

DYNAMIKA PRZEKŁADNI HIPOIDALNEJ DO NAPĘDU POJAZDÓW SZYNOWYCH

EUGENIUSZ KAMIŃSKI i WŁADYSŁAW NADOLSKI (WARSZAWA)

WAŻNIEJSZE OZNACZENIA

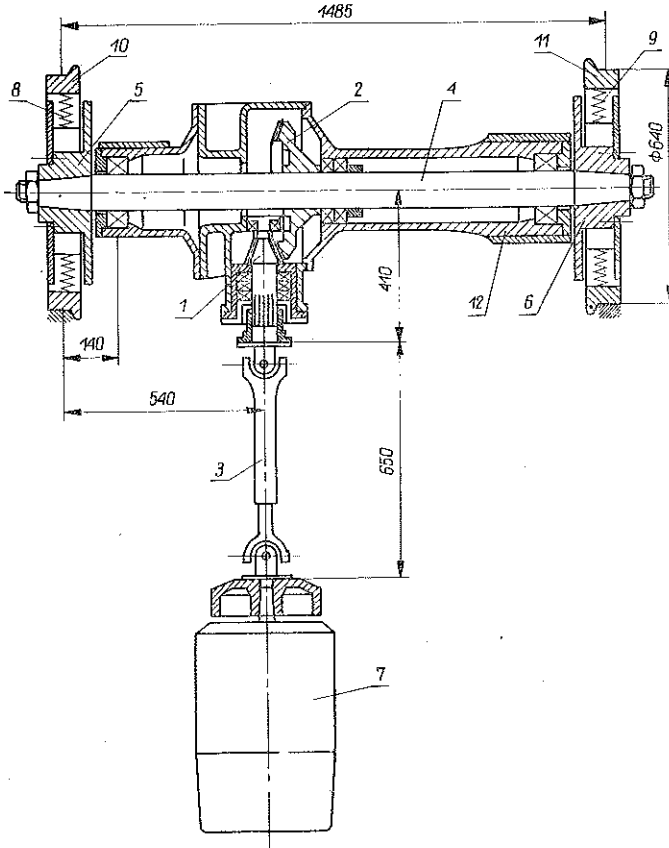
$k_c \left[\frac{\text{N}}{\text{mm } \mu\text{k}} \right]$	średnia sztywność zastępcza zębów,
$a \left[\frac{\text{N}}{\text{m } \mu\text{k}} \right]$	amplituda sztywności zastępczej zębów,
ω_i [sek ⁻¹]	prędkość kołowa koła i ,
z_i	ilość zębów koła i ,
J_{kj} [kgm ²]	moment bezwładności koła zębatego j względem osi obrotu,
J_{wk} [kgm ²]	moment bezwładności wału k względem osi obrotu,
J_{bl} [kgm ²]	moment bezwładności bryły l względem osi obrotu,
J_{0k} [m ⁴]	biegunowy moment bezwładności pola przekroju prostopadłego względem osi wału k ,
ρ [kg/m ³]	gęstość materiału,
l_k [m]	długość wału k .

WSTĘP

Do napędów pojazdów szynowych stosuje się coraz częściej przekładnie zębate hipoidalne, ponieważ przyczyniają się one do zwiększenia wytrzymałości, zmniejszenia ciężaru pojazdu oraz zmniejszenia poziomu głośności współpracujących kół. W przekładniach tych występują znaczne obciążenia dynamiczne przy pewnych prędkościach obwodowych kół. Wynika stąd potrzeba prowadzenia badań teoretycznych i eksperymentalnych, zmierzających przede wszystkim do wyznaczenia dynamicznych reakcji międzyzębnych i częstości drgań własnych układu. W niniejszej pracy pokazano tok postępowania przy następujących założeniach upraszczających: przy wyznaczaniu sił międzyzębnych uwzględnia się tylko odkształcenia zębów, a przy wyznaczaniu częstości drgań własnych pomija się te odkształcenia. Mimo tych uproszczeń badane przypadki zachowują sens techniczny, ponieważ w wielu przekładniach odkształcenia zębów są małe w porównaniu z odkształceniami innych elementów, a w szczególności wałów. W niektórych przypadkach, gdy wały są grube i krótkie, uwzględnia się tylko odkształcenia zębów.

1. WYZNACZANIE SIŁ MIĘDZYZĘBNYCH

Rozpatrzmy przekładnię hipoidalną o osiach prostopadle wchrowatych do napędu pojazdów tramwajowych, jak to pokazano na rys. 1. Przekładnię taką rozpatrujemy jako układ mechaniczny, w skład którego wchodzi: koła zębate 1 i 2 połączone wałami 3 i 4 z bryłami 5, 6 i 7. Z kolei bryły 5 i 6 połączone są sprężynami 8 i 9 z tarczami kół 10 i 11.



Rys. 1

Siły zmieniające się w czasie, występujące między zębami kół 1 i 2 przekładni hipoidalnej, wyznaczamy przy następujących założeniach.

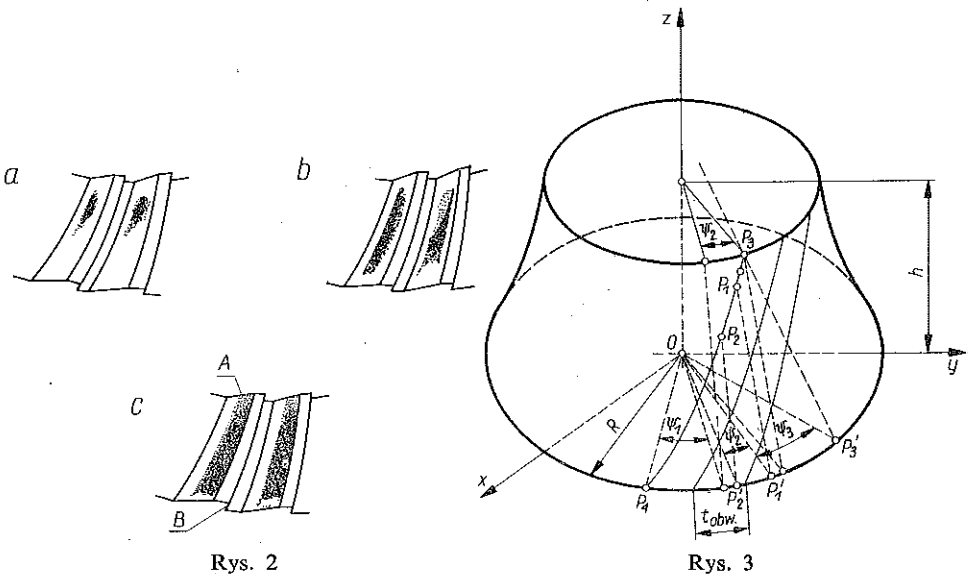
1. Siły rozłożone w sposób ciągły między powierzchniami styków zębów zastępujemy siłami skupionymi w punkcie *C* wzdłuż normalnej do powierzchni, gdzie *C* jest punktem styku hiperboloid w płaszczyźnie *oxyz* (rys. 3).

2. Bryła 7 jest obciążona momentem czynnym M_1 o module $|M_1| = \text{const}$, a bryły 10 i 11 momentami biernymi M_2 o module $|M_2| = \text{const}$.

3. Odkształcenia obudowy 12, brył 5, 6 i 7, tarcz kół 10 i 11 oraz wałów 3 i 4 są bardzo małe i w rozważaniach praktycznych mogą być pominięte.

4. Zęby kół są sprężysto odkształcalne i między nimi występują ciągłe styki.

Na rys. 2 przedstawione są powierzchnie zetknięć jako miejsca geometryczne styków zębów przy różnych siłach występujących między nimi. Najmniejsze długości styków zębów występują przy bardzo małych obciążeniach (rys. 2a). Ze wzrostem sił między zębami długości styków odpowiednio zwiększają się (rys. 2b). Mogą być one równe długości zęba zawartego między płaszczyznami A i B (rys. 2c).



Rys. 2

Rys. 3

W rozpatrywanej przekładni przyjmujemy:

1. Przy bardzo małych obciążeniach «zrzućcie» długości styku na okrąg przekroju płaskiego hiperboloidy koła dużego w płaszczyźnie $oxyz$ jest większe od podziałki obwodowej, jak to pokazano na rys. 3. Warunek ten jest spełniony, gdy

$$(1.1) \quad R\psi_{12} > t_{obw},$$

gdzie R oznacza promień okręgu w przekroju płaskim hiperboloidy w płaszczyźnie $oxyz$, $\psi_{12} = \angle P_1^1 O P_2^1$, gdzie łuk $P_1^1 P_2^1$ jest równy łukowi $P_1 P_2$ (rys. 3) [2].

2. Przy maksymalnych obciążeniach przekładni różnica $P_3 P_4 - \delta$ jest mniejsza od długości łuku $P_3^1 P_4^1$:

$$(1.2) \quad R\psi < P_3^1 P_4^1 - \delta,$$

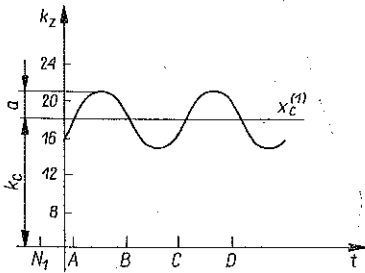
gdzie $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$ oznacza kąt $\angle O P_3^1 P_4^1$ w płaszczyźnie $oxyz$ oraz δ wartość wyznaczoną doświadczalnie [1].

3. Wykres sztywności zastępczej zębów wzdłuż osi t jest funkcją harmoniczną i przesuniętą o stałą wartość k_c od osi t , jak pokazano na rys. 4. Zakładamy, że amplitudy sztywności zastępczej zębów są stałe, a częstotliwości zmienne przy różnych długościach styków zębów.

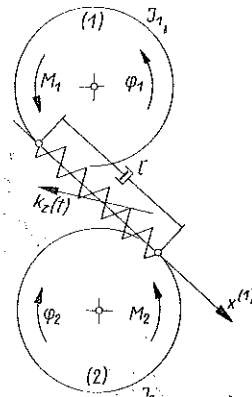
Równanie sztywności zastępczej zębów ma postać

$$(1.3) \quad k(t) = k_c + a \cos(s \omega_c t),$$

gdzie $s=0,1; 0,5; 1; 2; 3$, $\omega_c = \omega_1 z_1 = \omega_2 z_2$. Przyjmujemy, że bryła 7 jest obciążona stałym momentem czynnym M_1 o module $|M_1| = \text{const}$, natomiast każda tarcza koła 10 i 11 momentem biernym M_2 o module $|M_2| = \text{const}$. Sztywności skrętne sprężyn 8 i 9 są równe i oznaczamy je przez κ [N/m]. Przyjmujemy ponadto, że między tarczami kół 10, 11 a szynami nie występują poślizgi, z powodu bardzo dużych docisków kół jezdnych do szyn i dużej wartości współczynnika tarcia w stykach.



Rys. 4



Rys. 5

Przy podanych założeniach model dyskretny przekładni hipoidalnej jest przedstawiony na rys. 5. Składa się ono z dwóch brył 1 i 2, połączonych sprężyną o charakterystyce nieliniowej i tłumikiem wiskotycznym. Bryła 1 jest obciążona stałym momentem czynnym M_1 , a bryła 2 stałym momentem biernym M_2 .

Model dyskretny przekładni hipoidalnej przedstawia układ mechaniczny o dwóch stopniach swobody. Przez φ_1 i φ_2 oznaczamy współrzędne uogólnione brył 1 i 2 wzdłuż stałych osi obrotów.

Równanie ruchu ma postać

$$(1.4) \quad \ddot{\varphi} + \frac{l}{m_{\text{red}}} \dot{\varphi} + \left[k_c + a \cos(s\omega_c t) \frac{1}{m_{\text{red}}} \right] \varphi - \frac{1}{2} s z_1 a \frac{1}{m_{\text{red}}} \sin(s\omega_c t) \varphi^2 = \frac{M_1}{J_{\text{red}}},$$

gdzie

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{R_2}{R_1} \varphi_2, \quad J_{\text{red}} = \frac{J_1 J_2}{J_1 i^2 + J_2}, \quad m_{\text{red}} = \frac{J_{\text{red}}}{R_{z1}^2 \omega_c^2}.$$

Wartość współczynnika l wyznaczamy z następującego wzoru:

$$(1.5) \quad l = 2\beta \sqrt{m_{\text{red}} \sup k(t)},$$

gdzie współczynnik β jest zależny od prędkości obwodowej kół [3].

Po wprowadzeniu zmiennej bezwymiarowej $\tau = \omega_c t$ równanie (1.4) przyjmuje postać

$$(1.6) \quad \varphi'' + \frac{l}{m_{\text{red}} \omega_c} \varphi' + \frac{k_c + a \cos(s\tau)}{m_{\text{red}} \omega_c^2} \varphi - \frac{1}{2} s z_1 a \frac{1}{m_{\text{red}} \omega_c^2} \sin(s\tau) \varphi^2 = \frac{M_1}{J_{\text{red}} \omega_c^2}.$$

Rozwiązanie równania (1.6) przeprowadzamy na maszynie cyfrowej. Zakładamy, że wszystkie rozwiązania (1.6) są oscylujące i stabilne [4]. Przy rozwiązywaniu równania (1.6) korzystamy z numerycznej metody Rungego-Kutty. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że po pewnej ilości okresów i przy dowolnych warunkach brzegowych otrzymujemy drgania okresowe wzdłuż τ_1 , które zbliżone są do harmonicznych, jak pokazano na rys. 6. Oś τ_1 jest przesunięta od osi τ o wartość φ_{st} .

W zagadnieniach praktycznych wygodniej jest korzystać ze współczynnika dynamiczności λ jako funkcji obr/min koła o mniejszej ilości zębów według następującego wzoru:

$$(1.7) \quad \lambda = \frac{P}{P_{st}} = 1 + \frac{\varphi}{\varphi_{st}},$$

gdzie φ oznacza amplitudę drgań ustalonych (rys. 6), φ_{st} przemieszczenie statyczne, które wyznaczamy bezpośrednio z wykresu podanego na rys. 6.

Wartość φ_{st} można również wyznaczyć ze wzoru

$$(1.8) \quad \varphi_{st} = \frac{P_{st}}{R_{sr} \sup k(\tau)},$$

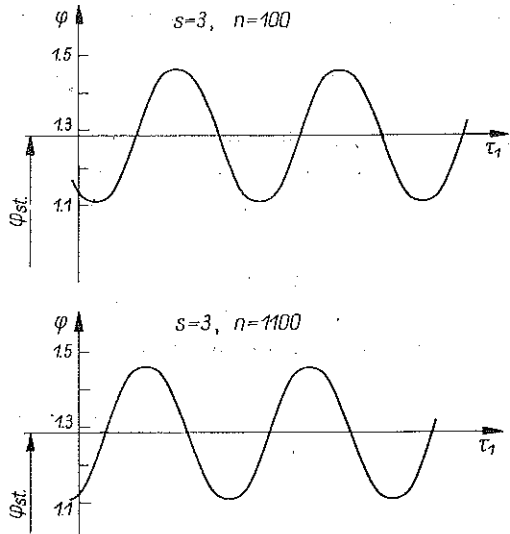
gdzie P_{st} oznacza siłę statyczną występującą między zębami, R_{sr} średni promień stożka ściętego — koła zębatego o mniejszej ilości zębów.

Przykład. Wyznamy siły między zębami kół hipoidalnych, które scharakteryzowane są następującymi parametrami: $R_{sr} = [35]$ mm, $b = 60$ [mm], $z_1 = 6$, $a = 3 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm } \mu\text{k}} \right]$, $K_c = 18,5 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm } \mu\text{k}} \right]$, $m_{red} = 0,0164$ [kg], $J_{red} = 1,182$ [kgcm], $M_1 = 1962$ [Nm].

Wartości amplitud φ dla danych n i s podane są w tablicy 1.

Tablica 1

L.p.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
s	0,1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3
n	100	100	800	1500	100	1500	3000	5000	9000	11000	15000	25000
$10^3 \varphi$	0,1752	0,1752	0,1752	0,1752	0,1750	0,1750	0,1862	0,2041	0,3537	0,3537	0,2034	0,0414



Rys. 6

Wartość φ_{st} jest następująca:

$$\varphi_{st} = \frac{1962}{35^2 \cdot 21,5 \cdot 60} = 1,25 \cdot 10^{-3}.$$

Maksymalna wartość współczynnika dynamicznego λ wynosi

$$\lambda = 1 + \frac{0,354}{1,25} = 1,28.$$

Z przytoczonych danych wynika, że wartości współczynnika λ nieznacznie różnią się, dla $s=0,1$ do 3 i n od 100 do 1500 obr/min. Największa wartość występuje w obszarze zawartym między 5000 a 10000 obr/min.

Z przeprowadzonych rozważań wynika praktyczny wniosek. Wartości sił występujące między zębami kół przekładni hipoidalnej do napędu pojazdów szynowych można wyznaczać z pewnym przybliżeniem analitycznie w tych przypadkach, w których można w zagadnieniach praktycznych przyjąć podane powyżej założenia.

2. WYZNACZENIE CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH

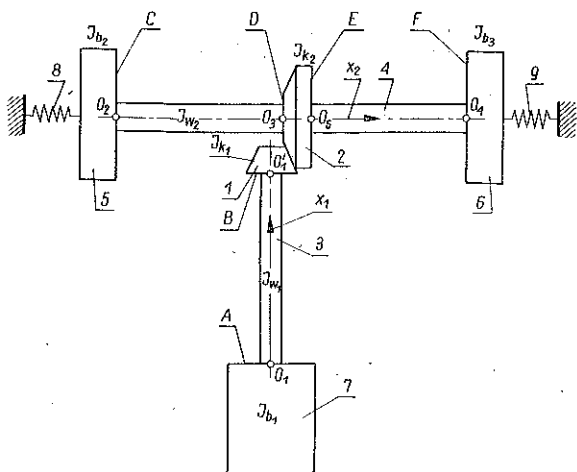
Częstości drgań własnych przekładni hipoidalnej wyznaczamy w zasadzie przy tych samych założeniach, przy których zostały wyznaczone siły między zębami kół. Różnica polega jedynie na tym, że w rozpatrywanym przypadku zęby są sztywne,

natomiast wały przekładni są tylko odkształcone skrętnie. Równania drgań skrętnych wałów są zgodne z następującymi prawami:

- 1) prawem zachowania energii mechanicznej,
- 2) prawem Hooke'a.

Przyjmujemy, że odkształcenia wałów są tak małe, że kwadraty i iloczyny odkształceń i ich pochodnych mogą być pominięte.

Model przekładni hipoidalnej, uwzględniający sprężyste odkształcenia skrętne wałów 3 i 4 o parametrach rozłożo-

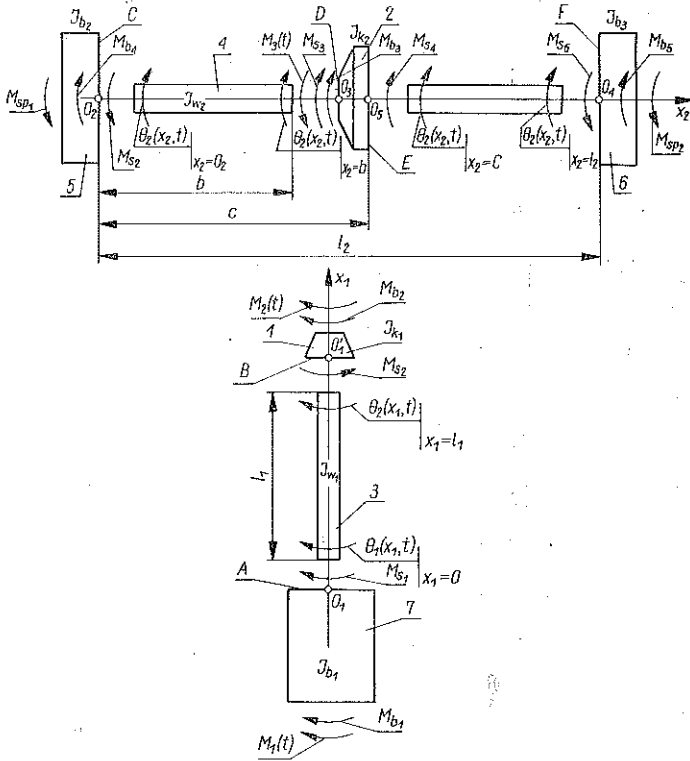


Rys. 7

nych w sposób ciągły, jest przedstawiony na rys. 7. W celu ułatwienia dalszych rozważań zakładamy, że kształt wału 3 jest walcem kołowym. Niech punkty O_1 i O_1' leżą w płaszczyznach A i B na osi wału 3. Odpowiednio punkty O_2, O_3, O_4 i O_5 w płaszczyznach C, D, E i F na osi wału 4. Przyjmujemy początek osi x_1 w punkcie O_1 . Oś x_1 kierujemy zgodnie z osią wału 3 i zwracamy ją od punktu O_1 do O_1' . Podobnie kierujemy oś x_2 z osią wału 4 i zwracamy ją od punktu O_2 do O_3 . Początek osi x_2 przyjmujemy w punkcie O_2 .

2.1. Warunki brzegowe i początkowe

Warunki brzegowe układu piszemy dla kół zębatach 2, 1 i brył 5, 6, 7 jak pokazano na rys. 8. Koła zębata i bryły są obciążone momentami sił: czynnych zewnętrznych, masowych i sprężystych.



Rys. 8

Piszemy zgodnie z zasadą d'Alemberta równania ruchu:

a) bryły 7

$$(2.1) \quad M_1(t) - J_{b1} \left[\frac{\partial^2 \theta_1(x_1, t)}{\partial t^2} \right]_{x_1=0_1} + GJ_{01} \left[\frac{\partial \theta_1(x_1, t)}{\partial x_1} \right]_{x_1=0_1} = 0;$$

b) koła zębatego 1

$$(2.2) \quad M_2(t) - J_{k1} \left[\frac{\partial^2 \theta_1(x_1, t)}{\partial t^2} \right]_{x_1=l_1} - GJ_{01} \left[\frac{\partial \theta_1(x_1, t)}{\partial x_1} \right]_{x_1=0_1} = 0;$$

c) koła zębatego 2

$$(2.3) \quad M_3(t) + KJ_{k2} \left[\frac{\partial^2 \theta_2(x_2, t)}{\partial t^2} \right]_{x_2=a_1} - GJ_{02} \left[\frac{\partial \theta_2(x_2, t)}{\partial x_2} \right]_{x_2=b} - GJ_{02} \left[\frac{\partial \theta_2(x_2, t)}{\partial x_2} \right]_{x_2=c} = 0,$$

gdzie $a_1 = (b+c)/2$, b oznacza odległość między płaszczyznami C i D oraz c — odległość między C i E .

Równanie równowagi kół współpracujących piszemy w postaci

$$(2.4) \quad P_2(t) - P_3(t) = 0.$$

Po uwzględnieniu równań (2.2), (2.3) w równaniu (2.4) mamy

$$(2.5) \quad \left\{ J_{k1} \left[\frac{\partial^2 \theta_1(x_1, t)}{\partial t^2} \right]_{x_1=l_1} + GJ_{01} \left[\frac{\partial \theta_1(x_1, t)}{\partial x_1} \right]_{x_1=l_1} \right\} \frac{R_2}{R_1} + \\ + J_{k2} \left[\frac{\partial^2 \theta_2(x_2, t)}{\partial t^2} \right]_{x_2=b} - GJ_{02} \left[\frac{\partial \theta_2(x_2, t)}{\partial x_2} \right]_{x_2=c} = 0.$$

d) Równanie bryły 5 jest następujące:

$$(2.6) \quad J_{b2} \left[\frac{\partial^2 \theta_2(x_2, t)}{\partial t^2} \right]_{x_2=0_2} + GJ_{02} \left[\frac{\partial \theta_2(x_2, t)}{\partial x_2} \right]_{x_2=0_2} + \kappa_2 [\theta_2(x_2, t)]_{x_2=0_2} = 0;$$

e) równanie bryły 6

$$(2.7) \quad J_{b3} \left[\frac{\partial^2 \theta_2(x_2, t)}{\partial t^2} \right]_{x_2=l_2} + GJ_{02} \left[\frac{\partial \theta_2(x_2, t)}{\partial x_2} \right]_{x_2=l_2} + \kappa_2 [\theta_2(x_2, t)]_{x_2=l_2} = 0.$$

Centroidy (koła toczone) kół zębatych 1 i 2 spełniają następującą zależność:

$$(2.8) \quad R_1 [\theta_1(x_1, t)]_{x_1=l_1} = R_2 [\theta_2(x_2, t)]_{x_1=b}.$$

Warunek geometrycznej zgodności odkształceń wału 2 ma postać

$$(2.9) \quad [\theta_2(x_2, t)]_{x_2=b} = [\theta_2(x_2, t)]_{x_2=c}.$$

2.2. Funkcje własne

Równania drgań skrętnych wałów 3, 4 mają postać:

a) wału 3

$$(2.10) \quad \frac{\partial^2 \theta_1(x_1, t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \theta_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} = 0,$$

b) wału 4

$$(2.11) \quad \frac{\partial^2 \theta_2(x_2, t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \theta_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} = 0.$$

Calek szczególnych układu równań szukamy w postaci:

c) dla wału 3

$$(2.12) \quad \theta_1(x_1, t) = X_1(x_1)T(t), \quad \text{jeśli } 0_1 \leq x_1 \leq l_1;$$

d) dla wału 4

$$(2.13) \quad \theta_2(x_2, t) = \begin{cases} \theta_{2L}(x_2, t) = X_{2L}(x_2)T(t), & \text{jeśli } 0_2 \leq x_2 \leq b; \\ \theta_{2P}(x_2, t) = X_{2P}(x_2)T(t), & \text{jeśli } c \leq x_2 \leq l_2. \end{cases}$$

Po podstawieniu (2.12) do (2.10) i po dokonaniu operacji rozdzielenia zmiennych otrzymamy

$$(2.14) \quad \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0,$$

$$(2.15) \quad X_1''(x_1) + \frac{\omega^2}{a^2} X_1(x_1) = 0, \quad \text{jeśli } 0_1 \leq x_1 \leq l_1.$$

Rozwiązaniem równania (2.3) jest funkcja

$$(2.16) \quad X_1(x_1) = C_1 \sin \frac{\omega}{a} x_1 + C_2 \cos \frac{\omega}{a} x_1, \quad \text{jeśli } 0_1 \leq x_1 \leq l_1.$$

Po uwzględnieniu (2.13) w równaniu (2.11) znajdziemy

$$(2.17) \quad \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0,$$

$$(2.18) \quad X_{2L}''(x_2) + \frac{\omega^2}{a^2} X_{2L}(x_2) = 0, \quad \text{jeśli } 0_1 \leq x_2 < b,$$

$$X_{2P}''(x_2) + \frac{\omega^2}{a^2} X_{2P}(x_2) = 0, \quad \text{jeśli } c \leq x_2 < l_2.$$

Rozwiązanie równania (2.18) ma postać

$$(2.19) \quad X_2(x_2) = \begin{cases} X_{2L}(x_2) = C_3 \sin \frac{\omega}{a} x_2 + C_4 \cos \frac{\omega}{a} x_2, & \text{jeśli } 0_2 \leq x_2 \leq b; \\ X_{2P}(x_2) = C_3 \sin \frac{\omega}{a} x_2 + C_4 \cos \frac{\omega}{a} x_2 + C_5 \sin \frac{\omega}{a} (x_2 - c) + \\ \quad + C_5 \cos \frac{\omega}{a} (x_2 - c), & \text{jeśli } c \leq x_2 \leq l_2. \end{cases}$$

Wymagamy również, aby całka szczególna (2.11) spełniała równanie opisujące warunki brzegowe (2.1), (2.5), (2.8) i (2.9), a całka (2.13)—(2.5), (2.6), (2.7), (2.8) i (2.9).

Powyższe warunki przy założeniu, że $T(t) \neq 0$, spełniamy w sposób następujący:

a) uwzględniając (2.12) w równaniu (2.1) przy założeniu, że $M(t) = 0$, mamy

$$(2.20) \quad J_{b1} \omega^2 [X_1(x_1)]_{x_1=0_1} + GJ_{01} [X_1'(x_1)]_{x_1=0_1} = 0;$$

b) po podstawieniu (2.12) i (2.13) do równania (2.5) znajdziemy

$$(2.21) \quad \left\{ -J_{k1} \omega^2 [X_1(x_1)]_{x_1=l_1} + GJ_{01} [X_1'(x_1)]_{x_1=l_1} \right\} \frac{R_2}{R_1} - J_{k2} \omega^2 [X_{2L}(x_2)]_{x_2=0_1} - \\ - GJ_{02} [X_{2L}'(x_2)]_{x_2=b} - GJ_{02} [X_{2P}'(x_2)]_{x_2=c} = 0;$$

c) po podstawieniu (2.13) do (2.6) mamy

$$(2.22) \quad -J_{b2} \omega^2 [X_{2L}(x_2)]_{x_2=0} + GJ_{02} [X_{2L}'(x_2)]_{x_2=0} + \kappa [X_{2L}(x_2)]_{x_2=0} = 0;$$

d) po uwzględnieniu (2.13) w równaniu (2.7) znajdziemy

$$(2.23) \quad -J_{b2} \omega^2 [X_{2P}(x_2)]_{x_2=l_2} + GJ_{02} [X'_{2P}(x_2)]_{x_2=l_2} + \kappa [X_{2L}(x_2)]_{x_2=l_2} = 0;$$

e) warunek (2.8) po uwzględnieniu (2.12) i (2.13) ma postać

$$(2.24) \quad R_1 [X_1(x_1)]_{x_1=l_1} = R_2 [X_2(x_2)]_{x_1=b};$$

f) uwzględniając (2.12) i (2.13) w (2.8) znajdziemy

$$(2.25) \quad [X_2(x_2)]_{x_2=b} = [X_2(x_2)]_{x_2=c}.$$

Równanie (2.20) po podstawieniu (2.16) przyjmie postać

$$(2.26) \quad GJ_{01} \frac{\omega}{a} C_1 + J_{b1} \omega^2 C_2 = 0.$$

Uwzględniając (2.16) i (2.19) w równaniu (2.21) po dokonaniu przekształceń znajdziemy

$$(2.27) \quad \left[-J_{k1} \omega^2 \sin \frac{\omega}{a} l_1 + GJ_{01} \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} l_1 \right] \frac{R_2}{R_1} C_1 + \\ + \left[-J_{k1} \omega^2 \cos \frac{\omega}{a} l_1 - GJ_{01} \frac{\omega}{a} \sin \frac{\omega}{a} l_1 \right] \frac{R_2}{R_1} C_2 + \\ + \left[-J_{k2} \omega^2 \sin \frac{\omega}{a} a_1 - GJ_{02} \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} b - GJ_{02} \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} c \right] C_3 + \\ + \left[-J_{k2} \omega^2 \cos \frac{\omega}{a} a_1 + GJ_{02} \frac{\omega}{a} \sin \frac{\omega}{a} b + GJ_{02} \frac{\omega}{a} \sin \frac{\omega}{a} c \right] C_4 + \\ + \left[-GJ_{02} \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} (l_2 - c) \right] C_5 + GJ_{02} \frac{\omega}{a} \sin \frac{\omega}{a} (l_2 - c) C_6 = 0.$$

Po podstawieniu (2.19) do równania (2.22) mamy

$$(2.28) \quad GJ_{02} \frac{\omega}{a} C_3 + (\kappa - J_{b2} \omega^2) C_4 = 0.$$

Równanie (2.23) po uwzględnieniu (2.19) ma postać

$$(2.29) \quad \left[-J_{b3} \omega^2 \sin \frac{\omega}{a} l_2 + \kappa \sin \frac{\omega}{a} l_2 + GJ_{02} \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} l_2 \right] C_3 + \\ + \left[-J_{b3} \omega^2 \cos \frac{\omega}{a} l_2 - GJ_{02} \frac{\omega}{a} \sin \frac{\omega}{a} l_2 + \kappa \cos \frac{\omega}{a} l_2 \right] C_4 + \\ + \left[-J_{b3} \omega^2 \sin \frac{\omega}{a} (l_2 - c) + GJ_{02} \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} (l_2 - c) + \kappa \sin \frac{\omega}{a} (l_2 - c) \right] C_5 + \\ + \left[-J_{b3} \omega^2 \cos \frac{\omega}{a} (l_2 - c) - GJ_{02} \frac{\omega}{a} \sin \frac{\omega}{a} (l_2 - c) + \kappa \cos \frac{\omega}{a} (l_2 - c) \right] C_6 = 0.$$

Uwzględniając (2.16) i (2.19) w (2.24) znajdziemy

$$(2.30) \quad R_1 \sin \frac{\omega}{a} l_1 C_1 + R_1 \cos \frac{\omega}{a} l_1 C_2 + \left(-R_2 \sin \frac{\omega}{a} b \right) C_3 + \left(-R_2 \cos \frac{\omega}{a} b \right) C_4 = 0.$$

Po podstawieniu (2.19) do (2.25) otrzymamy

$$(2.31) \quad \left(\sin \frac{\omega}{a} b - \sin \frac{\omega}{a} c \right) C_3 + \left(\cos \frac{\omega}{a} b - \cos \frac{\omega}{a} c \right) C_4 + (-1) C_6 = 0.$$

Równania (2.26), (2.27), (2.28), (2.29), (2.30) i (2.31) piszemy w następującej postaci:

$$(2.32) \quad \begin{aligned} a_{11} C_1 + a_{12} C_2 &= 0, & a_{21} C_1 + a_{22} C_2 + a_{23} C_3 + a_{24} C_4 + a_{25} C_5 + a_{26} C_6 &= 0, \\ a_{33} C_3 + a_{34} C_4 + 0, & & a_{43} C_3 + a_{44} C_4 + a_{45} C_5 + a_{46} C_6 &= 0, \\ a_{51} C_1 + a_{52} C_2 + a_{53} C_3 + a_{54} C_4 &= 0, & a_{63} C_3 + a_{64} C_4 + a_{66} C_6 &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.33) \quad \begin{aligned} a_{11} &= GJ_{01} \frac{\omega}{a}, & a_{12} &= J_{b1} \omega^2, \\ a_{21} &= \left[-J_{k1} \omega^2 \sin \frac{\omega}{a} l_1 + GJ_{01} \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} l_1 \right] \frac{R_2}{R_1}, \\ a_{22} &= \left[-J_{k1} \omega^2 \cos \frac{\omega}{a} l_1 - GJ_{01} \frac{\omega}{a} \sin \frac{\omega}{a} l_1 \right] \frac{R_2}{R_1}, \\ a_{23} &= -J_{k2} \omega^2 \sin \frac{\omega}{a} a_1 - GJ_{02} \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} b - GJ_{02} \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} c, \\ a_{24} &= -J_{k2} \omega^2 \cos \frac{\omega}{a} a_1 + GJ_{02} \frac{\omega}{a} \sin \frac{\omega}{a} b + GJ_{02} \frac{\omega}{a} \sin \frac{\omega}{a} c, \\ a_{25} &= -GJ_{02} \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} (l_2 - c), & a_{26} &= GJ_{02} \frac{\omega}{a} \sin \frac{\omega}{a} (l_2 - c), \\ a_{33} &= GJ_{02} \frac{\omega}{a}, & a_{34} &= \kappa - J_{b2} \omega^2, \\ a_{43} &= -J_{b3} \omega^2 \sin \frac{\omega}{a} l_2 + \kappa \sin \frac{\omega}{a} l_2 + GJ_{02} \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} l_2, \\ a_{44} &= -J_{b3} \omega^2 \cos \frac{\omega}{a} l_2 - GJ_{02} \frac{\omega}{a} \sin \frac{\omega}{a} l_2 + \kappa \cos \frac{\omega}{a} l_2, \\ a_{45} &= -J_{B3} \omega^2 \sin \frac{\omega}{a} (l_2 - c) + GJ_{02} \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} (l_2 - c) + \kappa \sin \frac{\omega}{a} (l_2 - c), \\ a_{46} &= -J_{B3} \omega^2 \cos \frac{\omega}{a} (l_2 - c) - GJ_{02} \frac{\omega}{a} \sin \frac{\omega}{a} (l_2 - c) + \kappa \cos \frac{\omega}{a} (l_2 - c), \end{aligned}$$

$$(2.33) \quad a_{51} = R_1 \sin \frac{\omega}{a} l_1, \quad a_{52} = R_1 \cos \frac{\omega}{a} l_1, \quad a_{53} = -R_2 \sin \frac{\omega}{a} b,$$

[c.d.]

$$a_{54} = -R_2 \cos \frac{\omega}{a} b, \quad a_{63} = \sin \frac{\omega}{a} b - \sin \frac{\omega}{a} c,$$

$$a_{64} = \cos \frac{\omega}{a} b - \cos \frac{\omega}{a} c, \quad a_{66} = -1.$$

Z warunku zerowania się wyznacznika charakterystycznego układu równań (2.32) otrzymujemy równanie częstości drgań własnych układu:

$$(2.34) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{63} & a_{64} & 0 & a_{66} \end{vmatrix} = 0.$$

Przykład. Wyznamy kilka kolejnych częstości drgań własnych, zaczynając od pierwszej, dla przekładni hipoidalnej o parametrach rozłożonych w sposób ciągły dla następujących wartości: $J_{01} = 54$ [cm⁴], $J_{b1} = 9,0$ [kG cm], $J_{k1} = 0,22$ [kG cm], $l_1 = 58,5$ [cm], $R_2/R_1 = z_2/z_1 = 43/6$, $J_{k2} = 13,9$ [kG cm], $J_{02} = 1000$ [cm⁴], $a_1 = 1/2$ ($b+c$) = $1/2$ ($53,2+58,8$) = $55,6$ [cm], $b = 53,2$ [cm], $c = 58,0$ [cm], $l_2 = 132,7$ [cm], $J_{b2} = J_{b3} = 27,4$ [kG cm], $R_1 = 2,6$ [cm], $R_2 = 19$ [cm].

Wartości współczynników $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{66}$ są następujące:

$$a_{11} = 152\omega, \quad a_{12} = 9\omega^2, \quad a_{21} = -1,58\omega^2 \sin(1,87 \cdot 10^{-4}\omega) + 1090\omega \cos(1,87 \cdot 10^{-4}\omega),$$

$$a_{22} = -1,58\omega^2 \cos(1,87 \cdot 10^{-4}\omega) - 1090\omega \sin(1,87 \cdot 10^{-4}\omega),$$

$$a_{23} = -13,9\omega^2 \sin(1,85 \cdot 10^{-4}\omega) - 2560\omega \cos(1,7 \cdot 10^{-4}\omega) - 2560\omega \cos(2,02 \cdot 10^{-4}\omega),$$

$$a_{24} = -13,9\omega^2 \cos(1,85 \cdot 10^{-4}\omega) + 2560\omega \sin(1,7 \cdot 10^{-4}\omega) + 2560\omega \sin(2,02 \cdot 10^{-4}\omega),$$

$$a_{25} = -2560\omega \cos(2,23 \cdot 10^{-4}\omega), \quad a_{26} = 2560\omega \sin(2,23 \cdot 10^{-4}\omega),$$

$$a_{33} = 2560\omega, \quad a_{34} = 1,8 \cdot 10^6 - 27,4\omega^2,$$

$$a_{43} = -27,4\omega^2 \sin(4,24 \cdot 10^{-4}\omega) + 1,8 \cdot 10^6 \sin(4,24 \cdot 10^{-4}\omega) + 2560 \cos(4,24 \cdot 10^{-4}\omega),$$

$$a_{44} = -27,4\omega^2 \cos(4,24 \cdot 10^{-4}\omega) - 2560 \sin(4,24 \cdot 10^{-4}\omega) + 1,8 \cdot 10^6 \cos(4,24 \cdot 10^{-4}\omega),$$

$$a_{45} = -27,3\omega^2 \sin(2,23 \cdot 10^{-4}\omega) + 2560 \cos(2,23 \cdot 10^{-4}\omega) + 1,8 \cdot 10^6 \sin(2,23 \cdot 10^{-4}\omega),$$

$$a_{46} = -27,3\omega^2 \cos(2,23 \cdot 10^{-4}\omega) - 2560 \sin(2,23 \cdot 10^{-4}\omega) + 1,8 \cdot 10^6 \cos(2,23 \cdot 10^{-4}\omega),$$

$$a_{51} = 2,6 \sin(1,87 \cdot 10^{-4}\omega), \quad a_{52} = 2,6 \cos(1,87 \cdot 10^{-4}\omega),$$

$$a_{53} = -19 \sin(1,7 \cdot 10^{-4}\omega), \quad a_{54} = -19 \cos(1,7 \cdot 10^{-4}\omega),$$

$$a_{63} = \sin(1,7 \cdot 10^{-4}\omega) - \sin(2,02 \cdot 10^{-4}\omega),$$

$$a_{64} = \cos(1,7 \cdot 10^{-4}\omega) - \cos(2,02 \cdot 10^{-4}\omega), \quad a_{66} = -1.$$

Kolejne częstości drgań własnych licząc od pierwszej dla powyższych danych, wyznaczone za pomocą maszyny cyfrowej, są następujące:

$$\omega_1 = 77,8 \quad (\approx 12,35 \text{ [Hz]}),$$

$$\omega_2 = 627 \quad (\approx 100 \text{ [Hz]}),$$

$$\omega_3 = 746 \quad (\approx 119 \text{ [Hz]}),$$

$$\omega_4 = 1722 \quad (\approx 274,1 \text{ [Hz]}).$$

W układzie mogą wystąpić wymuszenia w zakresie obrotów silnika; $n = 3200$ obr/min (od 0 do 53 Hz), a po uwzględnieniu liczby zębów wałka ($z = 6$) w zakresie od 0 do 318 Hz. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że częstotliwości drgań mieszczą się w tym przedziale. Można więc przewidzieć, że w układzie mogą występować przy określonej prędkości jazdy szkodliwe drgania rezonansowe. Maksymalna prędkość jazdy (przy $n = 3200$ obr/min) wynosi

$$V = 0,12\pi n R_k \frac{z_1}{z_2} = 54 \text{ [km/h]}.$$

Pierwsza niebezpieczna prędkość, przy której występowałby rezonans, wynosiłaby

$$V_1 = \frac{12,35}{53} \cdot 54 = 12,6 \text{ [km/h]}.$$

Wartości ω_2 i ω_3 są bliskie, więc druga niebezpieczna prędkość mieściłaby się w granicach

$$V_{2,1} = \frac{100}{318} \cdot 54 = 17,0 \text{ [km/h]}, \quad V_{2,2} = \frac{119}{318} \cdot 54 = 20,2 \text{ [km/h]},$$

natomiast trzecia prędkość

$$V_3 = \frac{274}{318} \cdot 54 = 47 \text{ [km/h]}.$$

Podobnie można wyznaczyć następne niebezpieczne prędkości, przy których występowałby rezonans.

W zakończeniu należy nadmienić, że wyznaczone powyżej niebezpieczne prędkości, przy których występują rezonanse, nieznacznie różnią się od niebezpiecznych prędkości otrzymanych w warunkach eksploatacyjnych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. *Strength of Bevel and hypoid gears*, Gleason, Rochester, N. Y. 1965.
2. W. NADOLSKI, *Quasi-punktowe ząbienia się kół hipoidalnych typu Formate'a*, I Konf. Nauk. Techn. nt. «Ciągniki gąsienicowe w rolnictwie», cz. II, Koło SIMP przy ZM Gorzów, 1967.
3. M. BOSCH, *Das dynamische Verhalten von Stirnradgetrieben unter besonderer Berücksichtigung der Verzahnungsgenauigkeit*, Teil 1, Ind-Anz., 87, 102, 1965.
4. W. NADOLSKI, *Sily dynamiczne występujące między zębami kół przekładni jednostopniowej o osiach równoległych*, Rozpr. Inżyn. 19, 3, 1971.

Резюме

ДИНАМИКА ГИПОИДНОЙ ПЕРЕДАЧИ В ПРИВОДЕ РЕЛЬСОВОГО ТРАНСПОРТА

В работе дан анализ механической модели гипоидной передачи со сосредоточенными и непрерывно распределенными параметрами. На основе дискретной модели определены динамические взаимодействия в зубчатом зацеплении. При этом предполагалось, что:

- 1) между зубьями не происходят соударения;
- 2) деформации валов и их опор не влияют на деформации зубьев.

Крутильные частоты собственных колебаний определены на основе модели с непрерывно распределенными параметрами.

SUMMARY

DYNAMICS OF HYPOIDAL GEAR FOR RAILWAY VEHICLES DRIVE

In the paper is analyzed the mechanical model of a hypoidal gear with continuously distributed parameters. On the basis of a discrete model are determined the dynamic reactions acting between the teeth under the following assumptions:

- 1) no impact occurs between the teeth;
- 2) deformation of the shafts and their supports do not influence the deformation of the teeth.

The free torsional vibration frequencies of the system are determined from the model characterized by continuously distributed parameters.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 grudnia 1971 r.
