

## OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEGO SŁUPA PRZY OGÓLNYM KONSERWATYWNYM ZACHOWANIU SIĘ OBCIĄŻENIA

ANTONI GAJEWSKI (KRAKÓW)

### 1. WSTĘP

Praca niniejsza stanowi rozwinięcie i uogólnienie prac M. ŻYCZKOWSKIEGO i autora [2, 3 i 4] na przypadki optymalnego kształtowania prętów ściskanych, których jedna część znajduje się w stanie sprężystym, a druga w stanie sprężysto-plastycznym. Rozpatrując realne materiały konstrukcyjne mamy z reguły do czynienia z takim właśnie przypadkiem, bowiem przy założeniu idealnej sprężystości materiału powierzchnie niektórych przekrojów zmierzają do zera. W pracy [2] rozwiązano zagadnienie optymalizacji kształtu prętów sprężystych, ściskanych siłą skierowaną do bieguna, w [3] rozwiązano to samo zagadnienie w zakresie sprężysto-plastycznym, w [4] znaleziono optymalne kształty prętów sprężystych w ogólnym przypadku konserwatywnego zachowania się obciążenia, w pracach [5 i 10] podjęto próbę optymalizacji prętów sprężystych i niesprężystych ściskanych siłą podśledzącą (zagadnienia niekonserwatywne). We wszystkich powyższych pracach zakładano, że cały pręt znajduje się w całości albo w stanie sprężystym albo sprężysto-plastycznym, co stanowiło ograniczenie zakresu stosowalności.

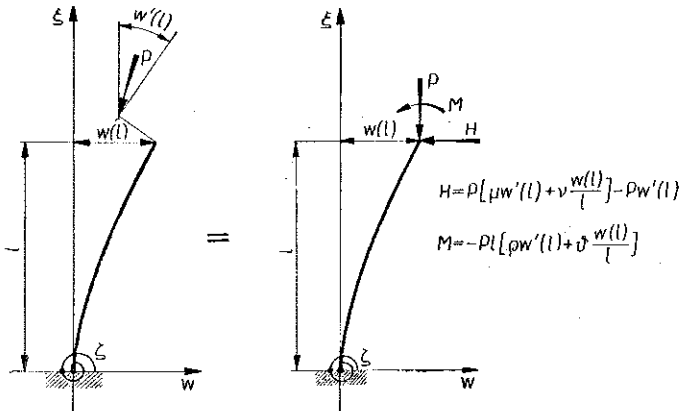
Obecnie znajdziemy optymalne kształty prętów, których jedna część (dolna) znajduje się w stanie sprężystym, a druga (górną) sprężysto-plastycznym, a ponadto przyjmujemy, iż pręt jest ściskany siłą, która po wyboczeniu zmienia nie tylko swój kierunek, ale i punkt przyłożenia. Założymy jednak, że w trakcie wyboczenia zachowuje się ona w sposób konserwatywny (posiada potencjał), co pozwoli oprócz dalsze rozważania na statycznym kryterium stateczności.

W wymienionych wyżej pracach podano obszerną literaturę, dotyczącą rozwiązywanych tu zagadnień i dlatego nie będziemy ponownie przytaczać wszystkich cytowanych tam prac.

### 2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

2.1. Przedmiotem rozważań będzie sprężyste utwierdzony pręt ściskany siłą, działającą na jego swobodnym końcu, o zmieniającym się (w trakcie wyboczenia) kierunku działania oraz punkcie przyłożenia. Przed wyboczeniem siła działa w sposób idealnie osiowy. Natomiast rozpatrując układ po wyboczeniu założymy (zgodnie

z pracą Z. KORDAS [6]), że przesunięcie punktu przyłożenia siły i nachylenie jej do kierunku stycznej do osi pręta w końcowym jego przekroju są analitycznymi funkcjami strzałki ugięcia  $w(l)$  i kąta  $w'(l)$  (rys. 1). Ograniczając się do analizy ugięć nieskończenie małych przyjmujemy, że moment i siła poprzeczna w przekroju swobodnym pręta są liniowymi funkcjami zmiennych  $w(l)$  i  $w'(l)$ .



Rys. 1

Warunkiem utwierdzenia sprężystego będzie proporcjonalność momentu utwierdzenia do kąta obrotu przekroju utwierdzonego.

Kształt przekroju poprzecznego pręta i jego związek z momentem bezwładności przekroju scharakteryzujemy zależnością

$$(2.1) \quad \varphi(\xi) = [g(\xi)]^\kappa, \quad F(\xi) = F_0 \varphi(\xi), \quad J = J_0 g(\xi), \quad F(\xi_0) = F_0, \quad J(\xi_0) = J_0,$$

gdzie  $g(\xi)$  oznacza moment bezwładności,  $\varphi(\xi)$  pole powierzchni przekroju, a wykładnik  $\kappa$  określa sposób wybożenia pręta; w najważniejszych przypadkach  $\kappa=1$  (pręt płaskozbieżny podlegający wybożeniu z płaszczyzny zbieżności),  $\kappa=1/2$  (pręt wszechstronnie równomiernie zbieżny) i  $\kappa=1/3$  (pręt płasko-zbieżny, podlegający wybożeniu w płaszczyźnie zbieżności). We wzorach tych  $F_0$  i  $J_0$  oznaczają pole powierzchni i moment bezwładności w pewnym na ogół dowolnie dobranym punkcie  $\xi = \xi_0$ .

2.2. Aby nie zawęźać rozważań, przyjmujemy, że część pręta (od utwierdzenia do chwilowo nieokreślonego punktu  $\xi^*$ ) pracuje w zakresie sprężystym, podczas gdy druga część (od punktu  $\xi^*$  do swobodnego końca) znajduje się w stanie sprężysto-plastycznym.

Oprzemy się tu na prostej teorii wybożenia sprężysto-plastycznego, podanej przez F. R. SHANLEYA [9], która w odniesieniu do stateczności prętów ściskanych sprowadza się do zastąpienia modułu Younga  $E$  (w równaniu linii ugięcia) przez moduł styczny  $\bar{E} = d\sigma/d\varepsilon = \bar{E}(\sigma)$ .

Równania linii ugięcia pręta obciążonego w sposób przedstawiony na rys. 1 są następujące:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} (EJ_1 w_1'')' + Pw_1'' &= 0 & \text{dla} & \quad 0 \leq \xi \leq \xi^*, \\ (\bar{E}J_2 w_2'')' + Pw_2'' &= 0 & \text{dla} & \quad \xi^* \leq \xi \leq l, \end{aligned}$$

gdzie  $w_1$  oznacza ugięcie w punkcie  $\xi$  w części pręta pozostającej w stanie sprężystym,  $w_2$  — ugięcie w punkcie  $\xi$  w części pręta znajdującej się w stanie sprężysto-plastycznym,  $w_1' = dw_1/d\xi$ ,  $w_2' = dw_2/d\xi$ . Jeśli w dalszym ciągu wprowadzimy oznaczenia

$$(2.3) \quad \begin{aligned} y_1 &= \frac{w_1}{l}, & y_2 &= \frac{w_2}{l}, & x &= \frac{\xi}{l}, & \beta &= \frac{Pl^2}{EJ_0}, & g_1(x) &= \frac{J_1(x)}{J_0}, \\ g_2(x) &= \frac{J_2(x)}{J_0}, & \varphi_1(x) &= \frac{F_1(x)}{F_0} = g_1^x, & \varphi_2(x) &= \frac{F_2(x)}{F_0} = g_2^x, & f(x) &= \frac{\bar{E}(x)}{E}, \end{aligned}$$

to równania (2.2) możemy napisać w postaci

$$(2.4) \quad \begin{aligned} (g_1 y_1'')' + \beta y_1'' &= 0 & \text{dla} & \quad 0 \leq x \leq x^* & \left( y_1' = \frac{dy_1}{dx} \right), \\ (f g_2 y_2'')' + \beta y_2'' &= 0 & \text{dla} & \quad x^* \leq x \leq 1 & \left( y_2' = \frac{dy_2}{dx} \right). \end{aligned}$$

Do równań tych należy dołączyć warunki brzegowe, które zgodnie z przyjętym charakterem siły ściskającej, mają następującą postać:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} y_1(0) &= 0, \\ y_1'(0) &= \frac{1}{\beta} \zeta [g_1 y_1'']_{x=0}, \\ [f g_2 y_2'']_{x=1} &= -\beta [\rho y_2'(1) + \vartheta y_2(1)], \\ [f g_2 y_2'']'_{x=1} &= -\beta [\mu y_2'(1) + \nu y_2(1)], \end{aligned}$$

gdzie  $\zeta$  charakteryzuje sprężystość utwierdzenia (gdy  $\zeta=0$ , to pręt jest sztywno utwierdzony, a gdy  $\zeta \rightarrow \infty$ , to pręt jest zamocowany przegubowo),  $\rho$ ,  $\vartheta$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  oznaczają współczynniki stałe, które należy określić w konkretnych przypadkach obciążenia. Aby obciążenie było konserwatywne, stałe  $\rho$ ,  $\vartheta$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  nie mogą być dowolne, lecz muszą spełniać warunek podany w dalszej części pracy ( $\mu + \vartheta - 1 = 0$ ).

Całkując dwukrotnie równanie (2.4) i wprowadzając nowe zmienne zależne  $v_1(x)$  i  $v_2(x)$

$$(2.6) \quad v_1(x) = y_1(x) - \frac{B_1}{\beta} - \frac{B_2}{\beta} x, \quad v_2(x) = y_2(x) - \frac{B_3}{\beta} - \frac{B_4}{\beta} x$$

( $B_i$  oznacza stałe całkowania), otrzymujemy

$$(2.7) \quad \begin{aligned} g_1(x) v_1'' + \beta v_1 &= 0, & 0 \leq x \leq x^*, \\ f(x) g_2(x) v_2'' + \beta v_2 &= 0, & x^* \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

lub

$$(2.8) \quad G_1(\varphi_1) + \frac{v_1}{v_1''} = 0, \quad G_2(\varphi_2) + \frac{v_2}{v_2''} = 0,$$

gdzie funkcje  $G_1$  i  $G_2$  zdefiniowano następująco:

$$(2.9) \quad G_1(\varphi_1) = \frac{1}{\beta} g_1(\varphi_1) = \frac{1}{\beta} \varphi_1^{1/k}, \quad G_2(\varphi_2) = \frac{1}{\beta} f_2(\varphi_2) g_2(\varphi_2) = \frac{1}{\beta} \varphi_2^{1/k} f_2(\varphi_2).$$

Funkcje  $G_1(\varphi_1)$  i  $G_2(\varphi_2)$  są zależne od zmiennej  $x$  za pośrednictwem funkcji  $\varphi_1(x)$  i  $\varphi_2(x)$ , określających pole powierzchni przekrojów poprzecznych pręta w obu jego częściach. W części sprężystej moduł Younga jest stały i nie ma wpływu na  $G_1$ , natomiast w części sprężysto-plastycznej funkcja  $G_2$  w sposób istotny zależy od przyjętego prawa fizycznego  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ , a więc mnożnika  $f_2(\varphi_2)$  w drugim równaniu (2.9).

Do równań (2.8) i (2.9) należy dołączyć warunki brzegowe, wynikające z (2.5) i (2.6) (jak można łatwo wykazać zachodzą równości  $B_1 = B_3$  i  $B_2 = B_4$ ):

$$(2.10) \quad \begin{aligned} (1 - \vartheta)v_2(1) - \rho v_2'(1) + (\rho + \vartheta)v_1'(0) + (\rho\zeta + \vartheta\zeta + \vartheta)v_1(0) &= 0, \\ \nu v_2(1) + (\mu - 1)v_2'(1) - (\mu + \nu)v_1'(0) - (\mu\zeta + \nu\zeta + \nu)v_1(0) &= 0. \end{aligned}$$

### 3. OPTIMALIZACJA KSZTAŁTU PRĘTA (ROZWIĄZANIE OGÓLNE)

Zasadniczy problem pracy polega na znalezieniu takich funkcji  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  oraz punktu  $x^*$ , aby objętość pręta była minimalna, tzn. aby

$$(3.1) \quad V = F_0 l \left[ \int_0^{x^*} \psi_1 \left( -\frac{v_1}{v_1''} \right) dx + \int_{x^*}^1 \psi_2 \left( -\frac{v_2}{v_2''} \right) dx \right] = \min.$$

W funkcjonale (3.1)  $\psi_1(-v_1/v_1'')$  i  $\psi_2(-v_2/v_2'')$  są funkcjami odwrotnymi do  $G_1(\varphi_1)$  i  $G_2(\varphi_2)$  i wynikają z rozwiązania równań (2.8) i (2.9) ze względu na  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ .

Jak widać, mamy tu problem określenia minimum funkcjonału, przy czym nie wszystkie wartości brzegowe są niezależne i ustalone; nie jest również określona wartość współrzędnej  $x^*$ , dzielącej pręt na część sprężystą i część sprężysto-plastyczną, słowem jest to zagadnienie z końcami ruchomymi. Zatem obok równań Eulera-Lagrange'a należy wykorzystać podstawowy warunek konieczny istnienia ekstremum funkcjonału  $\delta V = 0$ . Pisząc równania Eulera-Lagrange'a w formie rozwiniętej (podobnie jak w pracy N. G. CZENCOWA [1]) otrzymujemy

$$(3.2) \quad v_1 t_1' - v_1' t_1 = C_1, \quad v_2 t_2' - v_2' t_2 = C_2,$$

gdzie

$$t_1 = \dot{\psi}_1 \frac{v_1}{v_2''}, \quad \dot{\psi}_1 = \frac{d\psi_1}{d\left(-\frac{v_1}{v_2''}\right)}, \quad t_2 = \dot{\psi}_2 \frac{v_2}{v_2''}, \quad \dot{\psi}_2 = \frac{d\psi_2}{d\left(-\frac{v_2}{v_2''}\right)}.$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum ma w naszym przypadku postać [8]

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad & \left[ \psi_1 - v_1' \frac{\partial \psi_1}{\partial v_1'} - v_1'' \frac{\partial \psi_1}{\partial v_1''} + v_1' \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial v_1''} \right) \right]_{x=x^*} \delta x^* + \\
 & + \left[ \frac{\partial \psi_1}{\partial v_1'} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial v_1''} \right) \right]_{x=x^*} \delta v_1(x^*) + \frac{\partial \psi_1}{\partial v_1''} \Big|_{x=x^*} \delta v_1'(x^*) - \\
 & - \left[ \psi_2 - v_2' \frac{\partial \psi_2}{\partial v_2'} - v_2'' \frac{\partial \psi_2}{\partial v_2''} + v_2' \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial v_2''} \right) \right]_{x=x^*} \delta x^* - \\
 & - \left[ \frac{\partial \psi_2}{\partial v_2'} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial v_2''} \right) \right]_{x=x^*} \delta v_2(x^*) - \frac{\partial \psi_2}{\partial v_2''} \Big|_{x=x^*} \delta v_2'(x^*) + \\
 & + \left[ \frac{\partial \psi_2}{\partial v_2'} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial v_2''} \right) \right]_{x=1} \delta v_2(1) + \frac{\partial \psi_2}{\partial v_2''} \Big|_{x=1} \delta v_2'(1) - \\
 & - \left[ \frac{\partial \psi_1}{\partial v_1'} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial v_1''} \right) \right]_{x=0} \delta v_1(0) - \frac{\partial \psi_1}{\partial v_1''} \Big|_{x=0} \delta v_1'(0) = 0.
 \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę warunki ciągłości funkcji ugięcia  $v(x)$  i jej pierwszej pochodnej  $v'(x)$  w punkcie  $x=x^*$  oraz warunek równości naprężeń w tym punkcie, tzn.

$$\delta v_1(x^*) = \delta v_2(x^*), \quad \delta v_1'(x^*) = \delta v_2'(x^*), \quad \psi_1(x^*) = \psi_2(x^*),$$

z równania (3.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (3.4) \quad & [(v_2'' t_2 - v_1'' t_1) + (v_1' t_1' - v_2' t_2')]_{x=x^*} \delta x^* + (t_2' - t_1') \delta v_1(x^*) + (t_1 - t_2) \delta v_1'(x^*) - \\
 & - t_2'(1) \delta v_2(1) + t_2(1) \delta v_2'(1) + t_1'(0) \delta v_1(0) - t_1(0) \delta v_1'(0) = 0.
 \end{aligned}$$

Wobec dowolności wariacji  $\delta x^*$ ,  $\delta v_1(x^*)$  i  $\delta v_1'(x^*)$  mamy

$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad & t_1(x^*) = t_2(x^*), \quad t_1'(x^*) = t_2'(x^*), \quad v_1''(x^*) = v_2''(x^*), \\
 & t_1'(0) \delta v_1(0) - t_1(0) \delta v_1'(0) - t_2'(1) \delta v_2(1) + t_2(1) \delta v_2'(1) = 0.
 \end{aligned}$$

Z pierwszych dwóch warunków (3.5) oraz równań (3.2) wynika, że  $C_1 = C_2 = C$ ; dwa dalsze warunki łącznie z warunkami brzegowymi (2.10) pozwalają wyznaczyć nieokreślone dotychczas stałe  $x^*$  i  $C$  oraz stałe całkowania równań (3.2) (jedna z nich pozostaje dowolna). W celu obliczenia stałej  $C$  wykorzystamy warunki brzegowe (2.10), które łącznie z ostatnim równaniem (3.5) tworzą układ trzech liniowych i jednorodnych równań ze względu na cztery wariacje  $\delta v_1(0)$ ,  $\delta v_1'(0)$ ,  $\delta v_2(1)$  i  $\delta v_2'(1)$  (nie wszystkie równe zero):

$$\begin{aligned}
 (3.6) \quad & (1 - \vartheta) \delta v_2(1) - \rho \delta v_2'(1) + (\rho + \vartheta) \delta v_1'(0) + (\rho \zeta + \vartheta \zeta + \vartheta) \delta v_1(0) = 0, \\
 & \nu \delta v_2(1) + (\mu - 1) \delta v_2'(1) - (\mu + \nu) \delta v_1'(0) - (\mu \zeta + \nu \zeta + \nu) \delta v_1(0) = 0, \\
 & t_2'(1) \delta v_2(1) - t_2(1) \delta v_2'(1) + t_1(0) \delta v_1'(0) - t_1'(0) \delta v_1(0) = 0.
 \end{aligned}$$

Ponieważ funkcja ugięcia pręta może być określona z dokładnością do dowolnego stałego mnożnika [równania (2.4) i warunki brzegowe (2.10) są jednorodne], więc

dowolną z wartości  $v_1(0)$ ,  $v_1'(0)$ ,  $v_2(1)$  i  $v_2'(1)$  można uznać za ustaloną, a odpowiednią wariację za równą zeru. Przystępując do zera kolejno wszystkie wariacje w równaniach (3.6) otrzymujemy cztery układy trzech liniowych jednorodnych równań na pozostałe trzy wariacje. Wyznaczniki główne tych układów przyrównane do zera dają cztery następujące warunki:

$$\begin{aligned}
 & t_2'(1)[(\rho v - \mu \vartheta)(\zeta + 1) + (\rho + \vartheta)\zeta + \vartheta] - t_2(1)[(\rho v - \mu \vartheta)\zeta + (\mu + v)\zeta + v] - \\
 & \quad - t_1'(0)[(\rho v - \mu \vartheta) + (\mu + \vartheta - 1)] = 0, \\
 & t_2'(1)[(\rho v - \mu \vartheta) + (\rho + \vartheta)] - t_2(1)[(\rho v - \mu \vartheta) + (\mu + v)] + \\
 (3.7) \quad & \quad + t_1(0)[(\rho v - \mu \vartheta) + (\mu + \vartheta - 1)] = 0, \\
 & t_2'(1)(\rho v - \mu \vartheta) - t_1'(0)[(\rho v - \mu \vartheta) + (\mu + v)] - t_1(0)[(\rho v - \mu \vartheta)\zeta + (\mu + v) + v] = 0, \\
 & t_2(1)(\rho v - \mu \vartheta) - t_1'(0)[(\rho v - \mu \vartheta) + (\mu + v)] - t_1(0)[(\rho v - \mu \vartheta)(\zeta + 1) + \\
 & \quad + (\rho + \vartheta)\zeta + \vartheta] = 0,
 \end{aligned}$$

z których tylko jeden jest niezależny i pozwala obliczyć stałą  $C$ . Oczywiście przy wyborze jednego z tych warunków, które nie są spełnione tożsamościowo, należy w szczególnych przypadkach obciążenia kierować się wygodą. Aby zbadać, kiedy stała  $C$  może być równa zeru, napiszemy równania (3.2) w postaci

$$(3.8) \quad \left(\frac{t_1}{v_1}\right)' = \frac{C}{v_1^2}, \quad \left(\frac{t_2}{v_2}\right)' = \frac{C}{v_2^2}$$

lub po scałkowaniu

$$(3.9) \quad t_1 = D_1 v_1 + C v_1 \int_0^x \frac{dx}{v_1^2}, \quad t_2 = D_2 v_2 + C v_2 \int_0^x \frac{dx}{v_2^2},$$

gdzie  $D_1$  i  $D_2$  oznaczają dowolne stałe różne od zera.

Oznaczając w dalszym ciągu:

$$(3.10) \quad \int_0^x \frac{dx}{v_1^2} = \Phi_1(x) \quad \text{i} \quad \int_0^x \frac{dx}{v_2^2} = \Phi_2(x)$$

i podstawiając wyrażenia (3.9) i (3.10) do np. pierwszego warunku (3.7) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (3.11) \quad & v_2'(1)[(\rho v - \mu \vartheta)(\zeta + 1) + (\rho + \vartheta)\zeta + \vartheta] - v_2(1)[(\rho v - \mu \vartheta)\zeta + (\mu + v)\zeta + v] - \\
 & \quad - v_1'(0)[(\rho v - \mu \vartheta) + (\mu + \vartheta - 1)] = C \left\{ -\frac{1}{D_2} \left[ \frac{1}{v_2(1)} + v_2'(1)\Phi_2(1) \right] \times \right. \\
 & \quad \times [(\rho v - \mu \vartheta)(\zeta + 1) + (\rho + \vartheta)\zeta + \vartheta] + \frac{1}{D_2} v_2(1)\Phi_2(1)[(\rho v - \mu \vartheta)\zeta + (\mu + v)\zeta + v] + \\
 & \quad \left. + \frac{1}{D_1} \left[ \frac{1}{v_1(0)} + v_1'(0)\Phi_1(0) \right] [(\rho v - \mu \vartheta) + (\mu + \vartheta - 1)] \right\}.
 \end{aligned}$$

Następnie po wyeliminowaniu z warunków brzegowych (2.10) wartości  $v_1(0)$  mamy

$$(3.12) \quad v_2'(1)[(\rho\nu - \mu\vartheta)(\zeta + 1) + (\rho + \vartheta)\zeta + \vartheta] - v_2(1)[(\rho\nu - \mu\vartheta)\zeta + (\mu + \nu)\zeta + \nu] - v_1'(0)(\rho\nu - \mu\vartheta) = 0$$

Po odjęciu równania (3.12) od (3.11) dostajemy

$$(3.13) \quad -v_1'(0)(\mu + \vartheta - 1) = C \left\{ -\frac{1}{D_2} \left[ \frac{1}{v_2(1)} + v_2'(1)\Phi(1) \right] \times \right. \\ \times [(\rho\nu - \mu\vartheta)(\zeta + 1) + (\rho + \vartheta)\zeta + \vartheta] + \frac{1}{D_2} v_2(1)\Phi_2(1)[(\rho\nu - \mu\vartheta)\zeta + (\mu + \nu)\zeta + \nu] + \\ \left. + \frac{1}{D_1} \left[ \frac{1}{v_1(0)} + v_1'(0)\Phi_1(0) \right] [(\rho\nu - \mu\vartheta) + (\mu + \vartheta - 1)] \right\},$$

skąd widać, że stała  $C$  jest równa zero, gdy spełniony jest warunek

$$(3.14) \quad \mu + \vartheta - 1 = 0.$$

Ten sam wynik otrzymujemy z pozostałych warunków (3.7) z tym zastrzeżeniem, że współczynniki przy stałej  $C$  są różne od zera. Jednak tożsamościowe spełnienie wszystkich warunków (3.7) jest mało prawdopodobne, gdyż w tym przypadku objętość pręta nie zależałaby od stałej  $C$ .

Warunek (3.14) dowodzi, że działające obciążenie jest konserwatywne; istotnie, jeśli moment i poziomą składową siły (pionowa składowa przy założeniu małych ugięć jest stała, a więc konserwatywna) na swobodnym końcu pręta wyrazimy przez kąt ugięcia  $w'_l$  i ugięcie  $w_l$  w następujący sposób (rys. 1):

$$(3.15) \quad M = -\beta(\rho w'_l + \vartheta w_l), \quad H = \beta(\mu w'_l + \nu w_l) - \beta w'_l,$$

to warunek istnienia potencjału

$$(3.16) \quad \frac{\partial H}{\partial w'_l} = \frac{\partial M}{\partial w_l}$$

daje związek (3.14),  $\vartheta = 1 - \mu$ .

W dalszym ciągu pracy ograniczymy się do optymalizacji kształtu prętów ściskanych obciążeniem konserwatywnym, a więc przyjmiemy, że stała  $C = 0$ , co znacznie ułatwi rozwiązanie problemu. Równania (3.2) po jednokrotnym scałkowaniu przyjmują prostą postać

$$(3.17) \quad \begin{aligned} v_1''^2 &= \bar{C}_1 \dot{\psi}_1 & \text{dla } 0 \leq x \leq x^*, \\ v_2''^2 &= \bar{C}_2 \dot{\psi}_2 & \text{dla } x^* \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

gdzie  $\bar{C}_1$  i  $\bar{C}_2$  są stałymi całkowania. Ostateczna postać równań (3.17) zależy jeszcze od przyjętego prawa fizycznego  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  w stanie sprężysto-plastycznym.

## 4. OPTYMALNE PRĘTY SPRĘŻYSTE

Gdy cały pręt znajduje się w stanie sprężystym, linia ugięcia pręta optymalnego jest opisana tylko pierwszym z równań (3.17), przy czym funkcja  $\psi_1$  określona jest wzorem (2.9)

$$(4.1) \quad \psi_1 = \left( -\frac{\beta v}{v''} \right)^\kappa, \quad \dot{\psi}_1 = \kappa \beta^\kappa \left( -\frac{v}{v''} \right)^{\kappa-1}.$$

Wstawiając (4.1) do (3.17) otrzymujemy równanie

$$(4.2) \quad v'' v^{1-\kappa/1+\kappa} = C_3,$$

gdzie  $C_3$  oznacza stałą całkowania, do którego należy dołączyć warunki brzegowe (2.10).

Szczegółowe rozwiązania w ogólnym przypadku zachowania się konserwatywnego obciążenia przedstawiono w pracy [4].

## 5. OPTYMALNE PRĘTY SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNE

W tej części pracy znajdziemy optymalne kształty prętów pracujących w całości w stanie sprężysto-plastycznym; naprężenia ściskające muszą więc przekraczać granicę sprężystości  $S$ . Wystarczy tu skorzystać z drugiego z równań (3.17), które zgodnie z W. KRZYSIEM [7] można również przekształcić do równania określającego rozwiązanie w postaci funkcji odwrotnej  $x = x(\varphi)$ :

$$(5.1) \quad x_\varphi'' + \frac{3GG''^2 - 2GG'G''}{2(GG'' - 2G'^2)G'} x_\varphi' + \frac{2G'}{GG'' - 2G'^2} x_\varphi'^3 = 0.$$

Oczywiście charakterystyka materiału wpływa na efektywność rozwiązania równania (3.17) lub (5.1); ograniczymy się za W. KRZYSIEM [7] do takiego modelu ciała, dla którego funkcja  $G(\varphi)$  jest liniowa (a tym samym funkcja odwrotna  $\psi$  jest również liniowa):

(5.2)

$$G(\varphi) = \frac{1}{\beta} (K_1 + K_2 \varphi), \quad \psi \left( -\frac{v}{v''} \right) = -\frac{K_1}{K_2} + \frac{\beta}{K_2} \left( -\frac{v}{v''} \right), \quad \dot{\psi} = \frac{\beta}{K_2} = \text{const};$$

$K_1$  i  $K_2$  oznaczają tutaj stałe określone dalej.

Z porównania wzorów (5.2) i (2.9) wynika następujący charakter zmienności modułu Younga:

$$(5.3) \quad f_2(\varphi) = \frac{K_1 + K_2 \varphi}{\varphi^{1/\kappa}},$$

a z rozwiązania równania (3.17) [przy założeniu (5.2), tzn. gdy  $v'' = \text{const}$ ] i po uwzględnieniu warunków brzegowych (2.10) otrzymujemy funkcję linii ugięcia prętów dla dowolnego  $\kappa$ :

$$(5.4) \quad v(x) = 1 + A_2 x + A_3 x^2.$$



Zakładamy, że linia ugięcia jest jedną półfalą, a ponadto przyjmujemy tu, że  $v(0) = 1$ ; stałe  $A_2$  i  $A_3$  są określone następującymi wzorami:

$$(5.5) \quad A_2 = \frac{\zeta(2\rho + 2\vartheta - \mu - \nu) - (2\mu + \nu - 2)}{2\mu + \nu - 2\rho - \vartheta - 1}, \quad A_3 = \frac{\zeta(\mu + \nu - \rho - \vartheta) - 1}{2\mu + \nu - 2\rho - \vartheta - 1}.$$

Równanie bezwymiarowej powierzchni przekroju poprzecznego ma postać

$$(5.6) \quad \varphi(x) = -\frac{\beta}{K_2} \left( \frac{1 + A_2 x + A_3 x^2}{2A_3} + \frac{K_1}{\beta} \right),$$

a z założenia, że pole powierzchni przekroju utwierdzonego jest równe  $F_0$  (tzn.  $\varphi(0) = 1$ ) otrzymujemy równanie określające siłę krytyczną  $\beta_k$  w zależności od parametrów obciążenia oraz stałych  $K_1$  i  $K_2$  (które również zależą od  $\beta$ )

$$(5.7) \quad \beta + 2A_3(K_1 + K_2) = 0.$$

Pozostaje jeszcze do przyjęcia takie prawo fizyczne, aby wynikał z niego wzór (5.3). Łatwo wykazać, że należy w następujący sposób określić moduł styczny  $\bar{E} = d\sigma/de$ :

$$(5.8) \quad \bar{E} = E \frac{Q - \sigma}{Q - S} \left( \frac{\sigma}{S} \right)^{(1-\kappa)/\kappa}$$

( $Q$  oznacza granicę plastyczności,  $S$  granicę sprężystości,  $E$  moduł Younga oraz  $\sigma$  naprężenie). Istotnie, podstawiając do wzoru (5.8)

$$\sigma = \frac{P}{F_0 \varphi}, \quad P = \beta \frac{EJ_0}{l^2}$$

otrzymujemy

$$(5.9) \quad \bar{E} = E \frac{\varphi - \beta \chi_1}{\varphi^{1/\kappa}} \beta^{(1-\kappa)/\kappa} \chi_2,$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia:

$$(5.10) \quad \chi_1 = \frac{EJ_0}{QF_0 l^2}, \quad \chi_2 = \frac{Q}{Q - S} \left( \frac{EJ_0}{F_0 S l^2} \right)^{(1-\kappa)/\kappa}.$$

Porównując wzory (5.9) i (5.3) obliczymy stałe  $K_1$  i  $K_2$ :

$$(5.11) \quad K_1 = -\beta^{1/\kappa} \chi_1 \chi_2, \quad K_2 = \beta^{(1-\kappa)/\kappa} \chi_2,$$

które wstawione do równań (5.6) i (5.7) pozwalają wyznaczyć kształt pręta i siłę krytyczną:

$$(5.12) \quad \varphi(x) = \frac{2A_3 \chi_2 \beta^{(1-2\kappa)/\kappa} - A_2 x - A_3 x^2}{2A_3 \chi_2 \beta^{(1-2\kappa)/\kappa}}$$

oraz

$$(5.13) \quad 1 - 2A_3 \chi_1 \chi_2 \beta^{(1-\kappa)/\kappa} + 2A_3 \chi_2 \beta^{(1-2\kappa)/\kappa} = 0.$$

Wzory (5.12) i (5.13) napisane za pomocą bezwymiarowych wielkości  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  i  $\beta$  nie są jednak dogodnie do obliczeń praktycznych, bowiem przy ustalonej sile krytycznej  $P$  nie znane jest jeszcze pole powierzchni podstawowego przekroju poprzecznego  $F_0$ . Wracając do zmiennych wymiarowych [wykorzystując wzory (5.10) i (5.11)], równanie (5.7), określające siłę krytyczną, przedstawimy teraz w postaci

$$(5.14) \quad \left(-\frac{1}{2A_3}\right) \frac{PI^2}{EJ_0} + \frac{S}{Q-S} \left(\frac{P}{F_0 S}\right)^{1/\kappa} - \frac{Q}{Q-S} \left(\frac{P}{F_0 S}\right)^{(1-\kappa)/\kappa} = 0,$$

która pozwala na obliczenie  $F_0$  jako funkcji  $P$ . Korzystając z definicji stałej  $\kappa$  (2.1) w równaniu tym wyrażono ponadto  $J_0$  przez  $F_0$ :

$$(5.15) \quad J_0 = \bar{c} F_0^{1/\kappa},$$

gdzie stała  $\bar{c}$  charakteryzuje przekrój poprzeczny pręta i jest przyjęta jako znana. Np. dla pręta płasko-zbieżnego o stałej wysokości przekroju prostokątnego  $h_0$   $\kappa=1$ ,  $\bar{c}=h_0^2/12$ , dla płasko-zbieżnego pręta o stałej szerokości przekroju prostokątnego  $\kappa=1/3$ ,  $\bar{c}=1/12b_0^2$ , dla pręta wszechstronnie równomiernie zbieżnego  $\kappa=1/2$ ,  $\bar{c}=1/12$  (dla kwadratu) lub  $\bar{c}=1/4\pi$  (dla koła).

Uwzględniając w dalszym ciągu związek (5.15) w równaniu (5.14) otrzymujemy liniowe równanie ze względu na pole powierzchni podstawowego przekroju poprzecznego, a stąd

$$(5.16) \quad F_0 = \frac{P}{Q} + \frac{(Q-S)S^{(1-\kappa)/\kappa}}{QE\bar{c}} P^{(2\kappa-1)/\kappa} I^2 \left(-\frac{1}{2A_3}\right).$$

Efektywne rozwiązanie zagadnienia (optymalny kształt pręta przy ustalonej sile  $P$ ) otrzymamy podstawiając prawe strony wzorów (5.16), (5.10) i (5.11) do równania (5.6):

$$(5.17) \quad \varphi(x) = \frac{1 + \frac{(Q-S)S^{(1-\kappa)/\kappa}}{E\bar{c}} \frac{I^2}{P^{(1-\kappa)/\kappa}} \left(-\frac{1+A_2x+A_3x^2}{2A_3}\right)}{1 + \frac{(Q-S)S^{(1-\kappa)/\kappa}}{E\bar{c}} \frac{I^2}{P^{(1-\kappa)/\kappa}} \left(-\frac{1}{2A_3}\right)}$$

oraz

$$(5.18) \quad F(x) = \frac{P}{Q} + \frac{(Q-S)S^{(1-\kappa)/\kappa}}{QE\bar{c}} P^{(2\kappa-1)/\kappa} I^2 \left(-\frac{1+A_2x+A_3x^2}{2A_3}\right).$$

•Odpowiadająca tym funkcjom minimalna objętość jest określona przez wzór (3.1):

$$(5.19) \quad V = \frac{PI}{Q} + \frac{(Q-S)S^{(1-\kappa)/\kappa}}{QE\bar{c}} P^{(2\kappa-1)/\kappa} I^3 \left(-\frac{1 + \frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{3}A_3}{2A_3}\right).$$

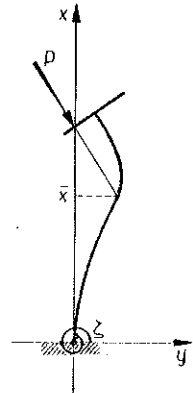
Zachowując w dalszym ciągu dla uproszczenia zapisu oznaczenia (5.10) i (5.11) musimy pamiętać, że należy je wyznaczać po uprzednim obliczeniu wartości  $F_0$  z równania (5.16) (przy ustalonej sile krytycznej  $P$  oraz stałej  $\bar{c}$ ).

Należy tu zauważyć, iż rozwiązując równanie (5.19) ze względu na siłę  $P$  możemy przedstawić problem optymalizacji w sformułowaniu dualnym, tzn. obliczyć maksymalną siłę przy z góry określonej objętości pręta. Rozwiązanie zależy w istotny sposób od wykładnika  $\kappa$  i prowadzi do prostych równań liniowych na  $P$  dla  $\kappa=1$  i  $\kappa=1/2$  oraz równania kwadratowego dla  $\kappa=1/3$ .

We wzorach powyższych stałe  $A_2$  i  $A_3$  określone są przez (5.5), a ich zakres stosowalności ogranicza warunek zapewniający istnienie naprężeń większych od granicy sprężystości  $S$  w całym przekroju oraz założenie, że linia ugięcia pręta jest jedną półfalą (bez zmiany znaku  $v''$ ). Jeśli jednak wyoboczenie zachodzi według linii ugięcia zmieniającej znak krzywizny, należy rozwiązanie zszyc z dwóch parabol o przeciwnych krzywiznach:

$$v^*(x) = A_1^* + A_2^* x + A_3^* x^2 \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq \bar{x},$$

$$v(x) = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 \quad \text{dla} \quad \bar{x} \leq x \leq l.$$



Rys. 2

Warunki zszycia i warunki brzegowe dla powyższych linii ugięcia są następujące:

$$v(\bar{x}) = v^*(\bar{x}) = 0, \quad v'(\bar{x}) = v^{*'}(\bar{x}), \quad v''(\bar{x}) = -v^{*''}(\bar{x}),$$

$$(5.20) \quad (1 - \vartheta)(A_1 + A_2 + A_3) - \rho(A_2 + 2A_3) + (\rho + \vartheta)A_2^* + (\rho\zeta + \vartheta\zeta + \vartheta)A_1^* = 0,$$

$$v(A_1 + A_2 + A_3) + (\mu - 1)(A_2 + 2A_3) - (\mu + \nu)A_2^* - (\mu\zeta + \nu\zeta + \nu)A_1^* = 0;$$

pozwalają one wyrazić pięć spośród stałych  $A_i$  i  $A_i^*$  przez jedną z nich (dowolną) oraz wyznaczyć nieznaną punkt zszycia  $\bar{x}$ . Po prostych obliczeniach otrzymujemy

$$(5.21) \quad A_1 = \frac{A_1}{\Delta} A_3, \quad A_2 = \frac{A_2}{\Delta} A_3, \quad A_1^* = \left( 2\bar{x}^2 - \frac{A_1}{\Delta} - 2\bar{x} \frac{A_2}{\Delta} \right) A_3,$$

$$A_2^* = \frac{1}{\bar{x}} \left( \frac{A_1}{\Delta} + 2\bar{x} \frac{A_2}{\Delta} - \bar{x}^2 \right) A_3, \quad A_3^* = -A_3$$

oraz równanie

$$(5.22) \quad A_1 + \bar{x}A_2 + \bar{x}^2\Delta = 0,$$

z którego można obliczyć  $\bar{x}$ .

We wzorach (5.21) i (5.22) przyjęto następujące oznaczenia:

$$(5.23) \quad A_1 = \bar{x}^2 [(3\mu + 2\nu - 4\rho - 3\vartheta - 1) + \bar{x}(\mu + 3\vartheta - \rho - \nu) + 2\bar{x}\zeta(2\rho + 2\vartheta - \mu - \nu) + 2\bar{x}^2(\vartheta - \nu) + 2\bar{x}^2(\rho + \vartheta - \mu - \nu)\zeta],$$

$$A_2 = \bar{x} [(2\rho + 2\vartheta - \mu - \nu) + \bar{x}(2 + \nu - 2\mu - 4\vartheta) + \bar{x}\zeta(\mu + \nu - 2\rho - 2\vartheta) - \bar{x}^2(\mu + \nu) + 2\bar{x}^3\nu + 2\bar{x}^3\zeta(\mu + \nu)],$$

$$A = \bar{x} [(\mu + \nu - \rho - \vartheta) - \bar{x}(1 + \mu + 3\nu - 2\vartheta) + \bar{x}\zeta(\rho + \vartheta - \mu - \nu) + 2\bar{x}^2\zeta(\mu + \nu) + 2\bar{x}^2\nu].$$

Ponadto kształt pręta określony jest wzorami

$$(5.24) \quad \begin{aligned} \varphi^*(x) &= -\frac{\beta}{K_2} \left( \frac{A_1^* + A_2^* x + A_3^* x^2}{2A_3^*} + \frac{K_1}{\beta} \right) \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq \bar{x}, \\ \varphi(x) &= -\frac{\beta}{K_2} \left( \frac{A_1 + A_2 x + A_3 x^2}{2A_3} + \frac{K_1}{\beta} \right) \quad \text{dla} \quad \bar{x} \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

a siłę krytyczną wyznaczamy np. z warunku  $\varphi^*(0) = 1$ :

$$(5.25) \quad \beta A_1^* + 2A_3^* (K_1 + K_2) = 0.$$

Na zakończenie tej części pracy należy podkreślić, iż otrzymane rozwiązania mają bardzo prostą postać dzięki odpowiedniemu przyjęciu charakterystyk materiału  $\sigma(\varepsilon)$ ; w przypadku  $\kappa = 1/2$  jest to prawo Johnsona-Ostenfelda,  $\bar{E} = E(Q - \sigma)\sigma / (Q - S)S$ ; w przypadkach  $\kappa = 1$  i  $\kappa = 1/3$  są to zupełnie inne prawa, które jednak (jak wykazał W. KRZYŚ [7]) mogą dobrze aproksymować charakterystyki różnych rzeczywistych materiałów.

## 6. OPTIMALIZACJA W ZAKRESIE SPRĘŻYSTYM I SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM

W tej części zajmiemy się znalezieniem optymalnych kształtów prętów ściskanych, pracujących częściowo w zakresie sprężystym, a częściowo sprężysto-plastycznym. Założymy, że dolna część pręta do punktu  $x^*$  znajduje się w zakresie sprężystym, a górna część znajduje się w zakresie sprężysto-plastycznym, przy czym oba te zakresy są opisane różnymi prawami fizycznymi. Oczywiście podział pręta na dwie części nie byłby konieczny w przypadku stosowania jednego prawa opisującego materiał np. prawa Ylлина; otrzymane jednak w ten sposób równanie linii ugięcia jest tak skomplikowane, że nie nadaje się do rozwiązania ścisłego.

Ograniczymy się tu nadal do praw fizycznych, omówionych poprzednio i postaramy się zszyc oba zakresy, przyjmując, że wyboczenie następuje według krzywej, która nie zmienia znaku krzywizny. W rozdziale tym podamy rozwiązania równań (3.17), przy czym w zakresie sprężystym funkcję  $\psi_1$  przyjmiemy w postaci

$$(6.1) \quad \psi_1 = \left( -\frac{\beta v_1}{v_1''} \right)^\kappa,$$

a funkcję  $\psi_2$  przyjmiemy podobnie jak poprzednio zgodnie z prawem W. KRZYŚIA [7]:

$$(6.2) \quad \psi_2 = -\frac{K_1}{K_2} + \frac{\beta}{K_2} \left( -\frac{v_2}{v_2''} \right).$$

Przy tak przyjętych funkcjach  $\psi_1$  i  $\psi_2$  równania (3.17) przybierają postać:

$$(6.3) \quad v_1'' v_1^{(1-\kappa)(1+\kappa)} = C_4 \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq x^*$$

oraz

$$(6.4) \quad v_2'' = C_5 \quad \text{dla} \quad x^* \leq x \leq 1,$$

gdzie  $C_4$  i  $C_5$  są stałymi całkowania.

Do równań tych należy dołączyć warunki brzegowe (2.10), warunki zszycia:

$$(6.5) \quad \begin{aligned} v_1(x^*) &= v_2(x^*), & v_1'(x^*) &= v_2'(x^*), \\ v_1''(x^*) &= v_2''(x^*), & \varphi_1(x^*) &= \varphi_2(x^*) \end{aligned}$$

oraz warunek pozwalający na obliczenie siły krytycznej; może to być np.  $\varphi_1(x_0) = 1$  lub  $\varphi_2(x_0) = 1$ , co oznacza, że w punkcie  $x = x_0$  przekrój jest równy  $F_0$  (praktycznie biorąc warunek ten służy do określenia  $F_0$  przy danej sile ściskającej  $P$ ).

6.1.  $\kappa = 1$ . W tym najprostszym przypadku równania linii ugięcia są bardzo proste i dają rozwiązania w postaci paraboli drugiego stopnia, zarówno w części sprężystej, jak i części sprężysto-plastycznej pręta:

$$(6.6) \quad \begin{aligned} v_1(x) &= A_1 + A_2 x + A_3 x^2 \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq x^*, \\ v_2(x) &= B_1 + B_2 x + B_3 x^2 \quad \text{dla} \quad x^* \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Warunki brzegowe (2.10) i warunki zszycia (6.5) prowadzą do następującego układu równań na stałe  $A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$  i  $x^*$ , wyrażone przez jedną stałą dowolną np.  $A_1$ :

$$(6.7) \quad \begin{aligned} (1 - \vartheta)(B_1 + B_2 + B_3) - \rho(B_2 + 2B_3) + (\rho + \vartheta)A_2 + (\rho\zeta + \vartheta\zeta + \vartheta)A_1 &= 0, \\ \nu(B_1 + B_2 + B_3) + (\mu - 1)(B_2 + 2B_3) - (\mu + \nu)A_2 - (\mu\zeta + \nu\zeta + \nu)A_1 &= 0, \\ A_1 + A_2 x^* + A_3 x^{*2} &= B_1 + B_2 x^* + B_3 x^{*2}, \\ A_2 + 2A_3 x^* &= B_2 + 2B_3 x^*, \\ 2A_3 &= 2B_3, \\ \frac{v_1(x^*)}{v_1''(x^*)} &= \frac{1}{\chi_2} \frac{v_2(x^*)}{v_2''(x^*)} - \chi_1. \end{aligned}$$

Z równań powyższych po prostych obliczeniach otrzymujemy

$$(6.8) \quad \begin{aligned} B_1 &= A_1, \quad B_2 = A_2, \quad B_3 = A_3, \\ A_2 &= \frac{(2\mu + \nu - 2) + (\mu + \nu - 2\rho - 2\vartheta + \mu\vartheta - \rho\nu)\zeta}{1 + 2\rho + \vartheta - 2\mu - \nu} A_1, \\ A_3 &= \frac{1 + (\rho + \vartheta - \mu - \nu)\zeta}{1 + 2\rho + \vartheta - 2\mu - \nu} A_1, \\ x^* &= \frac{-\frac{A_2}{A_1} \pm \sqrt{\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - 4\frac{A_3}{A_1}\left(1 + 2\frac{A_3}{A_1}\frac{\chi_1\chi_2}{\chi_2 - 1}\right)}}{2\frac{A_3}{A_1}}. \end{aligned}$$

Warunek  $\varphi_1(x_0)=1$  daje wartość siły krytycznej

$$(6.9) \quad \beta_k = -\frac{2A_3}{A_1 + A_2 x_0 + A_3 x_0^2}$$

( $x_0$  oznacza dowolną wartość z przedziału  $(0, x^*)$ ) a kształt pręta opisują równania

$$(6.10) \quad \begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{A_1 + A_2 x + A_3 x^2}{A_1 + A_2 x_0 + A_3 x_0^2}, \\ \varphi_2(x) &= \beta_k \left( \chi_1 - \frac{1}{\chi_2} \frac{A_1 + A_2 x + A_3 x^2}{2A_3} \right). \end{aligned}$$

Łatwo można sprawdzić, że przekrój w punkcie zszycia  $x^*$  jest równy

$$(6.11) \quad \varphi(x^*) = \beta \frac{\chi_1 \chi_2}{\chi_2 - 1},$$

i naprężenia  $\sigma(x^*)$  równają się granicy sprężystości  $S$ .

W szczególnym przypadku siły skierowanej do bieguna położonego w odległości  $a$  od utwierdzenia ( $a/l = \alpha$ ), ściskającej pręt sztywnie utwierdzony (rys. 3), parametry charakteryzujące obciążenie są następujące:

$$(6.12) \quad \rho=0, \quad \vartheta=0, \quad \mu=1, \quad \nu = -\frac{1}{1+\alpha}, \quad \zeta=0.$$

Otrzymujemy w tym przypadku

$$(6.13) \quad \begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{\alpha} A_1, \quad A_3 = -\frac{1+\alpha}{\alpha} A_1, \\ x^* &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1+\alpha} \pm \sqrt{\left( \frac{1+2\alpha}{1+\alpha} \right)^2 - \frac{8\chi_1 \chi_2}{\chi_2 - 1}} \right], \\ \beta_k &= \frac{2(1+\alpha)}{\alpha + x_0 - (1+\alpha)x_0^2}, \quad x_0 \in (0, x^*), \end{aligned}$$

$$v_1(x) = v_2(x) = A \left( \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha} x - x^2 \right).$$

Stale  $\chi_1$  i  $\chi_2$  określone są wzorami (5.10) dla  $\kappa=1$ .

6.2.  $\kappa=1/2$ . W przypadku pręta wszechstronnie równomiernie zbieżnego, rozwiązanie równania (6.3) w zakresie sprężystym można przedstawić w następującej parametrycznej postaci [2]: dla  $0 \leq x \leq x^*$

$$(6.14) \quad \begin{aligned} v_1 &= A_1 \sin^3 z, \\ x &= A_3 + A_2 \left( z - \frac{1}{2} \sin 2z \right), \\ \varphi_1(z) &= -\sqrt{\frac{1}{3} \beta} 2A_2 \sin^2 z, \end{aligned}$$

natomiast linia ugięcia części pręta znajdującego się w stanie sprężysto-plastycznym jest, jak poprzednio, parabolą drugiego stopnia: dla  $x^* \leq x \leq 1$

$$(6.15) \quad \begin{aligned} v_2(x) &= B_1 + B_2 x + B_3 x^2, \\ \varphi_2(x) &= \beta \chi_1 - \frac{1}{\chi_2} \frac{B_1 + B_2 x + B_3 x^2}{2B_3}, \end{aligned}$$

gdzie stałe  $\chi_1$  i  $\chi_2$  należy obliczać ze wzorów (5.10) dla  $\kappa = 1/2$ .

Założymy, że wartości  $x=0$  odpowiada wartość parametru  $z=z_0$ , a wartości  $x=x^*$  odpowiada parametr  $z=z^*$ . Warunki brzegowe (2.10) oraz warunki zszycia (6.5) wraz z powyższym założeniem prowadzą do następującego układu równań:

$$(6.16) \quad \begin{aligned} (1 - \vartheta)(B_1 + B_2 + B_3) - \rho(B_2 + 2B_3) + (\rho + \vartheta) \frac{3A_1}{2A_2} \cos z_0 + \\ + (\rho\zeta + \vartheta\zeta + \vartheta) A_1 \sin^3 z_0 = 0, \\ v(B_1 + B_2 + B_3) + (\mu - 1)(B_2 + 2B_3) - (\mu + \nu) \frac{3A_1}{2A_2} \cos z_0 - \\ - (\mu\zeta + \nu\zeta + \nu) A_1 \sin^3 z_0 = 0, \\ A_1 \sin^3 z^* = B_1 + B_2 x^* + B_3 x^{*2}, \quad \frac{3A_1}{2A_2} \cos z^* = B_2 + 2B_3 x^*, \\ - \frac{3}{4} \frac{A_1}{A_2^2} \frac{1}{\sin z^*} = 2B_3, \\ - \sqrt{\frac{1}{3}} \beta 2A_2 \sin^2 z^* = \beta \chi_1 - \frac{1}{\chi_2} \frac{B_1 + B_2 x^* + B_3 x^{*2}}{2B_3}, \\ A_3 + A_2 \left( z_0 - \frac{1}{2} \sin 2z_0 \right) = 0, \quad A_3 + A_2 \left( z^* - \frac{1}{2} \sin 2z^* \right) = x^*. \end{aligned}$$

Układ równań (6.16) pozwala (przynajmniej teoretycznie) na obliczenie stałych  $A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, z_0, z^*$  i  $x^*$  ( $A_1$  pozostaje stałą dowolną). Z dodatkowego warunku, np.  $\varphi_1(x_0) = 1$ , możemy obliczyć siłę krytyczną.

Aby wskazać na możliwość wykorzystania równań (6.16), ograniczymy się do szczegółowego zbadania przypadku ściskania pręta sztywnie utwierdzonego ( $\zeta = 0$ ) siłą skierowaną do bieguna, położonego w odległości  $a$  od utwierdzenia (rys. 3). W przypadku tym obciążenie jest scharakteryzowane przez parametry (6.12), a układ równań (6.16) można łatwo zredukować do czterech następujących równań:

$$(6.17) \quad \begin{aligned} A_2^2 + \frac{1}{2} \chi_2 \sqrt{\frac{3}{\chi_1}} \frac{A_2}{\sin^2 z^*} + \frac{3\chi_2}{4\sin^4 z^*} = 0, \\ (1 - x^*)^2 - 4A_2 (1 - x^*) \sin x^* \cos x^* - \frac{8}{3} A_2^2 \sin^4 z^* = 0, \\ z_0 - \sin z_0 \cos z_0 = (z^* - \sin z^* \cos z^*) - \frac{x^*}{A_2}, \quad \alpha = \frac{2A_2 \sin^3 z_0}{3\cos z_0}, \end{aligned}$$

do których stosujemy metodę odwrotną, ustalając parametr  $z^*$  i obliczając z pierwszego z nich stałą  $A_2$  (równanie kwadratowe), z drugiego stałą  $x^*$  (równanie kwadratowe), z trzeciego stałą  $z_0$  (proste równanie przestępne) oraz z czwartego parametr określający położenie bieguna:  $\alpha = a/l$ .

*Przykład 1.* Przyjmijmy następujące stałe, charakteryzujące pręt i materiał

$$\chi_1 = \frac{1}{3}, \quad \chi_2 = \frac{3}{2}, \quad \frac{S}{Q} = \frac{2}{3}$$

oraz parametr  $z^* = 0,50$ . Z równań (6.17) obliczamy kolejno:  $A_2 = -3,26$ ;  $x^* = -0,74$ ;  $z_0 = 0,80$  i  $\alpha = -1,15$ ;  $A_3 = 1,00$ ;  $B_1 = 0,369A_1$ ;  $B_2 = -0,295A_1$  oraz  $B_3 = -0,0737A_1$ .

Linia ugięcia i kształt pręta w obszarze sprężystym są następujące: dla  $0 \leq x \leq x^*$ ,  $z^* \leq z \leq z_0$

$$v_1 = A_1 \sin^3 z, \quad x = 1 - 3,26(z - \sin z \cos z), \quad \varphi_1(z) = 6,52 \sin^2 z;$$

w obszarze sprężysto-plastycznym następujące: dla  $x^* \leq x \leq 1$

$$v_2 = A_1(0,369 - 0,295x - 0,737x^2),$$

$$\varphi_2(x) = 2,67 - 1,34x - 0,335x^2.$$

Ponieważ drugi z warunków brzegowych prowadzi tu do wniosku, że  $v_2(1) = 0$ , więc siłę krytyczną najłatwiej jest obliczyć z warunku  $\varphi_2(1) = 1$ , który daje

$$\beta_k = \frac{1}{\chi_1} = \frac{QF_1 l^2}{EJ_1} \quad \text{lub} \quad P_k = QF_1 \quad F_1 = F(1).$$

Łatwo można sprawdzić, że w punkcie połączenia dwóch zakresów naprężenie ściskające jest równe granicy sprężystości  $S$ :

$$\sigma(x^*) = \frac{P_k}{F(x^*)} = \frac{QF_1}{1,50F_1} = \frac{2}{3} Q = S.$$

Kształt pręta przedstawiono na rys. 4.

*Przykład 2.* Jeśli przyjmiemy teraz

$$\chi_1 = \frac{2}{27}, \quad \chi_2 = \frac{1}{3}, \quad \frac{S}{Q} = \frac{2}{3}, \quad z^* = 1,15,$$

to otrzymamy

$$v_1 = A_1 \sin^3 z, \quad x = 0,987 - 0,424(z - \sin z \cos z), \quad \varphi_1(z) = 1,80 \sin^2 z,$$

$$v_2 = A_1(0,72 + 1,56z - 2,28z^2), \quad \varphi_2(x) = 1,47 + 1,03x - 1,50x^2,$$

$$x^* = 0,658, \quad z_0 = 1,97.$$

Biegun, do którego zwrócona jest siła, znajduje się w odległości  $a = 0,567l$  od utwierdzenia. Naprężenia w całej części sprężystej są mniejsze od  $S$  i w miejscu utwierdzenia wynoszą  $\sigma(z_0) = Q/1,53$ . Kształt pręta przedstawiono na rys. 5.



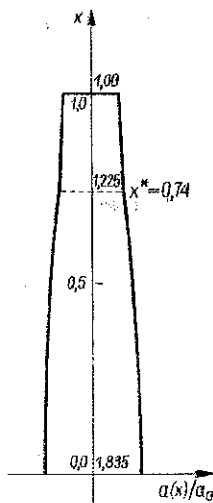
6.3.  $\kappa=1/3$ . Rozwiązanie równania (6.3) (w zakresie sprężystym) można przedstawić tu w następującej postaci parametrycznej [2]: dla  $0 \leq x \leq x^*$ ,  $z^* \leq z \leq z_0$ .

$$(6.18) \quad v_1 = A_1 \sin^4 z, \quad x = A_3 + A_2 \cos z (3 - \cos^2 z), \quad \varphi_1(z) = \left( \frac{9}{4} \beta A_2^2 \right)^{1/3} \sin^3 z;$$

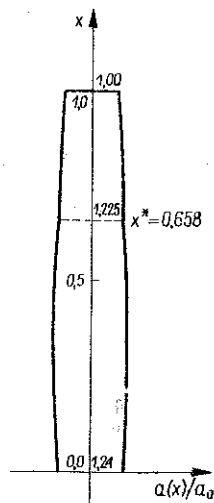
linia ugięcia i kształt części pręta znajdującego się w stanie sprężysto-plastycznym ma postać: dla  $x^* \leq x \leq 1$

$$(6.19) \quad v_2(x) = B_1 + B_2 x + B_3 x^2, \quad \varphi_2(x) = \beta \chi_1 - \frac{1}{\beta \chi_2} \frac{B_1 + B_2 x + B_3 x^2}{2B_3},$$

gdzie stałe  $\chi_1$  i  $\chi_2$  należy obliczyć ze wzorów (5.10) dla  $\kappa=1/3$ . Podobnie jak poprzednio założono, że wartości  $x=0$  odpowiada wartość parametru  $z=z_0$ , a wartości



Rys. 4



Rys. 5

$x=x^*$  odpowiada parametr  $z=z^*$ . Warunki brzegowe (2.10) i warunki zszycia prowadzą do układu równań następujących:

$$(1 - \vartheta)(B_1 + B_2 + B_3) - \rho(B_2 + 2B_3) - (\rho + \vartheta) \frac{4}{3} \frac{A_1}{A_2} \cos z_0 + (\rho \zeta + \vartheta \zeta + \vartheta) A_1 \sin^4 z_0 = 0,$$

$$\nu(B_1 + B_2 + B_3) + (\mu - 1)(B_2 + 2B_3) + (\mu + \nu) \frac{4}{3} \frac{A_1}{A_2} \cos z_0 - (\mu \zeta + \nu \zeta + \nu) A_1 \sin^4 z_0 = 0,$$

$$(6.20) \quad A_1 \sin^4 z^* = B_1 + B_2 x^* + B_3 x^{*2}, \quad -\frac{4}{3} \frac{A_1}{A_2} \cos z^* = B_2 + 2B_3 x^*,$$

$$-\frac{3}{4} \frac{A_1}{A_2^2} \frac{1}{\sin^2 z^*} = 2B_3, \quad \left( \frac{9}{4} \beta A_2^2 \right)^{1/3} \sin^2 z^* = \beta \chi_1 - \frac{1}{\beta \chi_2} \frac{B_1 + B_2 x^* + B_3 x^{*2}}{2B_3},$$

$$A_3 + A_2 \cos z_0 (3 - \cos^2 z_0) = 0, \quad A_3 + A_2 \cos z^* (3 - \cos^2 z^*) = x^*.$$

Ograniczając się do szczególnego przypadku pręta sztywnie utwierdzonego, ściskanego siłą skierowaną do bieguna, układ równań (6.20) można łatwo zredukować do czterech:

$$\frac{3}{4} \beta \chi_2 \left[ \left( \frac{9}{4} \beta A_2^2 \right)^{1/3} \sin^2 z^* - \beta \chi_1 \right] = A_2^2 \sin^6 z^*,$$

$$(6.21) \quad \frac{3}{8} (1-x^*)^2 + \frac{4}{3} A_2 (1-x^*) \cos z^* \sin^2 z^* - A_2^2 \sin^6 z^* = 0,$$

$$\cos z_0 (3 - \cos^2 z_0) = \cos z^* (3 - \cos^2 z^*) - \frac{x^*}{A_2}, \quad \alpha = -\frac{3A_2 \sin^4 z_0}{4 \cos z_0},$$

których rozwiązanie przy z góry obranej wartości  $z^*$  nie nastęrcza żadnych trudności. Siła krytyczna wyznaczona z warunku  $\varphi_2(1) = 1$  jest równa  $\beta_k = 1/\chi_1$  lub  $P_k = QF(1)$ . Wadą rozwiązań podanych w punktach 6.2 i 6.3 jest uwikłana zależność stałych  $A_i, B_i, z_0, z^*$  i  $x^*$  od parametrów charakteryzujących obciążenie. W konkretnych przypadkach obciążenia można jednak, w sposób przedstawiony w punkcie 6.2, otrzymać wyniki liczbowe dla różnych przyjętych wartości parametru  $z^*$  i przedstawić zależność stałych od parametrów obciążenia w postaci wykresów lub tablic.

Na zakończenie pragnę wyrazić wdzięczność prof. dr M. ŻYCZKOWSKIEMU za pomoc w wykonaniu tej pracy.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. N. G. CZENCOW, *Stojki najmniejszego wiesia*, Trudy CAGI, 1936, 265.
2. A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Optymalne kształtowanie pręta ściskanego siłą skierowaną do bieguna*, Rozpr. Inż., 17, 2, 299–329, 1969.
3. A. GAJEWSKI, *Pewne problemy optymalnego kształtowania pręta ściskanego siłą skierowaną do bieguna*, Mech. Teor. i Stos., 8, 2, 159–173, 1970.
4. A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Optimal design of elastic column subject to the general conservative behaviour of loading*, ZAMP, 21, 5, 806–818, 1970.
5. A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Optimal design of a column compressed by a subtangential force in the elastic-plastic range*, Arch. Mech. Stos., 23, 2, 1971.
6. Z. KORDAS, *Stateczność sprężyste utwierdzonego pręta ściskanego w ogólnym przypadku zachowania się obciążenia*, Rozpr. Inż., 11, 3, 435–448, 1963.
7. W. KRZYŚ, *Optymalne kształtowanie z uwagi na stateczność ściskanych słupów cienkościennych o profilu zamkniętym*, Zeszyt naukowy Nr 4, Pol. Krakowska 1967.
8. M. ŁAWRIENTIEW, L. LUSTERNIK, *Rachunek wariacyjny*, Warszawa 1954.
9. F. R. SHANLEY, *Inelastic column theory*, J. Aeron. Sci., 13, 12, 678, 1946.
10. M. ŻYCZKOWSKI, A. GAJEWSKI, *Optimal structural design in non-conservative problems of elastic stability*, Proc. IUTAM Symposium on Instability of Continuous Systems, Herrenalb/Karlsruhe 1969 [w druku].

## Резюме

ОПТИМАЛЬНЫЙ РАСЧЕТ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ КОЛОННЫ  
ДЛЯ ОБЩЕГО СЛУЧАЯ КОНСЕРВАТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ НАГРУЗКИ

В работе, дается решение задачи об определении оптимальной формы стержней находящихся в: 1 — упруго-пластической области, 2 — частично в упругой области и частично в упруго-пластической области; эти стержни подвергаются влиянию сжимающей силы, которая после потери устойчивости меняет не только свое направление, но и точку приложения.

Предполагается, однако, что во время потери устойчивости, она ведет себя консервативно (обладает потенциалом), что дало возможность опереть рассуждения на статическом критерии устойчивости. В работе доказывается, что для случая консервативной нагрузки, общее уравнения линий прогиба оптимального стержня, подвергается значительному упрощению, позволяющему получить точные решения. Принимая физические законы  $\sigma(\epsilon)$ , предложенные В. Кжисем [7] в пятой части работы, дается ряд простых решений для стержня, находящегося, полностью, в упруго-пластическом состоянии, а в шестой части — несколько решений для случаев, когда часть стержня находится, в упругом состоянии, а часть в упруго-пластическом. Приводятся рисунки оптимальных форм стержней сжимаемых силой направленной к полюсу.

## SUMMARY

OPTIMAL FORMING OF ELASTIC-PLASTIC ROD  
UNDER GENERAL CONSERVATIVE LOAD

This paper presents solution of the problem of optimization of rods in the elastic-plastic range as well as in the partially elastic and partially elastic-plastic range compressed by force which, after buckling, changes not only its direction but also its application point. It was assumed, however, that during the buckling the behaviour of the force is conservative (has a potential), which made it possible to base these considerations on a static criterion of stability. It is shown in the paper that in the case of conservative loading the general equation of the deflection line of an optimal rod becomes considerably simplified enabling the obtainment of exact solutions.

Accepting the physical laws  $\sigma(\epsilon)$  proposed by W. Krzyś [7], a series of simple solutions is given in Section 5 of the paper for a rod which is entirely in elastic-plastic state, and in Section 6, several solutions are given for cases in which a part of the rod is in elastic state and another part in elastic-plastic state.

Figs. show optimal shapes of rods compressed by a force directed to the pole.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 23 lutego 1970 r.*

---