{M}- \\ &\qquad -\varepsilon_{K}^{\cdot L}\varepsilon_{N}^{\cdot S}\,{}''B^{MNK}(u_{;S}-\gamma_{S})_{;M}+h^{L}+m^{KL}_{*;K}-\varepsilon_{K}^{\cdot L}p^{K}_{*}=0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Przekształcamy równania (2.6) do innej postaci. W tym celu należy pomnożyć równanie $(2.6)_2$ przez $\varepsilon^{T}_{\cdot L}$ i korzystając z tożsamości $\varepsilon^{T}_{\cdot L}\varepsilon_{K}^{\cdot L}=\delta^{T}_{K}$ możemy wyliczyć z powyższego równania $A^{TM}\gamma_{M}$. Wyliczone wyrażenie na $A^{TM}\gamma_{M}$ należy podstawić do prawej strony równania $(2.3)_2$; otrzymamy wówczas

$$p^{T}=[\varepsilon^{T}_{\cdot L}\varepsilon_{N}^{\cdot S}C^{KLMN}(u_{;S}-\gamma_{S})_{;M}]_{;K}+(\varepsilon^{T}_{\cdot L}\,{}''B^{KLM}\gamma_{M})_{;M}+\varepsilon^{T}_{\cdot L}h^{L}+\varepsilon^{T}_{\cdot L}m^{KL}_{*;K}. \tag{2.7}$$

Wprowadzając oznaczenia

$$D^{KTMS} \equiv \varepsilon_{L\cdot}^{\cdot T} \varepsilon_{N}^{\cdot S} C^{KLMN}, \quad E^{KTM} \equiv \varepsilon_{L}^{\cdot T} {}''B^{KLM} \tag{2.8}$$

oraz korzystając z $(2.3)_2$ równanie (2.7) napiszemy w postaci

$$\begin{aligned} A^{TM}\gamma_M + \varepsilon_N^{\cdot S} {}''B^{MNT}(u_{;S}-\gamma_S)_{;M} + p_*^T = \\ = -[D^{KTMS}(u_{;S}-\gamma_S)_{;M}]_{;K} - (E^{KTM}\gamma_M)_{;M} + \varepsilon^T_{\cdot L} h^L + \varepsilon^T_{\cdot L} m_{*\,;K}^{KL}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Pierwsze równanie podstawowego układu równań otrzymamy podstawiając prawe strony wzoru (2.9) do $(2.6)_1$. Dwa pozostałe równania to równania (2.9). Tym samym układ zbiorczy ma postać

$$\begin{aligned} &[D^{KTMS}(u_{;S}-\gamma_S)_{;M}]_{;KT} + (E^{KTM}\gamma_M)_{;KT} - b - (\varepsilon^T_{\cdot L} h^L)_{;T} - (\varepsilon^T_{\cdot L} m_*^{KL})_{;KT} = 0, \\ &[D^{KTMS}(u_{;S}-\gamma_S)_{;M}]_{;K} + (E^{KTM}\gamma_M)_{;K} + \\ &\quad + A^{TM}\gamma_M + \varepsilon_N^{\cdot S} {}''B^{MNT}(u_{;S}-\gamma_S)_{;M} - \varepsilon^T_{\cdot L} h^L - \varepsilon^T_{\cdot L} m_{*\,;K}^{KL} + p_*^T = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Układ powyższy jest układem trzech równań różniczkowych cząstkowych szóstego rzędu typu eliptycznego dla funkcji u i γ_K. Uzyskanie ścisłych rozwiązań zagadnień brzegowych dla równania (2.10) jest na ogół bardzo trudne. Jednakże rezygnując z rozwiązania ścisłego można w wielu przypadkach otrzymać rozwiązanie przybliżone.

3. Równania asymptotyczne i efekt brzegowy

W równaniach płyt siatkowych można wyodrębnić mały parametr, którego występowanie pozwala na uproszczenie postaci równań i uzyskanie na tej drodze przybliżonych rozwiązań. Wprowadźmy stałą l oznaczającą przeciętną długość łączników płyty siatkowej. Stałą l, która jest z założenia niewielka w porównaniu z wymiarami obszaru π płyty siatkowej, nazwijmy małym parametrem płyty siatkowej. Wyraźmy składowe tensorów sprężystości tak, aby zawierały mały parametr l. Wykorzystując wzory (3.12) i (3.17) podane w pracy [1] (wzorów tych nie przytaczamy ze względu na skomplikowaną postać), składowe tensorów sprężystości zawierające mały parametr l wyrazimy w następującej postaci:

$$''B^{KLM} = l^{-1}\, ''\bar{B}^{KLM}, \quad A^{KL} = l^{-2} \bar{A}^{KL}. \tag{3.1}$$

We wzorach (3.1) wielkości nadkreślone nie zależą od małego parametru l, również C^{KLMN} nie zależy od l (w dalszej części pracy wielkość nadkreślona będzie niezależna od l). Podstawiając prawe strony wzorów (3.1) do (2.10) otrzymamy równania przemieszczeniowe zawierające mały parametr l:

$$\begin{aligned} &[D^{KTMS}(u_{;S}-\gamma_S)_{;M}]_{;KT} + (l^{-1}\bar{E}^{KTM}\gamma_M)_{;KT} - b - (\varepsilon^T_{\cdot L} h^L)_{;T} - (\varepsilon^T_{\cdot L} m_*^{KL})_{;KT} = 0, \\ &l^2[D^{KTMS}(u_{;S}-\gamma_S)_{;M}]_{;K} + l(\bar{E}^{KTM}\gamma_M)_{;K} + \bar{A}^{KM}\gamma_M + \\ &\quad + l\varepsilon_N^{\cdot S}\, ''\bar{B}^{MNT}(u_{;S}-\gamma_S)_{;M} - l^2\varepsilon^T_{\cdot L} h^L - l^2 \varepsilon^T_{\cdot L} m_{*\,;K}^{KL} + l^2 p_*^K = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Jeżeli we wzorach $(3.2)_2$ małe parametry l dążyć będą do zera, to $\gamma_M=0$, gdyż tensor o składowych $\bar{A}^{KM}$ zgodnie z (2.2) tworzy macierz nieosobliwą. W celu zbadania, do czego dąży $l^{-1}\gamma_M$, gdy l dąży do zera, skorzystajmy z równania $(2.3)_2$, z którego po obliczeniu γ_R otrzymamy

$$\gamma_R=\bar{a}_{RK}(l^2p^K-l\,''\bar{B}^{LMK}\kappa_{LM}+l^2p_*^K), \tag{3.3}$$

przy czym $\bar{a}_{RK}$ jest macierzą odwrotną do macierzy $\bar{A}^{RK}$. Podzielmy równanie (3.3) przez l. Po obliczeniu granicy otrzymanego wyrażenia, gdy l dąży do zera, uzyskamy

$$\frac{\gamma_R}{l}\to-\bar{a}_{RK}\,''\bar{B}^{LMK}\kappa_{LM}. \tag{3.4}$$

Wykorzystując wzór (3.4) do obliczenia granicy w równaniu $(3.2)_1$ ($l\to0$), otrzymane poprzednio równanie sprowadzi się do postaci

$$[(D^{KTMS}+\varepsilon_P^{;S}E^{KTL}a_{LR}E^{MPR})u_{;SM}]_{;KT}-b=0, \tag{3.5}$$

gdzie a_{LR} jest macierzą odwrotną do macierzy A^{RS}. Oznaczając

$$\tilde{D}^{KTMS}\equiv D^{KTMS}+\varepsilon_P^{;S}E^{KTL}a_{LR}E^{MPR}, \tag{3.6}$$

napiszemy równanie (3.5) w postaci

$$(\tilde{D}^{KTMS}u_{;SM})_{;KT}-b=0. \tag{3.7}$$

Równanie (3.7) nazywamy równaniem asymptotycznym, a przybliżoną teorię opartą na tym równaniu nazywamy teorią asymptotyczną. Teoria asymptotyczna płyt siatkowych o złożonej strukturze prowadzi do równości $\gamma_R=0$, czyli redukuje liczbę niezależnych składowych stanu przemieszczenia do jednej funkcji $u(x^L)$. Ponieważ funkcje $\gamma_R(x^L)$ charakteryzują niezależny obrót elementów płyty, przeto teorię asymptotyczną można stosować w tych wszystkich przypadkach, w których niezależny obrót γ_R jest pomijalnie mały wobec całkowitego obrotu v^K.

Równanie (3.7) z formalnego punktu widzenia jest podobne do równania ugięcia płyty anizotropowej. Uproszczony model ciągły płyt o strukturze siatkowej, otrzymany z ogólniejszego modelu przedstawionego w p. 2 przyjęciem $l\to0$, prowadzi do znanej w literaturze anizotropii konstrukcyjnej płyt. Równanie (3.7) jest równaniem eliptycznym czwartego rzędu. Tym samym spełnienie wszystkich trzech warunków brzegowych (2.4) [lub warunków (2.5) lub (2.6)] nie jest możliwe. Korzystać wtedy musimy ze «zredukowanej» postaci tych warunków podobnie jak w teorii płyt Kirchhoffa.

Napiszmy związek między składowymi stanu napięcia a składowymi stanu odkształcenia dla teorii asymptotycznej. W tym celu podstawmy do prawej strony równania $(2.3)_1$ wzór (3.1) i otrzymamy wówczas

$$m^{KL}=C^{KLMN}\kappa_{MN}+l^{-1}\,''\bar{B}^{KLR}\gamma_R+m_*^{KL}. \tag{3.8}$$

Ponieważ C^{KLMN} nie zależy od l, przeto przechodząc do obliczenia granicy w (3.8) po wykorzystaniu wyrażenia (3.4) otrzymamy

$$m^{KL}=(C^{KLMN}-\,''B^{KLR}a_{RS}\,''B^{MNS})\kappa_{MN}+m_*^{KL}. \tag{3.9}$$

Przyjmując w $(2.2)_2$ $\gamma_K=0$ otrzymamy wyrażenie na składowe wektora obrotu v_K, które po podstawieniu do $(2.2)_1$ pozwoli nam otrzymać formułę na składowe tensorowe odkształcenia κ_{MN}. Z kolei podstawiając κ_{MN} do wzoru (3.9) otrzymamy

$$m^{KL}=(C^{KLMN}-{}''B^{KLR}a_{RS}{}''B^{MNS})\varepsilon_{N}^{\cdot H}u_{;HM}. \tag{3.10}$$

Równania $(2.3)_2$ w teorii asymptotycznej tracą sens; składowe p^K wektora intensywności sił tnących należy wyznaczyć z równań równowagi $(2.1)_1$ (pominięto h^L). Otrzymamy wtedy

$$p^K=\varepsilon^{K}_{\cdot M}m^{NM}{}_{;N}. \tag{3.11}$$

Stąd widzimy, że momenty zginające m^{KL} oraz siły tnące p^K dla teorii asymptotycznej oblicza się ze wzorów analogicznych do wzorów z teorii płyt Kirchhoffa.

Po rozwiązaniu zagadnienia brzegowego opisanego równaniami (3.7), (3.10) i (3.11) można dodatkowo obliczyć wielkości γ_L, nie występujące w teorii asymptotycznej. Wykorzystać należy w tym celu równania (2.3), przy czym momenty m^{KL} siły p^K należy obliczyć za pomocą (3.19) i (3.11). Jeżeli obliczone niezależne kąty obrotu γ_L będą niewielkie wobec pochodnych ugięcia, tj. w obszarze płyty (lecz niekoniecznie w pobliżu brzegu), spełnione są warunki

$$\gamma_L \ll u_{;L}, \quad \gamma_{L;K} \ll u_{;LK}, \tag{3.12}$$

to można stosować teorię asymptotyczną dla płyt siatkowych o złożonej strukturze. Niemniej jednak w otoczeniu brzegu płyty siatkowej możemy otrzymać zasadnicze rozbieżności pomiędzy wielkościami m^{KL} i p^K obliczonymi według modelu opisanego układem równań szóstego rzędu (3.2) oraz według teorii asymptotycznej, korzystając z równania czwartego rzędu (3.7). Teoria asymptotyczna nie pozwala na jednoczesne spełnienie wszystkich trzech warunków brzegowych (2.4) [lub (2.5), lub też (2.6)]. Niedogodność tę można usunąć stosując dodatkowo przybliżoną teorię «efektu brzegowego».

Teoria efektu brzegowego dla tarcz i płyt, których struktura wewnętrzna określona jest dwiema względnie trzema rodzinami krzywych, omówiona została w pracach [2, 3, 4, 5 i 6]. Równanie «efektu brzegowego» wyprowadzone w pracy [2] ma postać

$$\gamma_{,11}^2-\alpha\gamma^2=0, \qquad \alpha=\frac{A^{22}}{D^{1212}}>0. \tag{3.13}$$

Równanie (3.13) zostało wyprowadzone przy założeniu, że a) brzeg płyty pokrywa się z linią parametryczną $x^1=x^1_{(0)}=\text{const}$, b) linie parametryczne $x^2=\text{const}$ są prostymi normalnymi do brzegu płyty i wraz z krzywymi $x^1=\text{const}$ tworzą układ ortogonalny (parametryzację taką wystarczy wprowadzić tylko w otoczeniu brzegu płyty), c) w pobliżu brzegu płyta jest ortotropowa, a kierunki główne ortotropii pokrywają się z liniami parametrycznymi $x^L=\text{const}$ (pojęcie ortotropii nie dotyczy materiału płyty siatkowej lecz budowy tensorów sztywności sprężystej C^{KLMN}, A^{KL} i $''B^{KLM}$). Z założenia c) wynika, że $''B^{KLM}=0$; stąd równanie «efektu brzegowego» dla płyt siatkowych o złożonej strukturze będzie analogiczne do równania

(3.13). Pomijając rozumowanie (gdyż jest identyczne z rozumowaniem podanym w pracy [2]) napiszemy końcowe wzory na składowe γ_L kątów niezależnego obrotu:

$$
(3.14)\qquad
\begin{aligned}
&\gamma^2 = \varphi(x^2)\exp\Big(-\int_{x^1_{(0)}}^{x^1}\sqrt{\alpha(\zeta, x^2)}\,d\zeta\Big) + \chi(x^2)\exp\int_{x^1_{(0)}}^{x^1}\sqrt{\alpha(\zeta, x^2)}\,d\zeta,\\
&\gamma_1 = \frac{1}{A^{11}}[(D^{1111}\gamma_{1,1} + D^{1122}\gamma_{2,2})_{,1} - (D^{K1MN}u_{,MN})_{,K}].
\end{aligned}
$$

We wzorze $(3.14)_1$ należy przyjąć $\chi(x^2)\equiv 0$, gdy w obszarze płyty mamy $x^1 \geqslant x^1_{(0)}$ lub $\varphi(x^2)\equiv 0$, gdy w obszarze płyty spełniona jest nierówność $x^1 \leqslant x^1_{(0)}$. Funkcję $\gamma_{1,1}$ występującą we wzorze $(3.14)_2$ należy obliczyć z następującego wzoru:

$$
(3.15)\qquad A^{11}\gamma_{1,1} = -A^{22}\gamma_{2,2} - A^{22}_{,2}\gamma_2 - b.
$$

Przybliżony sposób obliczania płyt siatkowych o złożonej strukturze polega na zastąpieniu układu równań (3.2) układem równań (3.7), (3.13) i $(3.14)_2$. Rząd układu równań nie ulega tu zmianie, wynosi nadal sześć; dzięki temu możemy spełnić ściśle trzy warunki brzegowe (2.4) lub (2.5) lub też (2.6). Otrzymane rozwiązanie zagadnienia brzegowego stanowi dostateczne przybliżenie, jeżeli wpływ funkcji γ_L na stan napięcia jest niewielki z wyjątkiem obszaru przylegającego bezpośrednio do brzegu płyty.

Literatura cytowana w tekście

1. Cz. Woźniak, P. Klemm, *Sprężystość gęstych siatek o złożonej strukturze*, Rozpr. Inżyn., **18**, 3, 1970.
2. S. Konieczny, Cz. Woźniak, *Obliczanie płyt siatkowych na podstawie efektu brzegowego*, Rozpr. Inżyn., **15**, 3, 1967.
3. K. Pustelnik, Cz. Woźniak, *Obliczenie tarcz siatkowych przy wykorzystaniu przybliżonej teorii efektu brzegowego*, Mech. Teoret. i Stos., **6**, 1, 1968.
4. Cz. Woźniak, *Edge effect in lattice-type discs*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. tech., **15**, 1. 1967.
5. K. Wilmański, *Metody asymptotyczne w teorii tarcz z mikrostrukturą*, Rozpr. Inżyn., **15**, 2, 1967,
6. Cz. Woźniak, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe. Podstawy teorii i przykłady obliczeń*, PWN. Warszawa 1970.

Резюме

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И КРАЕВОЙ ЭФФЕКТ ДЛЯ ПЛАСТИНОК СО СЛОЖНОЙ СТРУКТУРОЙ

Уравнения, описывающие сеточные пластинки, заключают малый параметр, который в системе уравнений в перемещениях, появляется при дифференциальном операторе самого высокого порядка. Этот факт дает возможность получить приближенное решение применяя асимптотический подход.

В работе дается система уравнений для асимптоматической теории, а также уравнение краевого течения. Для асимптоматической теории получено уравнение четвертого порядка,

а тогда как для краевого эффекта — второго порядка. Порядок системы уравнений неизменился и составляет в дальнейшем — шесть и поэтому можно точно удовлетворить трем краевым условиям.

SUMMARY

ASYMPTOTIC EQUATION AND THE BOUNDARY EFFECT FOR PLATES WITH A COMPLEX STRUCTURE

The equations describing grid plates with a complex structure contain a small parameter which occurs at the differential operator of the highest order in the set of displacement equations. This makes it possible to obtain the approximate solution using the asymptotic approach.

In the paper is given a set of equations for the asymptotic theory, together with the equation for the boundary effect. An equation of the fourth order is obtained for the asymptotic theory, and of the second order for the boundary effect. The order of the set of equations is unchanged — being still six — and thereby we can exactly satisfy the three boundary conditions.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 września 1970 r.