

ZGINANIE I SKRĘCANIE OSIOWO-SYMETRYCZNEJ PŁYTY O DYSKRETNEJ STRUKTURZE

JANUSZ ŚLIŻEWICZ (WARSZAWA)

WSTĘP

Praca stanowi kontynuację pracy [5], w której dla osiowo-symetrycznej płaskiej ramy obciążonej osiowo-symetrycznie siłami leżącymi w płaszczyźnie ramy i wektorami momentów prostopadłymi do płaszczyzny — znaleziono stan odkształcenia i naprężenia.

Niniejsza praca zajmuje się rozwiązaniem identycznej ramy przy obciążeniu siłami prostopadłymi do płaszczyzny ramy i momentami leżącymi w tej płaszczyźnie czyli dla typowego obciążenia płytowego. Opierając się na teorii ośrodka dyskretnego, wprowadzonej przez H. FRĄCKIEWICZA w pracach [1, 2, 3 i 4], otrzymano równania przemieszczeniowe, stanowiące układ trzech równań różnicowych, liniowych o zmiennych współczynnikach. Układ ten rozwiązano dla konkretnych sztywności zginania i skręcania prętów ramy. Ogólne rozwiązania otrzymano w postaci funkcji zawierających stałe dowolne, łatwe do wyznaczenia z warunków brzegowych. Pracę zilustrowano czterema przykładami.

1. RÓWNANIA PODSTAWOWE

W artykule, jak już nadmieniliśmy, oprzemy się na równaniach podanych przez H. FRĄCKIEWICZA w jego pracach [1, 2, 3 i 4] opisujących ośrodek dyskretny oraz stan odkształcenia i naprężenia w takim ośrodku. Punkty ośrodka stanowią węzły ramy płaskiej, której każdy węzeł połączony jest z sąsiednimi węzłami czterema prostymi, sprężystymi prętami. Przekrój pręta jest stały na odcinku między węzłami oraz główna centralna oś bezwładności przekroju leży w płaszczyźnie ramy.

Rama obciążona jest przestrzennie w każdym węzle siłą prostopadłą do płaszczyzny ramy F oraz momentem H leżącym w jej płaszczyźnie (rys. 2):

$$(1.1) \quad H = h^i e_i, \quad F = f e_3, \quad i = 1, 2.$$

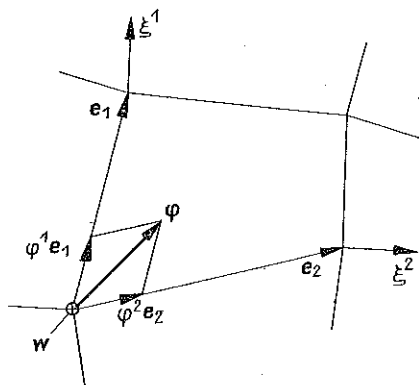
W takim przypadku przemieszczenie węzłów ramy opisują dwa wektory, ugięcia w oraz kąta obrotu φ (rys. 1):

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \varphi &= \varphi^i e_i, & i &= 1, 2, \\ w &= w e_3, & |e_3| &= 1. \end{aligned}$$

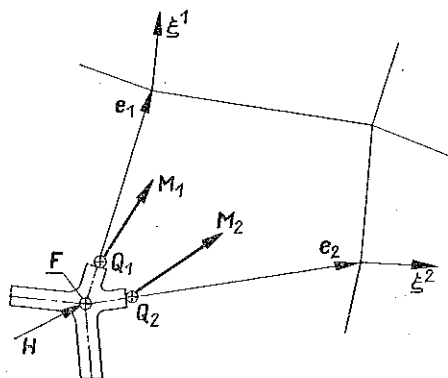
Stan naprężenia określają momenty M_1 i M_2 oraz siły poprzeczne Q_1 i Q_2 (rys. 2)

$$(1.3) \quad M_v = m_v^i e_i, \quad Q_v = q_v e_3, \quad v, i = 1, 2.$$

Przyjmujemy, że przedstawione na rys. 1 i 2 wektory mają składowe dodatnie. Geometrię ośrodka opisuje obiekt podstawowy g_{ij} oraz odpowiadające mu współczyn-



Rys. 1



Rys. 2

niki koneksji Γ_{jk}^i w dwuwymiarowym układzie współrzędnych ξ^1, ξ^2 . Przyjmując, że odkształcenia ramy możemy traktować jako małe, otrzymamy następujące związki fizyczne:

$$(1.4) \quad m_v^j = \frac{B_v}{g_{vv}^{3/2}} g_{nv} g_v^j \nabla_v \varphi^n + \left(g_s^j - \frac{1}{g_{vv}} g_v^j g_{sv} \right) \frac{2D_v e^{sv}}{g_{vv}^{1/2} (\Delta \xi^v)^2} \times \\ \times [3\Delta_v w + \Delta \xi^{sv} \varepsilon_{vk} (3\varphi^k + \Delta \xi^{sv} \nabla_v \varphi^k)], \\ q_v = \frac{6D_v}{g_{vv}^{3/2} (\Delta \xi^v)^3} [2\Delta_v w + \Delta \xi^{sv} \varepsilon_{vk} (2\varphi^k + \Delta \xi^{sv} \nabla_v \varphi^k)],$$

gdzie B_v i D_v oznaczają odpowiednio sztywność skręcania oraz sztywność zginania pręta, g_{ij} składowe obiektu podstawowego, g_i^j deltę Kroneckera, Δ_v przyrost funkcji w kierunku osi ξ^v , ∇_v pochodną kowariantną w ośrodku dyskretnym, $\Delta \xi^{sv}$ przyrost współrzędnej oraz

$$(1.5) \quad \nabla_v \varphi^\rho = \left[\left(\frac{1}{\Delta \xi^{sv}} g_\rho^k + \Gamma_{kv}^\rho \right) \Delta_v + \Gamma_{kv}^\rho \right] \varphi^k, \\ g = \det |g_{ij}|,$$

$$e^{sv} = \frac{e^{sv}}{\sqrt{g}}, \quad \varepsilon_{sv} = e_{sv} \sqrt{g}, \quad e_{12} = 1, \quad e_{21} = -1, \quad e_{11} = e_{22} = 0.$$

Związki fizyczne w postaci rozwiniętej mają następującą formę [4]:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} m_1^2 &= -\frac{2D_1}{\sqrt{gg_{11}}(\Delta\xi^1)^2} [3A_1 w + \sqrt{g} \Delta\xi^1 (3\varphi^2 + \Delta\xi^1 \nabla_1 \varphi^2)], \\ m_2^2 &= \frac{2D_2}{\sqrt{gg_{22}}(\Delta\xi^2)^2} [3A_2 w - \sqrt{g} \Delta\xi^2 (3\varphi^1 + \Delta\xi^2 \nabla_2 \varphi^1)], \\ m_1^1 &= \frac{1}{g_{11}} (m_{11} - g_{12} m_1^2), \quad m_2^2 = \frac{1}{g_{22}} (m_{22} - g_{12} m_2^1), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} m_{11} &= \frac{B_1}{\sqrt{g_{11}}} \nabla_1 \varphi_1, \quad m_{22} = \frac{B_2}{\sqrt{g_{22}}} \nabla_2 \varphi_2, \\ q_1 &= \frac{6D_1}{g_{11}^{3/2} (\Delta\xi^1)^3} [2A_1 w + \sqrt{g} \Delta\xi^1 (2\varphi^2 + \Delta\xi^1 \nabla_1 \varphi^2)], \\ q_2 &= \frac{6D_2}{g_{22}^{3/2} (\Delta\xi^2)^3} [2A_2 w - \sqrt{g} \Delta\xi^2 (2\varphi^1 + \Delta\xi^2 \nabla_2 \varphi^1)]. \end{aligned}$$

Równania równowagi [4] mają postać

$$(1.7) \quad \begin{aligned} g_{\rho\alpha} (\Delta\xi^\nu + \Delta\xi^\nu \Delta\xi^\mu \nabla_\mu) \nabla_\nu m_\nu^\rho - \sqrt{g} (e_{\nu\alpha} + e_{j\alpha} \Gamma_{\nu\mu}^j) (1 + \Delta_\mu) q_\nu = \\ = -g_{\alpha\rho} (1 + \nabla_\mu + \nabla_\nu + \nabla_{\nu\mu}) h^{\rho\nu}, \\ \Delta_\nu (1 + \Delta_\mu) q_\nu = -(1 + \Delta_\nu) (1 + \Delta_\mu) f, \quad \alpha = 1, 2, \quad \mu \neq \nu; \end{aligned}$$

sumować należy wg wskaźników oznaczonych kreską.

W postaci rozwiniętej otrzymamy

$$(1.8) \quad \begin{aligned} g_{11} A_1 + g_{21} A_2 + \sqrt{g} [(1 + \Delta_1) q_2 + \Gamma_{12}^2 A_3] &= g_{11} A_4 - g_{12} A_5, \\ g_{12} A_1 + g_{22} A_2 - \sqrt{g} [(1 + \Delta_2) q_1 + \Gamma_{12}^1 A_3] &= -g_{21} A_4 - g_{22} A_5, \\ \Delta_1 (1 + \Delta_2) q_1 + \Delta_2 (1 + \Delta_1) q_2 &= -(1 + \Delta_1) (1 + \Delta_2) f, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} A_1 &= \Delta\xi^1 \nabla_1 m_1^1 + \Delta\xi^2 \nabla_2 m_2^1 + \Delta\xi^1 \Delta\xi^2 \nabla_{21} m_1^1 + \Delta\xi^1 \Delta\xi^2 \nabla_{12} m_2^1, \\ A_2 &= \Delta\xi^1 \nabla_1 m_1^2 + \Delta\xi^2 \nabla_2 m_2^2 + \Delta\xi^1 \Delta\xi^2 \nabla_{21} m_1^2 + \Delta\xi^1 \Delta\xi^2 \nabla_{12} m_2^2, \\ A_3 &= (1 + \Delta_2) q_1 + (1 + \Delta_1) q_2, \quad A_4 = h^1 + \nabla_1 h^1 + \nabla_2 h^1 + \nabla_{12} h^1, \\ A_5 &= h^2 + \nabla_1 h^2 + \nabla_2 h^2 + \nabla_{12} h^2. \end{aligned}$$

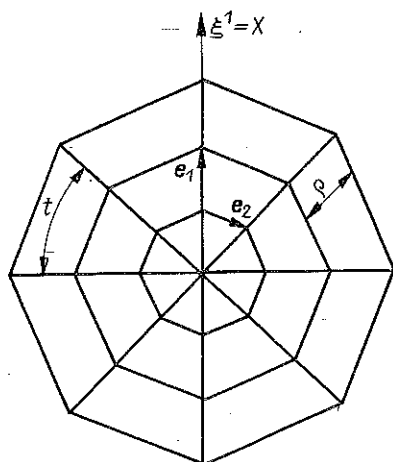
2. PŁYTA OSIOWO-SYMETRYCZNA

Rozważania nasze ograniczymy do płyty osiowo-symetrycznej obciążonej osiowo-symetrycznie. W tym przypadku rozwiązania zależą tylko od jednej zmiennej ξ^1 , którą oznaczymy przez x ($\xi^1 = x$; rys. 3). Geometrię takiej siatki [3] określają następujące obiekty:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} g_{ij} &= \begin{bmatrix} \rho^2 & -\rho^2 x(1 - \cos t) \\ -\rho^2 x(1 - \cos t) & 2\rho^2 x^2(1 - \cos t) \end{bmatrix}, \\ \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{x}, \quad \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{x}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -2(1 - \cos t)x, \quad \Gamma_{22}^2 = -2(1 - \cos t). \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu powyższych zależności możemy napisać pochodne kowariantne dla siatki osiowo-symetrycznej:

$$\begin{aligned}
 \nabla_1 a^1 &= \Delta_1 a^1, & \nabla_1 a^2 &= \frac{1}{x} [a^2 + (1+x) \Delta_1 a^2], \\
 \nabla_2 a^1 &= -2(1 - \cos t) x a^2, & \nabla_2 a^2 &= \frac{1}{x} a^1 - 2(1 - \cos t) a^2, \\
 \nabla_{12} a^1 &= \nabla_{21} a^1 = -2(1 - \cos t) [a^2 + (1+x) \nabla_1 a^2], \\
 \nabla_{12} a^2 &= \nabla_{21} a^2 = \frac{1}{x} \Delta_1 a^1 - \frac{1}{x} 2(1 - \cos t) [a^2 + (1+x) \Delta_1 a^2].
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$



Rys. 3

Związki fizyczne (1.6) dla osiowej symetrii będą następujące:

$$\begin{aligned}
 m_2^1(x) &= -\frac{D_2(x)}{t} \frac{\rho x \sin \frac{\rho}{2}}{2} [3\varphi^1(x) - 2(1 - \cos t) x \varphi^2(x)], \\
 m_1^2(x) &= -\frac{2D_1(x)}{\rho^3 x \sin t} \{3\Delta_1 w(x) + \rho^2 \sin t [2x \varphi^2(x) + (x+1) \varphi^2(x+1)]\}, \\
 m_1^1(x) &= \frac{B_1(x)}{\rho} [\Delta_1 \varphi^1(x) - (1 - \cos t) \Delta_1 x \varphi^2(x)] - \\
 &\quad - \frac{2D_1(x)(1 - \cos t)}{\rho^3 \sin t} \{3\Delta_1 w(x) + \rho^2 \sin t [2x \varphi^2(x) + (x+1) \varphi^2(x+1)]\},
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

$$(2.3) \quad m_2^2(x) = \frac{B_2(x)}{2\rho x^2 \sin \frac{t}{2}} [\varphi^1(x) - x(1 - \cos t) \varphi^2(x)] -$$

$$\text{[c.d.]} \quad - \frac{D_2(x)}{2\rho x^2 \sin \frac{t}{2}} [3\varphi^1(x) - 2(1 - \cos t) x \varphi^2(x)],$$

$$q_1(x) = \frac{6D_1(x)}{\rho^3} \{2A_1 w(x) + \rho^2 \sin t [(x+1) \varphi^2(x+1) + x \varphi^2(x)]\},$$

$$q_2(x) = \frac{3D_2(x) \sin t}{2\rho x^2 \sin^3 \frac{t}{2}} [(1 - \cos t) x \varphi^2(x) - \varphi^1(x)].$$

Równania równowagi (1.8) po pewnych przekształceniach będą miały następującą postać:

$$(2.4) \quad A_1 m_1^1(x) - (1 - \cos t) A_1 x m_1^2(x) + (1 - \cos t) E m_2^1(x) - 2(1 - \cos t) E x m_2^2(x) +$$

$$+ \sin t E x q_2(x) = E [(1 - \cos t) x h^2(x) - h^1(x)],$$

$$A_1 x m_1^2(x) + E m_2^1(x) - \frac{1}{\sin t} q_1(x) - \operatorname{tg} \frac{t}{2} E x q_2(x) = -E x h^2(x),$$

$$A_1 q_1(x) = -E f(x),$$

gdzie

$$(E-1)a(x) = A_1 a(x) = a(x+1) - a(x).$$

Po wykorzystaniu związków fizycznych (2.3) w równaniach równowagi (2.4) otrzymamy równania przemieszczeniowe:

$$(2.5) \quad L_1 w(x) + L_2 \varphi^2(x) = -E f(x),$$

$$S_1 w(x) + S_2 \varphi^2(x) = E x h^2(x),$$

$$P [\varphi^1(x) - x(1 - \cos t) \varphi^2(x)] = -E [h^1(x) - x(1 - \cos t) h^2(x)].$$

Występujące powyżej operatory mają następujące znaczenia:

$$(2.6) \quad L_1 = \frac{12}{\rho^3} A_1 D_1(x) A_1, \quad L_2 = \frac{6}{\rho} \sin t A_1 D_1(x) (E+1) x,$$

$$S_1 = \frac{6}{\rho^3 \sin t} (E+1) D_1(x) A_1,$$

$$S_2 = \frac{2}{\rho} \left\{ [A_1 D_1(x) (E+2) + 3D_1(x) (E+1)] x + \sin \frac{t}{2} E D_2(x) \right\},$$

$$P = \frac{1}{\rho} \left[A_1 B_1(x) A_1 - 2 \sin \frac{t}{2} E \frac{1}{x} B_2(x) - \frac{3 \sin^2 t}{2 \sin^3 \frac{t}{2}} E \frac{1}{x} D_2(x) \right].$$

Ostatnie równanie układu (2.5) ma rozwiązanie w przypadku, gdy

$$(2.7) \quad \varphi^1(x) - x(1 - \cos t) \varphi^2(x) = 0,$$

jeśli

$$h^1(x) - x(1 - \cos t) h^2(x) = 0.$$

Powyższe warunki są równoważne prostokątności wektorów \mathbf{H} i $\boldsymbol{\varphi}$ do \mathbf{e}_1 :

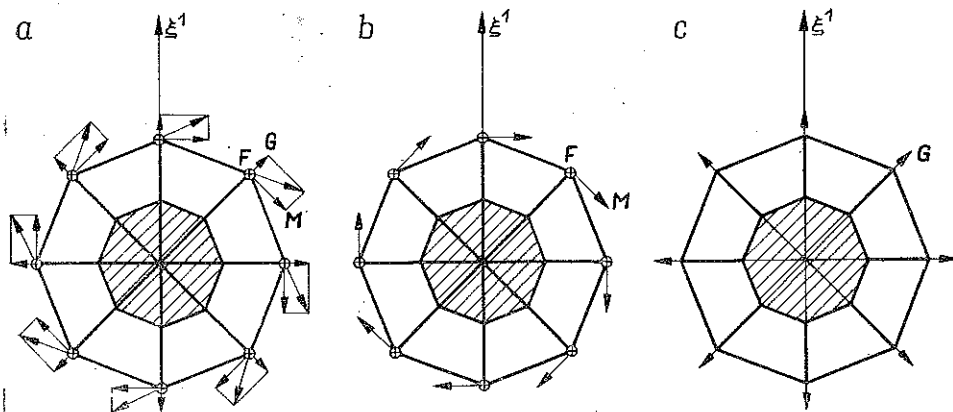
$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \quad \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{e}_1 = 0$$

lub

$$h^j g_{1j} = 0, \quad \varphi^j g_{1j} = 0.$$

Rozbijając obciążenie na symetryczne i antysymetryczne względem osi ξ^1 , otrzymamy prostsze rozwiązania. W przypadku symetrii (rys. 4b) węzły są obciążone siłą $\mathbf{F}(x)$ i momentem prostopadłym do osi x . Rozwiązanie otrzymamy wtedy z dwu pierwszych równań (2.5), natomiast równanie ostatnie spełnione jest tożsamościowo:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} L_1 \tilde{w}(x) + L_2 \tilde{\varphi}^2(x) &= -E f(x), & \tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{e}_1 &= 0, \\ S_1 \tilde{w}(x) + S_2 \tilde{\varphi}^2(x) &= E x \tilde{h}^2(x), & \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{e}_1 &= 0, \\ \tilde{\varphi}^1(x) &= x(1 - \cos t) \tilde{\varphi}^2(x). \end{aligned}$$



Rys. 4

W przypadku antysymetrii (rys. 4c) węzły mogą być tylko obciążone wektorem momentu $\hat{\mathbf{H}}$ pokrywającym się z osią x . Rozwiązanie otrzymamy z ostatniego równania (2.5):

$$(2.9) \quad P \hat{\varphi}^1(x) = -E \hat{h}^1(x), \quad \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{e}^2 = 0, \quad \hat{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{e}^2 = 0.$$

Rozwiązaniem dla dowolnego osiowo-symetrycznego obciążenia będzie zgodnie z zasadą superpozycji suma rozwiązań dla przypadku symetrii i antysymetrii:

$$(2.10) \quad w(x) = \tilde{w}(x), \quad \varphi^1(x) = \tilde{\varphi}^1(x) + \hat{\varphi}^1(x), \quad \varphi^2(x) = \tilde{\varphi}^2(x).$$

3. ROZWIĄZANIE DLA PRZYPADKU SYMETRII

Założymy, że sztywności zginania i skręcania prętów ramy nie zależą od x :

$$(3.1) \quad \begin{aligned} B_1(x) &= B_1, & D_1(x) &= D_1, \\ B_2(x) &= B_2, & D_2(x) &= D_2. \end{aligned}$$

W tym przypadku układ równań (2.8) będzie miał następującą postać:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \frac{12D_1}{\rho^3} A_1 A_1 \tilde{w}(x) + \frac{6D_1}{\rho} \sin t A_1 (E+1) x \tilde{\varphi}^2(x) &= -Ef(x), \\ \frac{6D_1}{\rho^3 \sin t} A_1 (E+1) \tilde{w}(x) + \frac{2}{\rho} \left[D_1 (E^2 + 4E + 1) + D_2 \sin \frac{t}{2} E \right] \tilde{\varphi}^2(x) &= Ex\tilde{h}^2(x). \end{aligned}$$

W pierwszym równaniu (3.2) możemy wyłączyć operator A_1 przed nawias:

$$(3.3) \quad A_1 \left[\frac{12D_1}{\rho^3} A_1 \tilde{w}(x) + \frac{6D_1}{\rho} \sin t (E+1) x \tilde{\varphi}^2(x) \right] = -A_1 \gamma(x),$$

gdzie

$$(3.4) \quad A_1 \gamma(x) = f(x+1).$$

Po rozwiązaniu otrzymamy

$$(3.5) \quad \frac{12D_1}{\rho^3} A_1 \tilde{w}(x) + \frac{6D_1}{\rho} \sin t (E+1) x \tilde{\varphi}^2(x) = - \left[\frac{1}{2} C + \gamma(x) \right],$$

gdzie C jest stałą dowolną.

Rugując następnie $\tilde{w}(x)$ z równania (3.5) i drugiego równania (3.2) otrzymamy

$$(3.6) \quad \begin{aligned} (x+2) \tilde{\varphi}^2(x+2) - 2 \left[x+1 + \frac{D_2}{D_1} \sin \frac{t}{2} \right] \tilde{\varphi}^2(x+1) + x \tilde{\varphi}^2(x) &= \\ &= - \frac{\rho}{D_1} \left\{ Ex\tilde{h}^2(x) + \frac{1}{2 \sin t} [C + (E+1) \gamma(x)] \right\}. \end{aligned}$$

Rozwiążmy najpierw równanie jednorodne

$$(3.7) \quad (x+2) \tilde{\varphi}^2(x+2) - 2 \left[x+1 + \frac{D_2}{D_1} \sin \frac{t}{2} \right] \tilde{\varphi}^2(x+1) + x \tilde{\varphi}^2(x) = 0.$$

Podstawiając

$$(3.8) \quad \tilde{\varphi}^2(x) = \frac{1}{x} u(x)$$

przekształcimy (3.8) w następujące równanie:

$$(3.9) \quad (x+1) u(x+2) - 2 \left[x+1 + \frac{D_2}{D_1} \sin \frac{t}{2} \right] u(x+1) + (x+1) u(x) = 0.$$

Równanie to było rozwiązane w pracy [5] przez podstawienie Laplace'a

$$(3.10) \quad u(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_a^b s^{x-1} \varphi(s) ds.$$

Rozwiązaniem jego jest funkcja

$$(3.11) \quad u(x) = C_1 \Gamma(x+1) \psi\left(x+1, 2; 2 \frac{D_2}{D_1} \sin \frac{t}{2}\right) + C_2 L_{(x-1)}^1\left(-2 \frac{D_2}{D_1} \sin \frac{t}{2}\right),$$

gdzie $\Gamma(x)$ oznacza funkcję Eulera, $\psi(a, b; c)$ konfluentną funkcję hipergeometryczną oraz $L_n^1(a)$ wielomian Laguerre'a.

Uwzględniając podstawienie (3.8) otrzymamy

$$(3.12) \quad \tilde{\varphi}^2(x) = \frac{1}{x} [C_1 \Gamma(x+1) \psi(x+1, 2; \beta) + C_2 L_{(x-1)}^1(-\beta)],$$

gdzie $\beta = 2 \frac{D_2}{D_1} \sin \frac{t}{2}$, a C_1, C_2 są to stałe dowolne.

Rozwiązanie szczególne równania (3.6) znajdziemy dla obciążenia węzłów tylko stałą siłą f :

$$\tilde{h}^2(x) = 0, \quad f(x) = f.$$

W tym przypadku równanie (3.6) przyjmie postać

$$(3.13) \quad (x+2) \tilde{\varphi}^2(x+2) - 2 \left(x+1 + \frac{D_2}{D_1} \sin \frac{t}{2}\right) \tilde{\varphi}^2(x+1) + x \tilde{\varphi}^2(x) = \\ = -\frac{\rho}{2D_1 \sin t} (C+f) - \frac{\rho}{D_1 \sin t} xf.$$

Rozwiązanie szczególne znajdziemy przewidując rozwiązanie w postaci $\tilde{\varphi}^2(x) = ax+b$ i porównując współczynniki przy potęgach x . Rozwiązaniem będzie funkcja

$$(3.14) \quad \tilde{\varphi}^2(x) = \frac{\rho}{2D_2 \sin t \sin \frac{t}{2}} \left[\frac{C}{2} + f \left(x - \frac{1}{2} + \frac{D_1}{D_2 \sin \frac{t}{2}} \right) \right].$$

Rozwiązaniem ogólnym równania (3.6) będzie sumą rozwiązań (3.12) i (3.14):

$$(3.15) \quad \tilde{\varphi}^2(x) = \frac{1}{x} [C_1 \Gamma(x+1) \psi(x+1, 2; \beta) + C_2 L_{(x-1)}^1(-\beta)] + \\ + \frac{\rho}{2D_2 \sin t \sin \frac{t}{2}} \left[\frac{C}{2} + f \left(\frac{D_1}{D_2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{\rho f}{2D_2 \sin t \sin \frac{t}{2}} x.$$

Funkcje ugięcia płyty znajdziemy z równania (3.5). Dla $f = \text{const}$ funkcja $\gamma(x)$ zgodnie z równaniem (3.4) ma postać

$$(3.16) \quad \Delta_1 \gamma(x) = f, \quad \gamma(x) = xf.$$

W rozwiązaniu skorzystamy z następujących własności konfluentnej funkcji hipergeometrycznej i wielomianu Laguerre'a:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \Delta_1 [-\Gamma(x+1)\psi(x+1, 3; \beta)] &= \Gamma(x+1)\psi(x+1, 2; \beta), \\ \Delta_1 L_{(x-2)}^2(-\beta) &= L_{(x-1)}^1(-\beta). \end{aligned}$$

Zależności te pozwolą na przepisanie równania (3.5) w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \Delta_1 \tilde{w}(x) &= -\frac{1}{2} \rho^2 \sin t \Delta_1 x \tilde{\varphi}^2(x) - \rho^2 \sin t [-C_1 \Delta_1 \Gamma(x+1)\psi(x+1, 3; \beta) + \\ &+ C_2 \Delta_1 L_{(x-2)}^2(-\beta)] + \frac{\rho^3}{12D_1} \Delta_1 \left\{ \frac{1}{2} \left[f \left(1 - \frac{5}{\sin \frac{t}{2}} \frac{D_1}{D_2} + \frac{6}{\sin^2 \frac{t}{2}} \frac{D_1^2}{D_2^2} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C \left(\frac{3}{\sin \frac{t}{2}} \frac{D_1}{D_2} - 1 \right) \right] x - \left[\frac{3}{2 \sin \frac{t}{2}} \frac{D_1}{D_2} C + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f \left(\frac{3}{\sin^2 \frac{t}{2}} \frac{D_1^2}{D_2^2} - \frac{9}{2 \sin \frac{t}{2}} \frac{D_1}{D_2} + \frac{1}{2} \right) \right] x^2 - f \frac{2}{\sin \frac{t}{2}} \frac{D_1}{D_2} x^3 \right\}. \end{aligned}$$

Stąd ugięcie płyty określać będzie funkcja

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \tilde{w}(x) &= -\frac{1}{2} \rho^2 \sin t \{ C_1 \Gamma(x+1) [\psi(x+1, 2; \beta) - 2\psi(x+1, 3; \beta)] + \\ &+ C_2 [L_{(x-1)}^1(-\beta) + 2L_{(x-2)}^2(-\beta)] \} + \frac{\rho^3}{12D_1} \left[\left[f \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \frac{D_1}{D_2} \right) - \frac{1}{2} C \right] x - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{3}{2 \sin \frac{t}{2}} \frac{D_1}{D_2} C + f \left(\frac{3}{\sin^2 \frac{t}{2}} \frac{D_1^2}{D_2^2} - \frac{3}{2} \frac{D_1}{\sin \frac{t}{2}} + \frac{1}{2} \right) \right] x^2 - f \frac{2}{\sin \frac{t}{2}} \frac{D_1}{D_2} x^3 \right] + A, \end{aligned}$$

gdzie $\beta = 2 \frac{D_1}{D_2} \sin \frac{t}{2}$, a symbole C_1, C_2, C i A oznaczają stałe dowolne.

W ten sposób przemieszczenia określają trzy funkcje: $\tilde{w}(x)$ (3.18), $\tilde{\varphi}^2(x)$ (3.15) oraz funkcja

$$(3.19) \quad \tilde{\varphi}^1(x) = x(1 - \cos t) \tilde{\varphi}^2(x).$$

Stan naprężenia otrzymamy ze wzorów (2.3):

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \tilde{m}_2^1(x) &= -\frac{D_2}{\rho x \sin \frac{t}{2}} \tilde{\varphi}^1(x), & \tilde{m}_2^2(x) &= -\frac{D_2}{2\rho x^2 \sin \frac{t}{2}} \tilde{\varphi}^1(x), \end{aligned}$$

$$\tilde{m}_1^1(x) = -\frac{2D_1(1 - \cos t)}{\rho^3 \sin t} [3A_1 \tilde{w}(x) + \rho^2 \sin t (E+2) x \tilde{\varphi}^2(x)],$$

$$(3.20) \quad \tilde{m}_1^2(x) = -\frac{2D_1}{\rho^3 x \sin t} [3A_1 \tilde{w}(x) + \rho^2 \sin t (E+2) x \tilde{\varphi}^2(x)],$$

[c.d.]

$$\tilde{q}_1(x) = -\left(\frac{1}{2} C + xf\right), \quad \tilde{q}_2(x) = 0.$$

Zwróćmy uwagę na warunek

$$\tilde{m}_1^1(x) - x(1 - \cos t) \tilde{m}_1^2(x) = 0.$$

Wyraża on prostopadłość wektora $\tilde{\mathbf{M}}_1$ do osi x , czyli $\tilde{\mathbf{M}}_1$ jest momentem zginającym.

4. ROZWIĄZANIE W PRZYPADKU ANTYSYMETRII

Równanie (2.9) po wykonaniu działań określonych przez operator otrzymuje następującą formę:

$$(4.1) \quad (x+1) \hat{\varphi}^1(x+2) - 2 \left(x+1 + \frac{1}{2} \beta_1 \right) \hat{\varphi}^1(x+1) + \\ + (x+1) \hat{\varphi}^1(x) = -\frac{\rho}{B_1} (x+1) \hat{h}^1(x+1),$$

gdzie

$$(4.2) \quad \beta_1 = 2 \sin \frac{t}{2} \frac{B_2}{B_1} + \frac{3}{2} \frac{\sin^2 t}{\sin^3 \frac{t}{2}} \frac{D_2}{B_1}.$$

Rozwiążemy najpierw równanie jednorodne

$$(4.3) \quad (x+1) \hat{\varphi}^1(x+2) - 2 \left(x+1 + \frac{1}{2} \beta_1 \right) \hat{\varphi}^1(x+1) + (x+1) \hat{\varphi}^1(x) = 0.$$

Równanie (4.3) jest identyczne z równaniem (3.9) i ma takie samo rozwiązanie:

$$(4.4) \quad \hat{\varphi}^1(x) = A_1 \Gamma(x+1) \psi(x+1, 2; \beta_1) + A_2 L_{(x-1)}^1(-\beta_1).$$

Rozwiązanie szczególne równania (4.1) znajdziemy dla przypadku stałego momentu obciążającego węzeł:

$$(4.5) \quad \hat{h}^1(x+1) = \hat{h}^1(x) = \hat{h}, \\ (x+1) \hat{\varphi}^1(x+2) - 2 \left(x+1 + \frac{1}{2} \beta_1 \right) \hat{\varphi}^1(x+1) + (x+1) \hat{\varphi}^1(x) = -\frac{\rho}{B_1} (x+1) \hat{h}.$$

Przewidując rozwiązanie w postaci $\hat{\varphi}^1(x) = ax + b$ i porównując współczynniki przy potęgach x , otrzymamy

$$(4.6) \quad \hat{\varphi}^1(x) = \frac{1}{\beta_1} \frac{\rho}{B_1} \hat{h}x,$$

Rozwiązaniem pełnym będzie suma rozwiązań (4.4) i (4.6):

$$(4.7) \quad \hat{\varphi}^1(x) = A_1 \Gamma(x+1) \psi(x+1, 2; \beta_1) + A_2 L_{(x-1)}^1(-\beta_1) + \frac{1}{\beta_1} \frac{\rho}{B_1} \hat{h}x,$$

gdzie A_1, A_2 są to stałe dowolne.

W rozwiązaniu dla przypadku antysymetrii $\hat{\varphi}^1(x)$ jest jedyną funkcją określającą przemieszczenie, ponieważ

$$(4.8) \quad \hat{w} = 0, \quad \hat{\varphi}^2 = 0.$$

Stan naprężenia znajdziemy ze wzorów (2.3). Otrzymamy następujące wyniki:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \hat{m}_2^1(x) &= -\frac{3D_2 \sin t}{2\rho \sin^3 \frac{t}{2}} \frac{1}{x^2} \hat{\varphi}^1(x), & \hat{m}_1^2(x) &= 0, \\ \hat{m}_1^1(x) &= \frac{B_1}{\rho} A_1 \hat{\varphi}^1(x), & \hat{m}_2^2(x) &= \frac{1}{2\rho \sin \frac{t}{2}} (B_2 - 3D_2) \frac{1}{x^2} \hat{\varphi}^1(x), \\ \hat{q}_1(x) &= 0, & \hat{q}_2(x) &= -\frac{3}{2} \frac{D_2 \sin t}{\rho \sin^3 \frac{t}{2}} \frac{1}{x^2} \hat{\varphi}^1(x). \end{aligned}$$

5. PRZYKŁADY

Wypiszemy najpierw wartości funkcji $\psi(a, b; \beta)$ i $L_n^\alpha(-\beta)$ w potrzebnych punktach:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \psi(1, 1; \beta) &= -\zeta(\beta), & \psi(1, 2; \beta) &= \frac{1}{\beta}, & \psi(1, 3; \beta) &= \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}, \\ \psi(2, 2; \beta) &= \frac{1}{\beta} + \zeta(\beta), & \psi(3, 2; \beta) &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{\beta} + (2+\beta) \zeta(\beta) \right], \\ \psi(4, 2; \beta) &= \frac{1}{6} \left[\frac{1}{\beta} + \frac{1}{2} \beta + \frac{5}{2} \left(3+3\beta + \frac{1}{2} \beta^2 \right) \zeta(\beta) \right], \\ \psi(5, 2; \beta) &= \frac{1}{72} \left[\frac{3}{\beta} + 13 + \frac{11}{2} \beta + \frac{1}{2} \beta^2 + 6 \left(2+3\beta + \beta^2 + \frac{1}{12} \beta^3 \right) \zeta(\beta) \right], \\ \psi(2, 3; \beta) &= \frac{1}{\beta^2}, & \psi(3, 3; \beta) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\beta} - \zeta(\beta) \right], \\ \psi(4, 3; \beta) &= -\frac{1}{6\beta} \left[-\frac{1}{\beta} + \beta + 2 + (3\beta + \beta^2) \zeta(\beta) \right], \end{aligned}$$

$$(5.1) \quad \psi(5, 3; \beta) = -\frac{1}{24\beta} \left[-\frac{1}{\beta} + 3 + \frac{7}{2}\beta + \frac{1}{2}\beta^2 + \left(6\beta + 4\beta^2 + \frac{1}{2}\beta^3\right) \zeta(\beta) \right],$$

[c.d.]

$$\psi(3, 1; \beta) = -\frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\beta + \left(1 + 2\beta + \frac{1}{2}\beta^2\right) \zeta(\beta) \right],$$

$$L_1^0(-\beta) = 1 + \beta, \quad L_1^1(-\beta) = 2 + \beta,$$

$$L_2^0(-\beta) = 1 + 2\beta + \frac{1}{2}\beta^2, \quad L_2^1(-\beta) = 3 + 3\beta + \frac{1}{2}\beta^2,$$

$$L_3^1(-\beta) = 4 + 6\beta + 2\beta^2 + \frac{1}{6}\beta^3, \quad L_3^0(-\beta) = 1,$$

$$L_1^2(-\beta) = 3 + \beta,$$

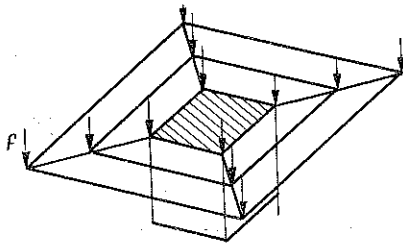
$$L_2^2(-\beta) = 6 + 4\beta + \frac{1}{2}\beta^2,$$

$$L_{-n}^k(-\beta) = 0,$$

gdzie $\zeta(\beta)$ wyrażone jest przez funkcję wykładniczą e i całkową funkcję wykładniczą Ei w następujący sposób:

$$\zeta(\beta) = e^\beta Ei(-\beta).$$

Przykład 1. Znajdziemy rozwiązanie dla ramy przedstawionej na rys. 5 dla $t = \pi/2$, znajdującej się pod działaniem stałego obciążenia f . Sztywności zginania prętów spełniają warunek $D_1 = D_2 = D$.



Rys. 5

Obciążenie jest symetryczne. Rozwiązaniem będą funkcje (3.15), (3.18), (3.19) i (3.20). Stałe obliczymy z następujących warunków brzegowych:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \tilde{w}(1) &= 0, & \tilde{m}_1^1(3) &= 0, \\ \tilde{\varphi}^2(1) &= 0, & \tilde{q}_1(3) &= 0. \end{aligned}$$

Przed przystąpieniem do wyliczenia stałych wygodniej będzie wyrazić $\tilde{m}_1^1(x)$ przez funkcje $\tilde{\varphi}^1(x)$. Ze wzorów (3.20) mamy

$$\tilde{m}_1^1(x) = -\frac{2D_1(1-\cos t)}{\rho^3 \sin t} [3A_1 \tilde{w}(x) + \rho^2 \sin t (E+2)x \tilde{\varphi}^2(x)].$$

Z zależności (3.5) określimy $A_1 \tilde{w}(x)$ i korzystając ze wzoru (3.19) otrzymamy

$$(5.3) \quad \tilde{m}_1^1(x) = \frac{D_1}{\rho} A_1 \tilde{\varphi}^1(x) + \frac{1-\cos t}{2 \sin t} \left[\frac{1}{2} C + \gamma(x) \right]$$

dla $f = \text{const}$ oraz $\gamma(x) = xf$.

Warunek $\tilde{q}_1(3) = 0$ pozwoli nam wyliczyć stałą C :

$$(5.4) \quad C = -6f.$$

Stałe C_1 i C_2 znajdziemy z warunków

$$(5.5) \quad \tilde{\varphi}^2(1)=0, \quad \tilde{m}_1^1(3)=0.$$

Korzystając z zależności (5.3) i (5.4) przekształcimy drugi warunek do postaci

$$\tilde{\varphi}^1(4) - \tilde{\varphi}^1(3) = 0.$$

Po rozwiązaniu otrzymamy

$$(5.6) \quad C_1 = \frac{32 + \frac{41}{2}\sqrt{2}}{7 + 4\sqrt{2}} \frac{\rho f}{D},$$

$$C_2 = -\frac{1}{7 + 4\sqrt{2}} \left[\frac{35}{2} + \frac{45}{4}\sqrt{2} + \left(32 + \frac{41}{2}\sqrt{2} \right) e^{\sqrt{2}} Ei(-\sqrt{2}) \right].$$

Z warunku $\tilde{w}(1)=0$ znajdziemy stałą A :

$$(5.7) \quad A = \frac{1}{2} \rho^2 \left[C_1 \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 + e^{\sqrt{2}} Ei(-\sqrt{2}) \right) + C_2 \right] + \frac{\rho^3 f}{12D} \left(3 - \frac{15}{2}\sqrt{2} \right).$$

Wzory (3.15), (3.18), (3.19) i (3.20) po wstawieniu obliczonych stałych i $t = \pi/2$ określają stan odkształcenia i naprężenia płyty.

Obliczymy przykładowo przemieszczenia brzegu płyty:

$$(5.8) \quad \tilde{\varphi}^2(3) = -\frac{\rho f}{D} \frac{5 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{8 + 7\sqrt{2}}, \quad \tilde{\varphi}^1(3) = 3\tilde{\varphi}^2(3),$$

$$\tilde{w}(3) = \frac{\rho^3 f}{D} \frac{43 + 11\sqrt{2}}{2(8 + 7\sqrt{2})}.$$

Wektor kąta obrotu jest zgodnie z (2.8) prostopadły do pręta promieniowego i posiada moduł

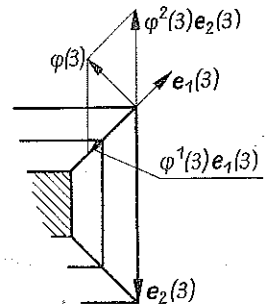
$$(5.9) \quad \varphi = \sqrt{g_{ij} \varphi^i \varphi^j}.$$

Po wykorzystaniu zależności (2.1) i (3.19) otrzymamy

$$(5.10) \quad \varphi(x) = \rho \sin tx \varphi^2(x).$$

W naszym przypadku

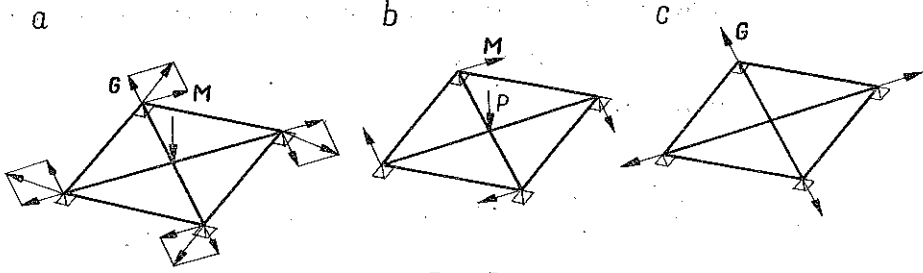
$$(5.11) \quad |\varphi(3)| = \varphi(3) = \frac{\rho^2 f}{D} \frac{3 \left(5 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \right)}{8 + 7\sqrt{2}}.$$



Rys. 6

Znaki ujemne przy $\varphi^1(3)$ i $\varphi^2(3)$ określają zwrot wektora φ jak to przedstawiono na rys. 6. Natomiast $\tilde{w}(3)$ jest bezpośrednio dodatnim ugięciem, zwróconym pod płaszczyznę (rys. 6).

Przykład 2. Rozwiążemy ramę przedstawioną na rys. 7a dla $t = \pi/2$, obciążoną siłą skupioną w ośrodku P oraz momentem leżącym w płaszczyźnie ramy i nachylnym do pręta promieniowego o składowych G i M .



Rys. 7

Zadanie rozbijemy na symetryczne (rys. 7b) i antysymetryczne (rys. 7c). W zadaniu symetrycznym stałe znajdziemy z następujących warunków brzegowych:

$$(5.12) \quad \begin{aligned} \tilde{w}(1) &= 0, & \tilde{m}_1^1(1) &= \frac{1}{\rho} M, \\ \tilde{q}_1(1) &= -\frac{1}{4} P, & \tilde{\varphi}^1(0) &= 0. \end{aligned}$$

Wartości i znaki wielkości $\tilde{q}_1(1)$, $\tilde{m}_1^1(1)$ widać na rys. 8. Z warunku $\tilde{q}_1 = -\frac{1}{4}P$ znajdziemy

$$(5.13) \quad C = \frac{P}{2}.$$

Warunek $\tilde{\varphi}^1(0) = 0$ pozwoli nam znaleźć stałą $C_1 = 0$. Stałą C_2 znajdziemy z warunku $m_1^1(1) = 1/\rho M$:

$$(5.14) \quad C_2 = \frac{k}{k+\sqrt{2}} \frac{M}{D_1} - \frac{k(1+k\sqrt{2})}{8(k+\sqrt{2})} \frac{P\rho}{D_1},$$

gdzie k jest stosunkiem sztywności zginania prętów promieniowych do obwodowych:

$$(5.15) \quad k = \frac{D_1}{D_2}.$$

Stałą A wyznaczymy z warunku $\tilde{w}(1) = 0$:

$$(5.16) \quad A = \frac{k}{2(k+\sqrt{2})} \frac{M\rho^2}{D_1} + \frac{4k+\sqrt{2}}{48(k+\sqrt{2})} \frac{P\rho^3}{D_1}.$$

Po wstawieniu obliczonych stałych oraz $t = \pi/2$ do równań (3.15), (3.18), (3.19) i (3.20) będziemy mieli określony stan naprężenia i odkształcenia w płycie. Przykładowo kąt obrotu na brzegu opisują funkcje

$$(5.17) \quad \tilde{\varphi}^1(1) = \tilde{\varphi}^2(1) = \frac{k}{k+\sqrt{2}} \frac{M}{D_1} + \frac{k}{8(k+\sqrt{2})} \frac{P\rho}{D_1}.$$

Wektor kąta obrotu jest prostopadły do pręta promieniowego o zwrocie zgodnym ze zwrotem momentu M . Ugięcie w środku wynosi

$$(5.18) \quad \tilde{w}(0) = A.$$

Rozwiązanie dla części antysymetrycznej znajdziemy z następujących warunków brzegowych:

$$(5.19) \quad \hat{\varphi}^1(0) = 0, \quad \hat{m}_1^1(1) = \frac{1}{\rho} G.$$

Pierwszy warunek da nam

$$(5.20) \quad A_1 = 0,$$

z drugiego natomiast znajdziemy

$$(5.21) \quad A_2 = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{2}}{k_1}(3 + k_2)} \frac{G}{B_1},$$

gdzie k_1 jest stosunkiem sztywności skręcania pręta promieniowego do sztywności zginania pręta obwodowego, $k_1 = B_1/D_2$ oraz k_2 jest stosunkiem sztywności skręcania pręta obwodowego do sztywności zginania pręta obwodowego, $k_2 = B_2/D_2$.

Stan odkształcenia i naprężenia określają wzory (4.7), (4.8) i (4.9). Kąt obrotu na brzegu wynosi

$$(5.22) \quad \hat{\varphi}^1(1) = \frac{k_1 \sqrt{2}}{k_1 \sqrt{2} + 2k_2 + 6} \frac{G}{B_1}, \quad \hat{\varphi}^2(1) = 0.$$

Kierunek i zwrot wektora kąta obrotu $\hat{\varphi}(1)$ są takie same jak wektora G . Natomiast moduł

$$(5.23) \quad |\hat{\varphi}(1)| = \hat{\varphi}(1) = \rho \hat{\varphi}^1(1).$$

Przykład 3. Znajdziemy rozwiązanie dla płyty utwierdzonej na brzegu i obciążonej siłą skupioną P w ośrodku oraz obciążeniem stałym f przyłożonym w węzłach (rys. 9).

Liczba prętów promieniowych n jest równa $n = 2\pi/t$. Obciążenie jest symetryczne. Stałe wyznaczmy z następujących warunków brzegowych:

$$(5.24) \quad \begin{aligned} \tilde{\varphi}^1(0) &= 0, & \tilde{w}(a) &= 0, \\ \tilde{\varphi}^2(a) &= 0, & \tilde{q}_1(a) &= -\left(\frac{P}{n} + af\right). \end{aligned}$$

Znak ujemny wynika stąd, że zwrot reakcji na brzegu płyty jest przeciwny założonemu na rys. 2 dodatniemu zwrotowi siły poprzecznej q_1 . Z warunku $\tilde{\varphi}^1 = 0$ otrzymamy stałą

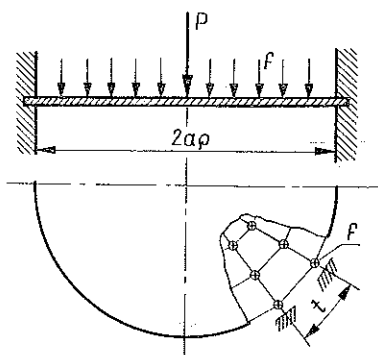
$$(5.25) \quad C_1 = 0.$$

Stałą C obliczymy z warunku $\tilde{q}_1(a) = -\left(\frac{P}{n} + af\right)$:

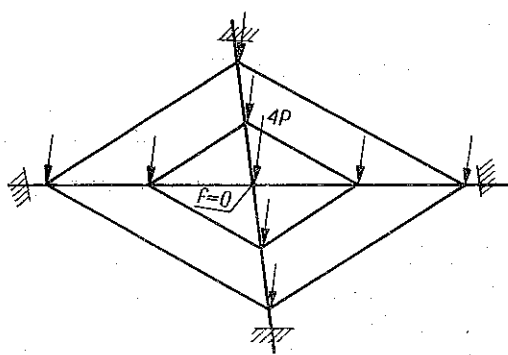
$$(5.26) \quad C = \frac{2P}{n}.$$

Warunek $\tilde{\varphi}^2(a) = 0$ pozwoli na określenie stałej C_2 :

$$(5.27) \quad C_2 = -\frac{\rho}{2D_2 \sin t \sin \frac{t}{2}} \frac{a}{L_{(a-1)}^1(-\beta)} \left[\frac{P}{n} + f \left(\frac{D_1}{D_2 \sin \frac{t}{2}} + a - \frac{1}{2} \right) \right].$$



Rys. 9



Rys. 10

Ostatnią stałą A otrzymamy z warunku $\tilde{w}(a) = 0$

$$(5.28) \quad A = \frac{1}{2} \sin t C_2 \left[L_{(a-1)}^1(-\beta) + 2L_{(a-2)}^2(-\beta) \right] - \frac{\rho^3}{12D_1} \left\{ \left[f \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \frac{D_1}{D_2} \right) - \frac{P}{n} \right] a - \left[\frac{3}{\sin \frac{t}{2}} \frac{D_1}{D_2} \frac{p}{n} + f \left(\frac{3}{\sin^2 \frac{t}{2}} \frac{D_1^2}{D_2^2} - \frac{3}{2} \frac{D_1}{D_2 \sin \frac{t}{2}} + \frac{1}{2} \right) \right] a^2 - f \frac{2}{\sin \frac{t}{2}} \frac{D_1}{D_2} a^3 \right\}.$$

Stan odkształcenia i naprężenia po wstawieniu stałych określają wzory (3.15) (3.18), (3.19) i (3.20). Ugięcie w środku $\tilde{w}(0) = A$.

Przykładowo dla $t = \pi/2$, $a = 2$ (rys. 10) otrzymamy:

$$C = 2P, \quad C_1 = 0,$$

$$(5.29) \quad C_2 = -\frac{k^2 \rho}{(2k + \sqrt{2})D_1} \left[\sqrt{2}P + f \left(2k + \frac{3}{2}\sqrt{2} \right) \right],$$

$$A = \frac{\rho^3}{(2k + \sqrt{2})D_1} \left[P \left(\frac{1}{6}\sqrt{2} + \frac{4}{3}k \right) + f \left(\frac{1}{12}\sqrt{2} + \frac{2}{3}k \right) \right].$$

Przykład 4. Płyta z otworem w środku pod działaniem stałego obciążenia f przyłożonego w węzłach oraz momentem M na zewnętrznym brzegu (rys. 11).

Warunki brzegowe:

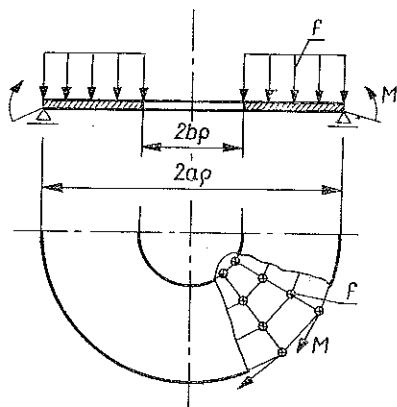
$$(5.30) \quad \begin{aligned} \tilde{w}(a) &= 0, & \tilde{m}_1^1(a) &= \frac{1}{\rho} \operatorname{tg} \frac{t}{2} M, \\ \tilde{q}_1(b) &= -f, & \tilde{m}_1^1(b-1) &= 0. \end{aligned}$$

Z warunku $q_1(b) = -f$ znajdziemy

$$(5.31) \quad C = 2(1-b)f.$$

Warunki

$$(5.32) \quad \tilde{m}_1^1(b-1) = 0, \quad \tilde{m}_1^1(a) = \frac{1}{\rho} \operatorname{tg} \frac{t}{2} M$$



Rys. 11

po wykorzystaniu wzoru (5.3) dadzą następujący układ równań na stałe C_1 i C_2 :

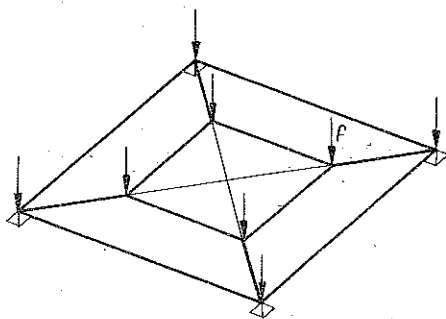
$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^1(b) - \tilde{\varphi}^1(b-1) &= 0, \\ \tilde{\varphi}^1(a+1) - \tilde{\varphi}^1(a) &= \frac{M}{D_1} \operatorname{tg} \frac{t}{2} - \frac{1 - \cos t}{2 \sin t} (a-b+1) \frac{f\rho}{D_1} \end{aligned}$$

lub po wstawieniu wartości

$$(5.33) \quad \begin{aligned} C_1 \Gamma(b) \psi(b, 1; \beta) - C_2 L_{(b-1)}^0(-\beta) &= \frac{pf}{2D_2 \sin t \sin \frac{t}{2}} \left(b - \frac{1}{2} + \frac{D_1}{D_2 \sin \frac{t}{2}} \right), \\ C_1 \Gamma(a+1) \psi(a+1, 1; \beta) - C_2 L_a^0(-\beta) &= \\ &= \frac{pf}{2D_2 \sin t \sin \frac{t}{2}} \left[\frac{3}{2} - b + 2a + \frac{D_1}{D_2 \sin \frac{t}{2}} + \frac{D_2}{D_1} \sin \frac{t}{2} (a-b+1) \right] - \frac{1}{\sin t} \frac{M}{D_1} \end{aligned}$$

Z warunku $\tilde{w}(a)=0$ znajdziemy wartość stałej A :

$$(5.34) \quad A = \frac{1}{2} \rho^2 \sin t \{ C_1 \Gamma(a+1) [\psi(a+1, 2; \beta) - 2\psi(a+1, 3; \beta)] + \\ + C_2 [L_{(a-1)}^1(-\beta) + 2L_{(a-2)}^2(-\beta)] - \frac{\rho^3 f}{12D_1} \left[\left[b - \frac{1}{2} - \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \frac{D_1}{D_2} \right] a - \right. \\ \left. - \left[\frac{3}{2} \frac{D_1}{D_2 \sin \frac{t}{2}} (1-2b) + \frac{3}{\sin^2 \frac{t}{2}} \frac{D_1^2}{D_2^2} + \frac{1}{2} \right] a^2 - \frac{2}{\sin \frac{t}{2}} \frac{D_1}{D_2} a^3 \right] \}.$$



Rys. 12

Przykładowo dla płyty $t=\pi/2$, $a=2$, $b=1$ (rys. 12), otrzymamy

$$(5.35) \quad C = 0, \quad C_1 = \frac{\rho f}{D_1} \frac{2k + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{3k + \sqrt{2}}, \\ C_2 = -\frac{\rho f}{D_1} \frac{1}{\sqrt{2} + 3k} \left[\frac{1}{2}k + \frac{7}{4}\sqrt{2}k^2 + 3k^3 + \left(2k + \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) e^{\frac{\sqrt{2}}{k}} Ei \left(-\frac{\sqrt{2}}{k} \right) \right], \\ A = \frac{1}{2} \rho^2 \left\{ C_1 \left[1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}k - k^2 + \left(4 + \sqrt{2} \frac{1}{k} \right) e^{\frac{\sqrt{2}}{k}} Ei \left(-\frac{\sqrt{2}}{k} \right) \right] + \right. \\ \left. + C_2 \left(4 + \sqrt{2} \frac{1}{k} \right) \right\} + \frac{\rho^3 f}{12D_1} (1 + 6\sqrt{2}k + 24k^2).$$

Składowe kąta obrotu i ugięcie na brzegu otworu wyniosą:

$$(5.36) \quad \tilde{\varphi}^1(1) = \tilde{\varphi}^2(1) = \frac{\rho f}{D_1} \frac{k + 2\sqrt{2}k^2}{2(2\sqrt{2} + 3k)}, \\ \tilde{w}(1) = \frac{1}{2(\sqrt{2} + 3k)} \left(\frac{1}{6} \sqrt{2} + 2k + 2\sqrt{2}k^2 \right) \frac{f\rho^3}{D_1}.$$

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. H. FRĄCKIEWICZ, *Geometry of a discrete set of points*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. tech., **14**, 2, 1966.
2. H. FRĄCKIEWICZ, *Deformation of a discrete set of points*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. tech., **14**, 9, 1966.
3. H. FRĄCKIEWICZ, *A plane problem of the theory of elasticity for media with a discrete lattice structure*, Arch. Mech. Stos., **19**, 5, 1967.
4. H. FRĄCKIEWICZ, *The bending problem of plane grates of discrete structure*, Arch. Mech. Stos., **22**, 2, 1970.
5. J. ŚLIŻEWICZ, *Plaskie osiowo-symetryczne zadanie teorii sprężystości w ośrodku dyskretnym*, Rozpr. Inżyn., **17**, 4, 1969.

Резюме

ИЗГИБ И КРУЧЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКИ
С ДИСКРЕТНОЙ СТРУКТУРОЙ

Основываясь на теории дискретной среды, выведенной Г. Фронцкевичем, дается решение для осесимметрической пластинки, нагруженной осесимметрическими силами, перпендикулярными к плоскости и векторами моментов, расположенными в плоскости пластинки. Общее решение получено из уравнений в перемещениях, являющихся системой трех линейных уравнений в конечных разностях с переменными коэффициентами. В конкретных случаях, найдены перемещения и напряжения, определяя произвольные постоянные по крайним условиям.

SUMMARY

BENDING AND TWISTING OF AXI-SYMMETRICAL PLATE
OF A DISCRETE STRUCTURE

On the basis of the theory of a discrete medium introduced by H. Frąckiewicz, an axi-symmetric plate was dissolved, loaded axial-symmetrically with forces perpendicular to the plane and vectors of moments lying in the plane of a plate. The general solutions have been obtained from the dislocated equations determining a set of a three differential linear equations having changeable coefficients. In the concrete examples, the dislocations and stresses were found facultative constants being calculated from the boundary conditions.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 lipca 1970 r.