

ZAGADNIENIA DOŚWIADCZALNEJ WERYFIKACJI MODELU CIAŁA ROZDROBNIONEGO O WZMOCNIENIU GĘSTOŚCIOWYM

ANDRZEJ DRESCHER (WARSZAWA)

1. WPROWADZENIE

Sprężone, sprężysto-lepkoplastyczne własności materiałów rozdrobnionych, takich jak grunty, sproszkowane rudy, cement, są przyczyną niezadowolających rezultatów dotychczas proponowanych, uproszczonych metod opisu ich zachowania. Możliwość pominięcia efektów lepkich w części tych materiałów zmniejsza jedynie nieznacznie trudności w konstruowaniu opisu zgodnego z doświadczeniami.

Rozważmy klasę materiałów sprężysto-plastycznych (np. suchy piasek, ziarno, cukier). Ograniczmy się do jej opisu fenomenologicznego. Przeważająca liczba istniejących propozycji odnosi się albo do opisu zachowania początkowego, traktowanego często jako sprężyste, albo do opisu stanu końcowego, bliskiego zniszczeniu, rozumianego jako stan idealnie plastyczny. Ograniczenie stosowalności modelu ciała sprężystego do bardzo małych deformacji i niezadowolające wyniki przy traktowaniu ośrodka jako sztywno-idealnie plastycznego stwarzają konieczność skonstruowania modelu odnoszącego się do całego procesu deformacji.

Cechą charakterystyczną materiałów rozdrobnionych, w odróżnieniu od klasycznych materiałów ciągłych, jest występowanie wyraźnych, zarówno dodatnich jak i ujemnych, zmian objętościowych pod działaniem naprężeń ścinających; zmiany objętościowe ustają jednakże przy znacznych deformacjach postaciowych. Łączy się to z zależnością postaci krzywych ścinania i zagęszczania od gęstości materiału i drogi obciążania. Ponadto dla materiału wstępnie zagęszczonego krzywe ścinania są niestateczne.

Fakty te znalazły ujęcie w osobnej grupie teorii opisujących cały proces deformacji, a przyjmujących gęstość materiału za podstawowy parametr fizyczny. Teorie te zastosowano głównie do opisu materiałów z kohezją [1, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14]. Z. Mróz [4 i 5] przedstawił koncepcję opisu procesu deformacji ośrodka rozdrobnionego opierając się na pojęciu wzmocnienia gęstościowego i uzyskując efektywne rozwiązania pewnych zagadnień brzegowych. W pracach tych dane doświadczalne zostały wykorzystane jedynie jako przesłanki do założeń teorii.

W niniejszym opracowaniu zajmiemy się analizą możliwości eksperymentalnej weryfikacji teorii, a następnie, opierając się na wynikach doświadczeń [2], określeniem funkcji materiałowych występujących w modelu matematycznym Mroza.

Opracowanie jest przeglądem zagadnień związanych z rozpatrywanym modelem, stąd też zdecydowano się na formę możliwie pełnego a zarazem systematycznego wykładu.

W p. 2 przedstawimy założenia, związki fizyczne i sens wprowadzonych w modelu pojęć, rozpatrując obszerniej przypadek osiowo-symetrycznego stanu naprężenia i uproszczony model ciała sztywno-plastycznego. Punkt ten zawiera też analizę zachowania się modelu w różnych procesach obciążania. W p. 3 zamieszczono dyskusję parametrów fizycznych i metody eksperymentalnego ich wyznaczenia. Omówienie wyników badań [2] i ich interpretację z punktu widzenia modelu przedstawiono w p. 4. Punkt 5 — to ilościowa dyskusja możliwości opisu wyników badań. Analizę uzyskanych rezultatów i wnioski zawiera p. 6.

2. MATEMATYCZNY MODEL MATERIAŁU O WZMOCNIENIU GĘSTOŚCIOWYM

2.1. Założenia i podstawowe związki

Matematyczne sformułowanie opisu materiału o wzmocnieniu gęstościowym, podstawy fizyczne i dyskusję różnych wariantów modelu podano w pracach [4 i 5]. Poniżej omówimy jedynie założenia i podstawowe związki opisujące ten model.

Założenia fizyczne sprowadzają się do następujących sześciu postulatów:

- 1) materiał jest ciągły, jednorodny i izotropowy;
- 2) materiał jest sprężysto-plastyczny lub w szczególnym przypadku sztywno-plastyczny, przy czym odnosi się to zarówno do zmian postaciowych jak i objętościowych; deformacje objętościowe mogą być dodatnie i ujemne, tzn. możliwe jest zagęszczanie i rozluźnienie materiału;
- 3) deformacje objętościowe i postaciowe są sprzężone, tzn. zmiana objętości może być wywołana zarówno przez działanie ciśnienia hydrostatycznego jak i naprężenia ścinającego;
- 4) przejście ze stanu sprężystego lub sztywnego do stanu plastycznego opisane jest warunkiem plastyczności, zależnym od trzech niezmienników stanu naprężenia i gęstości materiału; oznacza to, że deformacja objętościowa (zmiana gęstości) powoduje zmianę warunku plastyczności — wzmocnienie;
- 5) plastyczna deformacja określona jest potencjalnym prawem płynięcia nie-stowarzyszonym lub w szczególnym przypadku stowarzyszonym z warunkiem plastyczności;
- 6) istnieje zbiór stanów naprężenia, dla których nie zachodzą żadne zmiany objętościowe przy nieograniczonych zmianach postaciowych; stany te nazywamy krytycznymi.

W niniejszym opracowaniu ograniczymy się do modelu uproszczonego: do materiału sztywno-plastycznego, opisanego stowarzyszonym prawem płynięcia i niewytrzymałego na rozciąganie, tzn. idealnie sypkiego.

Matematyczne ujęcie założeń fizycznych modelu uproszczonego sprowadza się do następujących związków:

- 1) warunek plastyczności ma ogólną postać

$$(2.1) \quad f(\sigma_{ij}, \rho) = 0,$$

gdzie σ_{ij} jest tensorem naprężenia a ρ gęstością;

2) stowarzyszone prawo płynięcia przyjmujemy w postaci

$$(2.2) \quad d\epsilon_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}},$$

gdzie $d\epsilon_{ij}$ jest tensorem przyrostów (prędkości) odkształceń plastycznych, a λ dodatnio określonym współczynnikiem nie mającym charakteru stałej lub funkcji materiałowej i określonym za pomocą wzoru

$$(2.3) \quad \lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}}{\left(-\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) \rho \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kk}}},$$

gdzie σ_{kk} jest pierwszym niezmiennikiem tensora naprężenia. Równanie (2.2) oznacza, że w przestrzeni naprężeń wektor przyrostu odkształceń plastycznych $d\epsilon_{ij}$ jest ortogonalny do powierzchni plastyczności (geometrycznej reprezentacji warunku plastyczności).

Z dopuszczenia plastycznych zmian objętości pod działaniem ciśnienia hydrostatycznego, określonych składową $d\epsilon_{ii}$ ze związku (2.2), wynika, że powierzchnia plastyczności w przestrzeni naprężeń będzie powierzchnią zamkniętą. Przyjmijmy ponadto dla uproszczenia rozważań, że jest ona powierzchnią gładką i wypukłą. Warunek ten zapewnia jednoznaczność wektora $d\epsilon_{ij}$ w każdym punkcie powierzchni. Zależność warunku plastyczności od gęstości przyjmujemy jako jednoznaczną, tj. dla danej gęstości istnieje tylko jedna powierzchnia plastyczności, przy czym jest ona zawarta wewnątrz powierzchni odpowiadającej większej gęstości.

W następnych punktach pokażemy, że przyjęcie stowarzyszonego prawa płynięcia i zamkniętej powierzchni plastyczności prowadzi automatycznie do spełnienia założeń 2, 3 i 6.

2.2. Osiowo-symetryczny stan naprężenia

Weryfikacja doświadczalna opisu materiału o wzmocnieniu gęstościowym i wyznaczenie funkcji materiałowych dla dowolnego, złożonego stanu naprężenia i odkształcenia jest dotychczas niemożliwa ze względu na brak danych doświadczalnych. Z tego względu ograniczymy się do stanu osiowo-symetrycznego, kiedy spełnione są warunki

$$(2.4) \quad \sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3.$$

Stan ten jest powszechnie realizowany w tzw. badaniach trójosiowego ściskania próbek walcowych. Stanowi temu odpowiadają też badania opisane w pracy [2], które przyjmijmy jako podstawę do weryfikacji doświadczalnej teorii.

Osiowo-symetryczny stan naprężenia odpowiada w przestrzeni naprężeń głównych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ płaszczyźnie zawierającej oś σ_1 i dwusieczną kierunków σ_2 i σ_3 oś

$y = \sqrt{2} \sigma_2 = \sqrt{2} \sigma_3$. Stan naprężenia na tej płaszczyźnie wygodnie jest przedstawić przez następująco zdefiniowane niezmienniki:

$$(2.5) \quad p = \frac{1}{3} (\sigma_1 + 2\sigma_2),$$

oraz

$$(2.6) \quad q = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2).$$

Niezmiennik p jest równy naprężeniu średniemu σ_m (proporcjonalnemu do pierwszego niezmiennika tensora naprężenia), a q maksymalnemu naprężeniu ścinającemu (dla rozpatrywanego stanu — wprost proporcjonalnemu do drugiego niezmiennika dewiatora naprężenia). Przyjmujemy, że ścisaniu (zagęszczeniu ośrodka) odpowiada znak dodatni.

Z przyjęcia potencjalnego prawa płynięcia wynika, że deformacja ośrodka określona jest przez przyrosty (prędkości) odkształceń, a nie same odkształcenia. Dla jednorodnej deformacji walcowej próbki w osiowo-symetrycznym stanie naprężenia mamy

$$(2.7) \quad d\varepsilon_1 \neq d\varepsilon_2 = d\varepsilon_3$$

i stan ten można przedstawić przez następujące niezmienniki:
przyrost odkształceń objętościowych

$$(2.8) \quad d\varepsilon_p = d\varepsilon_1 + 2d\varepsilon_2,$$

co można napisać w postaci

$$(2.9) \quad d\varepsilon_p = -\frac{dv}{v}$$

lub wykorzystując prawo zachowania masy

$$(2.10) \quad d\varepsilon_p = \frac{dp}{\rho};$$

niezmiennik dewiatora przyrostów odkształceń

$$(2.11) \quad d\varepsilon_q = \frac{4}{3} (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2).$$

Wprowadzenie powyższych niezmienników pozwala rozdzielić zmiany objętościowe i postaciowe, przy czym moc plastyczna (przyrost pracy)

$$(2.12) \quad dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

jest iloczynem niezmienników

$$(2.13) \quad dW = p d\varepsilon_p + q d\varepsilon_q.$$

Wielkości p , q , $d\varepsilon_p$ i $d\varepsilon_q$ różnią się tylko stałymi od wielkości wprowadzonych przez innych autorów, np. [11, 13].

Warunek plastyczności (2.1) wyrazi się teraz w postaci

$$(2.14) \quad f(p, q, \rho) = 0,$$

a prawo płynięcia (2.2)

$$(2.15) \quad d\epsilon_{(p, q)} = \lambda \frac{\partial f}{\partial (p, q)}.$$

Jeśli podstawimy do (2.15) wynikające z (2.3) wyrażenie

$$(2.16) \quad \lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq}{\left(-\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) \rho \frac{\partial f}{\partial \rho}},$$

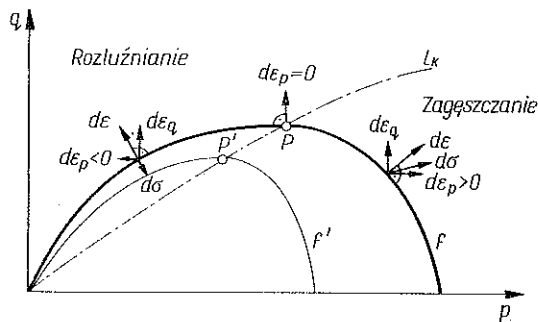
to składowe wektora przyrostu odkształceń określone będą związkami

$$(2.17) \quad d\epsilon_p = \frac{\frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq}{\left(-\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) \rho}$$

oraz

$$(2.18) \quad d\epsilon_q = \frac{\frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq}{\left(-\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) \rho} \frac{\partial f}{\partial q}.$$

Ze związku (2.17) wynika, że zmiany objętościowe zależne są także od przyrostu naprężeń ścinających dq . Całkowite odkształcenie objętościowe ϵ_p i postaciowe ϵ_q w procesie obciążania otrzymamy całkując przyrosty odkształceń $d\epsilon_p$ i $d\epsilon_q$. W ni-



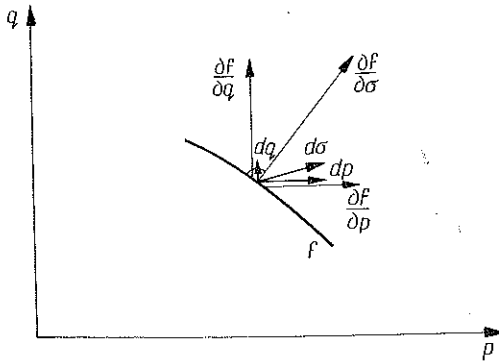
Rys. 1

niejszych rozważaniach zależność $p = p(\epsilon_p)$ będziemy nazywać krzywą zagęszczania, a $q = q(\epsilon_q)$ krzywą ścinania.

Geometryczna reprezentacja warunku plastyczności na płaszczyźnie p, q dla danej gęstości będzie krzywą zamkniętą f (rys. 1), przechodzącą przez początek

układu dla materiału bez wytrzymałości na rozciąganie. Z izotropii materiału składowe $d\varepsilon_p$ i $d\varepsilon_q$ wektora przyrostu odkształceń $d\varepsilon$, ortogonalnego i skierowanego na zewnątrz krzywej f , są współosiowe z kierunkami p i q . Z rys. 1 wynika, że dla stanów naprężenia, którym odpowiadają punkty położone na krzywej f w lewo od punktu P , składowe spełniają warunek $d\varepsilon_p < 0$, tzn. materiał rozluźnia się. Dla stanów po prawej stronie P mamy $d\varepsilon_p > 0$: zachodzi zagęszczanie. Stanowi określonemu punktem P odpowiada warunek $d\varepsilon_p = 0$. Punkt P reprezentuje zatem stan krytyczny.

W p. 2.1 założyliśmy, że danej gęstości ρ odpowiada położenie krzywej f wewnątrz krzywej f' o większej gęstości. Rozluźnienie materiału dla stanów, w których $d\varepsilon_p < 0$, spowoduje skurczenie się krzywej i odwrotnie dla $d\varepsilon_p > 0$ — rozszerzenie.



Rys. 2

Zmianie położenia krzywej f (warunku plastyczności) odpowiada zmiana stanu naprężenia, określona wektorem $d\sigma$. Zbadajmy, czy rozszerzenie i kurczenie się krzywej jest zgodne z prawem płynięcia dla odpowiednio zwróconych na zewnątrz i do wewnątrz krzywej f wektorów $d\sigma$. W tym celu zbadamy, czy współczynnik λ jest zawsze dodatni. Licznik wyrażenia (2.15) można interpretować jako iloczyn skalarny wektora gradientu $\partial f/\partial\sigma$ o składowych $\partial f/\partial p$ i $\partial f/\partial q$ oraz wektora przyrostu naprężenia $d\sigma$ o składowych dp i dq (rys. 2). Wektor gradientu jest ortogonalny do krzywej f i skierowany na zewnątrz. Znak licznika zależy zatem od zwrotu wektora $d\sigma$. Dla wektorów $d\sigma$ skierowanych na zewnątrz części krzywej, dla której $d\varepsilon_p > 0$, zarówno licznik jak i składowa $\partial f/\partial p$ są dodatnie. Wynika stąd, że dla spełnienia warunku $\lambda > 0$ musi zachodzić warunek

(2.19)
$$\frac{\partial f}{\partial p} < 0.$$

Warunek (2.19) wraz z $\lambda > 0$ będzie spełniony i dla tej części krzywej, gdzie $d\varepsilon_p < 0$, jeżeli wektor $d\sigma$ w tym obszarze będzie skierowany do wewnątrz. Jeżeli zachodzi (2.19), to w myśl (2.17) składowe $d\varepsilon_p$ mają zwroty zgodne z przedstawionymi na rys. 1. Wykazaliśmy zatem poprawność założenia o wzajemnym położeniu powierzchni (krzywej) w zależności od gęstości.

W efekcie kurczenia lub rozszerzania się powierzchni otrzymamy dla pewnych dróg obciążania «niestateczny», a dla innych «stateczny» kształt krzywej ścinania. Zagadnienie to rozpatrzmy bardziej szczegółowo w następnym punkcie.

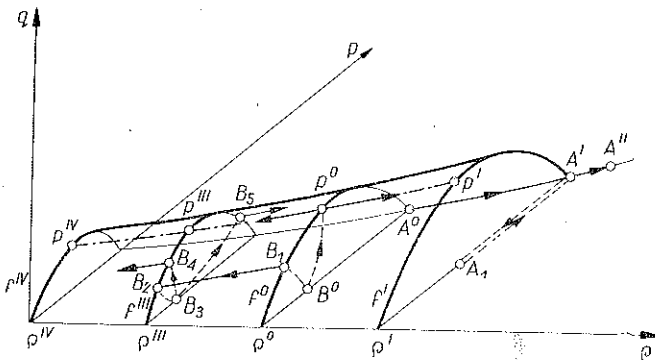
Kurczenie się powierzchni plastyczności należy rozumieć jako wynik kinematycznego wymuszania deformacji ciała. Otrzymanie w warunkach doświadczalnych krzywej niestatecznej jest praktycznie możliwe jedynie przy danej z góry prędkości

przemieszczeń. W programach statycznych po przekroczeniu maksymalnej wytrzymałości na ścinanie rozwija się szybki proces zniszczenia uniemożliwiający odpowiednie zmniejszanie obciążeń ⁽¹⁾.

W nowym położeniu krzywej f istnieje także pewien punkt P' , dla którego $de_p = 0$. Zbiór takich punktów wyznacza pewną krzywą l_k , zwaną linią krytyczną.

2.3. Zachowanie się modelu przy różnych drogach obciążenia

Zachowanie się ośrodka opisanego związkami (2.1) i (2.2) lub równoważnymi (2.14) i (2.15) w procesie deformacji zależne jest od postaci warunku plastyczności i jego zmian (zależnych od gęstości), wywołanych różnymi drogami obciążenia. Dla zanalizowania tego zagadnienia wygodnie jest przedstawić warunek plastyczności (2.14) w postaci pewnej, gładkiej i wypukłej powierzchni w przestrzeni $p q \rho$ (rys. 3). Interesować nas będą także rzuty powierzchni na płaszczyzny $p q \rho$ i $q \rho$ (rys. 4a, b, c), z których rzut $p q$ rozpatrywaliśmy już w p. 2.2.



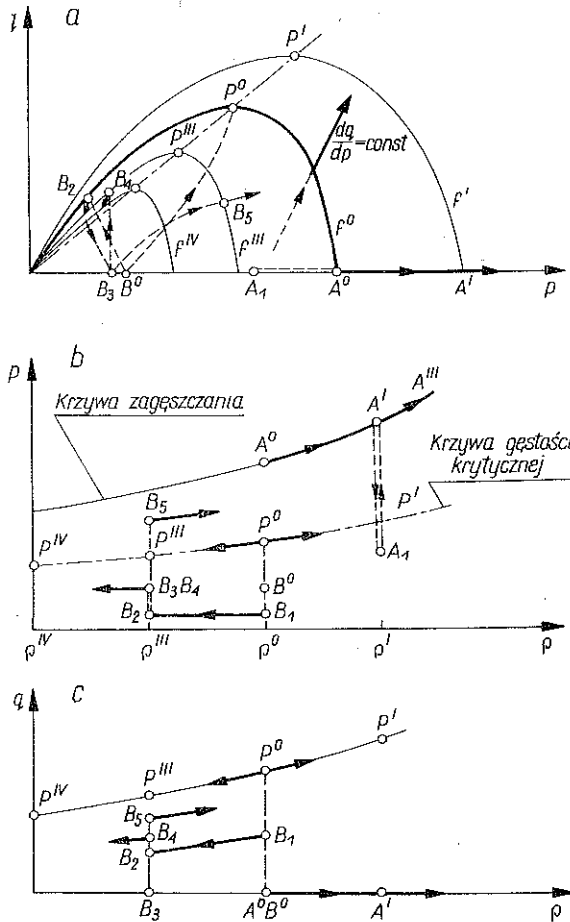
Rys. 3

Przedstawiona na rys. 3 powierzchnia plastyczności $p q \rho$ odpowiada pewnemu przedziałowi gęstości ρ . Załóżmy, że dany materiał ma w warunkach naturalnych lub w wyniku procesu formowania określonej objętości (np. próbki) gęstość początkową ρ^0 . Gęstości tej odpowiada na płaszczyźnie $p q$ przekrój f^0 . Linia na powierzchni, dla której $de_p = 0$, jest linią krytyczną; zaznaczono ją punktami P^0, P^I, P^{II} . Jej rzut na płaszczyznę p, ρ nazywać będziemy krzywą gęstości krytycznej. Przez drogę obciążania rozumiemy będziemy zbiór kolejnych stanów $p q$, jakim poddany jest element ośrodka w procesie deformacji, leżących wewnątrz lub na powierzchni plastyczności $p q \rho$. W myśl założenia o sztywno-plastycznych właściwościach materiału deformacje ośrodka mają zachodzić tylko dla stanów $p q$, leżących na powierzchni. Na rys. 3 i 4 drogi w obszarze sztywnym zaznaczono liniami przerywanymi.

Jako pierwszą rozpatrzmy drogę obciążenia, rozpoczynającą się od punktu A^0 na powierzchni, dla której zmianie ulega jedynie wielkość p przy $q=0$ i $dq=0$.

¹⁾ Mamy tu na myśli zmniejszanie obciążeń do wartości, przy których w dalszym ciągu występują plastyczne deformacje.

Zgodnie z rozważaniami w p. 2.2 punkt A^0 znajduje się w obszarze zagęszczania, tzn. plastyczne deformacje mogą pojawić się jedynie, gdy $dp > 0$. W konsekwencji możliwa droga obciążenia, wywołująca deformacje, łączy punkty A^0, A', A'', \dots ,

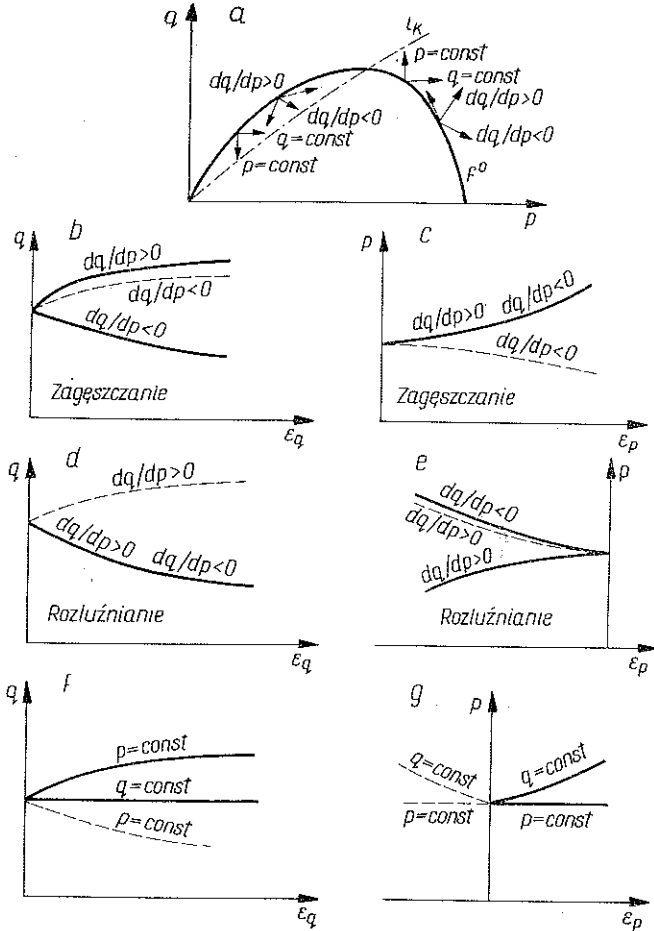


Rys. 4

dając na płaszczyźnie p ρ charakterystykę materiału pod działaniem ciśnienia hydrostatycznego. Wykonując po dojściu do punktu A' odciążanie, wkracamy w obszar sztywny, co na wykresie p ρ zaznaczy się odcinkiem pionowym $A' A_1$. Ponowne obciążenie wywoła zmianę gęstości dopiero po przekroczeniu punktu A' ; dalej proces odpowiada drodze nieprzerwanego obciążania $A^0 A' A''$.

Drugą szczególną drogą będzie droga odpowiadająca procesowi, rozpoczynająca się od dowolnego punktu wewnątrz powierzchni B^0 i osiągająca ją w punkcie P^0 . Z punktu P^0 możliwe jest poruszanie się tylko wzdłuż linii krytycznej — zarówno w stronę większych jak i mniejszych gęstości. W efekcie na płaszczyźnie p , ρ poruszamy się wzdłuż krzywej gęstości krytycznej.

Spośród możliwych innych dróg wyróżnimy drogi proste zdefiniowane stosunkiem $dq/dp = \text{const}$. Dróg takich istnieje nieskończenie wiele, a ich położenie na powierzchni p q p zależy od tego, czy rozpoczynają się w obszarze rozluźniania czy zagęszczania. Dla obszaru rozluźniania droga musi przebiegać po części powierzchni, gdzie $de_p < 0$ w kierunku malejących gęstości; odwrotnie jest dla zagęszczania. Jedną z takich dróg narysowano na rys. 4a. Podobnie, położenie dowolnych dróg na powierzchni określa stan wyjściowy. Jeżeli droga przecina linię krytyczną, to dalszy proces obciążenia możliwy jest jedynie wzdłuż tej linii.

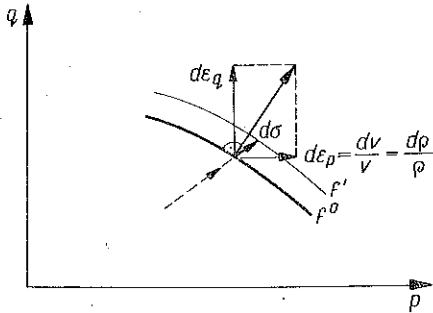


Rys. 5

Rozważmy jeszcze złożoną drogę obciążania, odpowiadającą procesowi obciążania przerwanego w pewnym punkcie na powierzchni, przy czym następuje «odciążenie w obszar sztywny» i ponowne obciążenie po innej drodze (droga B^0 , B_1 , B_2 , B_3 , B_4 lub B_5). Początkowe obciążenie odpowiada dojściu do pewnej gęstości ρ''' , która jest gęstością początkową dla ponownego obciążania. Ponowne obciążenie

zanie jest zatem możliwe zarówno w obszarze rozluźniania jak i zagęszczania przez odpowiednie przejście do wnętrza obszaru sztywnego ($B_3 B_4$ lub $B_3 B_5$). Dla każdej drogi obciążania otrzymamy inne wykresy na płaszczyznach $p q p p$ i $q p$.

Analiza modelu w przestrzeni $p q p$ pozwala zbadać dopuszczalne procesy obciążania i towarzyszące im zmiany gęstości. Z doświadczalnego punktu widzenia



Rys. 6

równie interesująca jest analiza postaci krzywych ścinania jak i zagęszczania w zależności od drogi obciążania. Dyskusję tego zagadnienia przeprowadzimy wykorzystując przekrój powierzchni płaszczyzną p, q (rys. 5a).

Wykres krzywych ścinania i zagęszczania można wyznaczyć znając wartości p i q dla danej drogi oraz wartości ϵ_p i ϵ_q , które otrzymamy przez scałkowanie funkcji (2.17) i (2.18). Dla złożonego kształtu powierzchni plastyczności i złożonych dróg obciążania całkowanie funkcji (2.17)

i (2.18) może stwarzać znaczne trudności. Wystarczającą dokładność daje metoda graficznego obliczania składowych $d\epsilon_p$ i $d\epsilon_q$ i sumowania ich po drodze obciążania. Przyrost $d\epsilon_p$ określa wzór (2.10). Wykreślając w punkcie przecięcia drogi obciążania z kolejnym przekrojem $p q$ powierzchni $p q p$ wektor ortogonalny do przekroju $p q$ i odkładając przyrost $d\epsilon_p$ otrzymujemy przyrost $d\epsilon_q$ (rys. 6). Krzywe zagęszczania można też uzyskać wykorzystując wynikający z (2.10) wzór

$$(2.20) \quad \epsilon_p = \ln \frac{\rho}{\rho^0}.$$

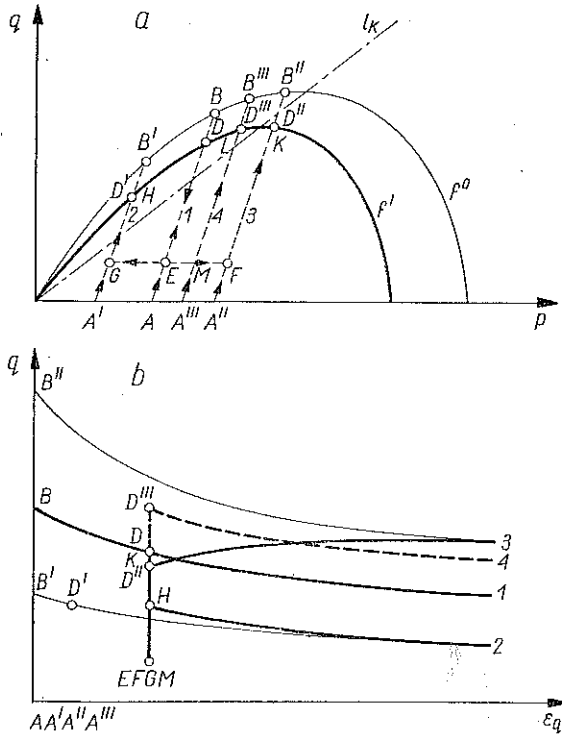
Dalej rozpatrzmy jedynie kształty krzywych $p=p(\epsilon_p)$ i $q=q(\epsilon_q)$.

Dla drogi obciążania, w której zmianie ulega tylko ciśnienie hydrostatyczne p , a $q=0$ i $dq=0$, jedyną charakterystyką materiału jest, jak wspomniano, zależność $p=p(\epsilon_p)$. Podobnie przy obciążaniu wzdłuż linii krytycznej jedyną jednoznaczną charakterystyką jest $p=p(\epsilon_p)$. Wykres $q=q(\epsilon_q)$ jest nieokreślony, gdyż wartości odkształceń postaciowych dla wszystkich punktów na linii krytycznej są równe nieskończoności.

Rozpatrzmy z kolei drogi proste, dla których zachodzić będą zmiany postaciowe i objętościowe, a postać krzywych zależęć będzie od położenia drogi i jej nachylenia względem osi p, q . Pamiętając, że dla stanów naprężenia na krzywej f^0 w obszarze zagęszczania deformacje możliwe są tylko dla przyrostów $d\sigma$ skierowanych na zewnątrz f^0 stwierdzimy, że dla dróg, dla których $dq/dp > 0$, krzywa ścinania i zagęszczania będą rosnące (stateczne), rys. 5b i c. Dla dróg o $dq/dp < 0$ krzywa zagęszczania będzie nadal rosnąca, zaś krzywa ścinania rosnąca lub malejąca (niestateczna). Dla dróg położonych w obszarze rozluźniania krzywe zagęszczania i ścinania będą rosnące lub malejące w zależności od znaku i wartości dq/dp , rys. 5d i e.

Jeżeli droga obciążania przecina w pewnym punkcie linię krytyczną, to krzywa $q = q(\varepsilon_q)$ ma poziomą asymptotę

Dla szczególnych dróg $p = \text{const}$ lub $q = \text{const}$ odpowiednie wykresy mają postać linii poziomych (rys. 5f i 5g). Wykres $q = q(\varepsilon_q)$ przypomina wykres materiału sztywno-idealnie plastycznego.



Rys. 7

Powyższe rozważania dotyczyły jedynie przypadku ciągłego obciążania. Zbadajmy z kolei postać krzywych ścinania, jeżeli proces obejmuje obciążanie, odciążanie i ponowne obciążanie — w ogólności po różnych drogach. Przypadek takiego programu przedstawiono na rys. 7a. Materiał, któremu odpowiada początkowa krzywa f^0 , poddany jest deformacji w obszarze rozluźniania po drodze AB , co powoduje skurczenie się krzywej do położenia f' (punkt D na drodze AB) i powstanie pewnych odkształceń ε_p i ε_q . W punkcie D zostaje zmniejszone obciążenie do wartości przedstawionej punktem E . Ponowne obciążenie zachodzi wzdłuż tej samej drogi AB , po drodze EGH oraz po EFK (EML). Odciążenie DE oraz dociążanie do punktów H i $K(L)$ zachodzi w obszarze sztywnym, odkształcenia nie ulegają zatem zmianie. Dla dociążania wzdłuż ED deformacje rozpoczynają się od wartości p i q , jakie osiągnięto w procesie pierwotnego obciążania. W efekcie krzywe $q = q(\varepsilon_q)$ i $p = p(\varepsilon_p)$ dla dociążania pokrywałyby się z krzywymi dla obciążania początkowego, gdyby prowadzono je poza punkt D (rys. 7b). Krzywe ścinania i zagęszczania dla dociążania EGH i EFK zaczynają się będą od wartości p i q określonych punktami H i K

oraz wartości ε_p i ε_q takich samych jak w punkcie D . Postać krzywych zależności będzie od położenia dróg obciążania względem punktu przecięcia krzywej f' z linią krytyczną (rys. 7b).

Bardziej interesujące od samej postaci krzywych dla dociążania jest ich położenie względem krzywych dla pokrywających się z nimi dróg prostego, ciągłego, obciążania. Te ostatnie zaznaczono na rys. 7a literami $A'B'$, $A''B''$ i $A'''B'''$. Przesunięcie pierwotnej krzywej f^0 do położenia f' przez wstępną drogę AB równoważne jest procesowi obciążania wzdłuż $A'B'$ i $A'''B'''$ ⁽²⁾ do punktów D' i D''' . W zależności od kształtu krzywych f^0 i f' każdemu z końcowych punktów odpowiadają jednakże różne wartości ε_q ; ε_p jest dla wszystkich dróg takie samo.

Krzywe $q=q(\varepsilon_q)$ dla dociążania rozpoczynające się od jednej wartości ε_q , określonej drogą ABD , nie będą zatem pokrywały się z krzywymi dla ciągłego obciążania wzdłuż $A'B'$ i $A'''B'''$. Będą one leżały powyżej lub poniżej tych ostatnich w zależności od tego, czy ε_q w punkcie D jest większe, czy mniejsze niż w punkcie $H, K(L)$. Efekty te przedstawia rys. 7b.

Powyższe rozważania wskazują, że postać krzywych ścinania i zagęszczania dla rozpatrywanego modelu zależy od całej drogi obciążania. Z jednoznacznej zależności pomiędzy gęstością a położeniem przekroju f , co równoważne jest przyporządkowaniu każdemu punktowi na płaszczyźnie p, q tylko jednej gęstości, wynika ponadto, że końcowa gęstość w procesie obciążania zależy jedynie od końcowego stanu naprężenia, a nie od drogi naprężenia, po jakiej stan ten został osiągnięty.

3. METODY WYZNACZANIA FUNKCJI MATERIAŁOWYCH MODELU

3.1. Metody badań w osiowo-symetrycznym stanie naprężenia

Badania własności mechanicznych materiałów rozdrobnionych w osiowo-symetrycznym stanie naprężenia są na ogół dość powszechne. Przyczyną tego jest z jednej strony łatwość wykonania doświadczeń, z drugiej (przez realizację różnych programów badań) możliwość uzyskania stosunkowo znacznej liczby informacji o badanym materiale. Badania te wykonuje się na walcowych próbkach utworzonych z materiału rozdrobnionego otoczonego cienką powłoczką gumową. Umieszczone w komorze ciśnieniowej aparatu trójosiowego ściskania próbki poddawane są wzdłuż osi walca naciskowi tłoka obciążającego oraz hydrostatycznemu ciśnieniu gazu (lub cieczy), działającemu na pobocznice.

W założeniach dotyczących strony geometrycznej próbek i warunków brzegowych przyjmuje się, że wywołane naprężenia odpowiadają w układzie współrzędnych walcowych naprężeniom głównym $\sigma_z = \sigma_1$ i $\sigma_r = \sigma_\phi = \sigma_2 = \sigma_3$, przy możliwości realizacji warunków

$$(3.1) \quad \sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 \quad \text{lub} \quad \sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3.$$

Naprężenia osiowe σ_1 oblicza się jako stosunek siły osiowej do przekroju próbki, naprężenia $\sigma_2 = \sigma_3$ odpowiadają ciśnieniu cieczy lub gazu. Osiove obciążenie próbki

⁽²⁾ Równoważność ta zachodzi jedynie w obszarze, w jakim przebiegała wstępna droga.

realizuje się przez wywołanie stałej prędkości przesuwu tłoka, co odpowiada kinematycznemu programowi, niezbędnemu do uzyskania niestatecznej charakterystyki materiału (por. p. 2.2). Możliwość niezależnego wywierania nacisku pionowego i bocznego⁽³⁾ pozwala wykonać badania przy dowolnej drodze obciążania w płaszczyźnie $\sigma_1, \sqrt{2} \sigma_2$. W większości badań prowadzi się jednak proces obciążania przy $\sigma_2 = \sigma_3 = \text{const}$.

Stan deformacji próbek określa się (przy założeniu walcowej, jednorodnej deformacji) z pomiaru przemieszczeń osiowych tłoka obciążającego i ilości wypartego z wnętrza próbki powietrza lub cieczy wypełniającej pory (wody). Stan ten określa się za pomocą odkształceń osiowych (przyjmując odkształcenie jako nieskończone małe) ze związku

$$(3.2) \quad \varepsilon_1 = \frac{\Delta h}{h_0}$$

oraz za pomocą odkształceń objętościowych

$$(3.3) \quad \varepsilon_v = -\frac{\Delta v}{v_0}$$

Odształcenia $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ wylicza się pośrednio ze wzoru

$$(3.4) \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_v - \varepsilon_1).$$

Najczęściej spotykanymi wykresami doświadczalnymi są następujące:

a) wykres $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_1)$,

gdzie σ_i jest intensywnością naprężeń postaciowych, określoną dla stanu osiowo-symetrycznego za pomocą wzoru

$$(3.5) \quad \sigma_i = |\sigma_1 - \sigma_2|;$$

b) wykres $\varepsilon_v = \varepsilon_v(\varepsilon_1)$.

W pewnych pracach zamiast odkształceń osiowych występuje intensywność odkształceń postaciowych

$$(3.6) \quad \varepsilon_i = \frac{2}{3} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|.$$

Wykres $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$ stanowi charakterystykę materiału na ścinanie.

Dla weryfikacji doświadczalnej modelu materiału o wzmocnieniu gęstościowym istnieje konieczność obliczenia zdefiniowanych w p. 2.2 wielkości p, q, de_p i de_q . Obliczenie p i q na podstawie wartości σ_1 i σ_2 określają proste związki (2.5) i (2.6). Podobnie wartości de_p i de_q można łatwo obliczyć, jeśli w doświadczeniach rejestrowane są zmiany objętości oraz przemieszczenia osiowe i boczne. Przyrosty odkształ-

⁽³⁾ Istnieją aparaty o nazwie komorowych, w których wzrost ciśnienia bocznego następuje w wyniku tendencji próbki do bocznego rozszerzania się pod działaniem obciążeń osiowych. Tego typu aparaty nie nadają się do realizacji danych z góry dróg obciążania.

ceń bocznych mogą być też obliczane pośrednio ze zmian objętości i przemieszczeń osiowych, jeżeli posługujemy się dostatecznie małymi przyrostami tych wielkości:

$$(3.7) \quad d\epsilon_2 = \frac{1}{2}(d\epsilon_p - d\epsilon_1);$$

skąd otrzymujemy

$$(3.8) \quad d\epsilon_a = 2d\epsilon_1 - \frac{2}{3}d\epsilon_p.$$

W przypadku korzystania z wyników doświadczeń podanych jako zależności $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i)$ i $\epsilon_v = \epsilon_v(\epsilon_1)$ obliczenie p i q wymaga dodatkowej znajomości σ_1 lub σ_2 w procesie. W większości prac informacje te są podane. Przyrosty $d\epsilon_p$ można obliczyć z wykresów $\epsilon_v = \epsilon_v(\epsilon_1)$ przez wyznaczenie stosunku $\Delta v/v$ z dwóch bliskich wartości ϵ'_v i ϵ''_v za pomocą formuły

$$(3.9) \quad d\epsilon_p = \frac{\epsilon''_v - \epsilon'_v}{1 + \epsilon'_v}.$$

Całkowite odkształcenia uzyskamy przez zsumowanie przyrostów albo też bezpośrednio z wartości ϵ_v , całkując funkcję (2.9), co daje

$$(3.10) \quad \epsilon_p = -\ln \frac{v}{v_0},$$

skąd po przekształceniach znajdziemy

$$(3.11) \quad \epsilon_p = \ln(1 + \epsilon_v).$$

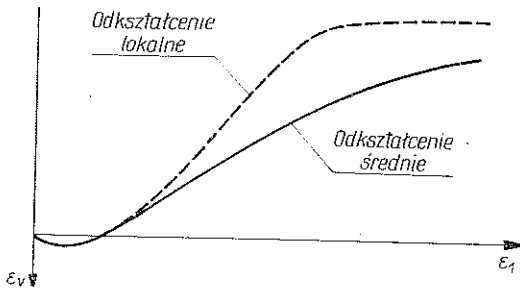
Podobnie można określić wartości $d\epsilon_a$ z dwóch sąsiednich w wartości $\epsilon'_1, \epsilon''_1$ oraz z odpowiadających im ϵ'_v i ϵ''_v ze wzoru

$$(3.12) \quad d\epsilon_a = 2 \left[\frac{\epsilon''_1 - \epsilon'_1}{1 + \epsilon'_1} - \frac{1}{3} \left(\frac{\epsilon''_v - \epsilon'_v}{1 + \epsilon'_v} \right) \right].$$

Obliczenie $d\epsilon_a$ jest jednak niemożliwe, jeżeli wykresy podane są nie jako funkcje ϵ_1 ale ϵ_i i brak jest danych o wartościach ϵ_1 lub ϵ_2 . Przejście do wykresów $p = p(\epsilon_p)$ i $q = q(\epsilon_q)$ jest konieczne przy analizie ilościowej modelu; jakościowo są one podobne do wykresów $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i)$ lub $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i)$ oraz do $\sigma_m = \sigma_m(\epsilon_v)$.

Powyższe rozważania opierały się na przyjęciu jednorodnej, walcowej deformacji próbek. W przypadku istnienia tarcia na podstawach próbek, co ma miejsce w szeregu doświadczeń, deformacja jest niejednorodna i próbka przybiera kształt beczkowaty. Obliczane z podanych powyżej wzorów wartości naprężeń i odkształceń obarczone są wtedy błędami. Efekt niejednorodnej deformacji widoczny jest często na wykresach $\epsilon_v = \epsilon_v(\epsilon_1)$, z których jeden przedstawiono na rys. 8. Pomimo znacznych deformacji postaciowych odkształcenia objętościowe stale wzrastają, co wskazywałoby na nieosiągnięcie stanu krytycznego. Przeczą temu badania bezpośredniego ścinania i wyniki pracy [12], w której wykazano, że w części centralnej próbek wal-

cowych zmiany objętościowe ustalają się dla niewielkich wartości odkształceń postaciowych. W trakcie deformacji odkształceniom ulegają sąsiednie, zbliżające się obszary do końców próbek. W rezultacie określając zmiany objętości przez pomiar



Rys. 8

ilości wypartego powietrza lub wody z całej próbki obserwujemy stały wzrost objętości; obliczone ε_v odpowiada odkształceniom średnim. Rzeczywisty wykres $\varepsilon_v = \varepsilon_v(\varepsilon_i)$ położony będzie powyżej wykresu wartości średnich (rys. 8).

3.2. Funkcje materiałowe modelu

Uproszczony model materiału o wzmocnieniu gęstościowym opisany jest całkowicie przez wzory (2.14) i (2.15). Zakładamy przy tym, że prawo fizyczne (2.15) jest poprawne dla dowolnego warunku plastyczności. Jeżeli zatem dla danego materiału znany będzie warunek plastyczności dla dowolnej gęstości (innymi słowy, znana będzie powierzchnia plastyczności w przestrzeni p, q, ρ), to wzór (2.16) pozwala przewidzieć zachowanie się materiału w dowolnym procesie deformacji.

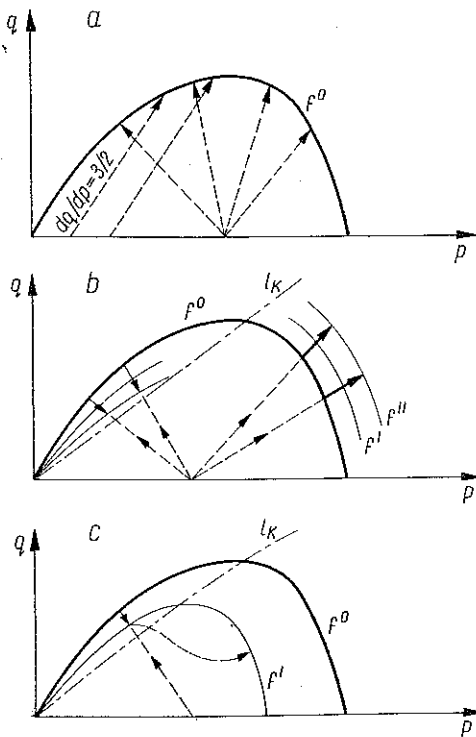
Rolę funkcji materiałowych modelu pełnią zależności określające kształt powierzchni lub, co jest równoznaczne, kształt przekrojów p, q w zależności od gęstości. Liczba tych funkcji zależy od liczby parametrów, opisujących kształt przekroju powierzchni dla dowolnej gęstości. Dla najprostszych przykładów przekrojów (np. kołowych) jedyną funkcją materiałową jest zależność promienia koła od gęstości. Dla rodziny elips występują dwie funkcje określające zmianę ich półosi. Odnosi się to jednakże tylko do ośrodka idealnie sypkiego, kiedy każdy z przekrojów p i q przecina oś ρ .

3.3. Metody wyznaczania funkcji materiałowych

Analityczne określenie funkcji materiałowych jest możliwe, jeżeli znany jest kształt powierzchni plastyczności w przestrzeni p, q, ρ lub jego przekroje płaszczyzną p, q . Metody doświadczalne polegać będą zatem na przeprowadzeniu doświadczeń, z których można wyznaczyć powierzchnię. Dla wygody rozważania prowadzić będziemy na płaszczyźnie p, q .

Jako pierwsze rozpatrzmy zagadnienie wyznaczania kształtu przekroju początkowego f^0 . Kształt krzywej f^0 pozwalają znaleźć dowolne doświadczenia, w których drogi obciążenia przebiegać będą, począwszy od pewnego stanu sztywnego,

na płaszczyźnie p, q w różnych kierunkach (rys. 9a). Najłatwiejsze do zrealizowania w aparaturze trójosiowego ściskania są drogi, w których zmianie ulega jedynie σ_1 , a $\sigma_2 = \sigma_3 = \text{const}$. Na płaszczyźnie p, q odpowiada to drogom prostym, rozpoczynającym się od $p = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ o nachyleniu $dq/dp = 3/2$ (rys. 9a). Wykonując szereg doświadczeń w obszarze zagęszczania i rozluźniania i rejestrując zmiany postaciowe i objętościowe, położenie f^0 wyznaczmy przez pary wartości p^0 i q^0 , przy których rozpoczną się deformacje. Dla obszaru rozluźniania krzywe ścinania i zagęszczania powinny mieć kształt przedstawiony na rys. 5d i 5e, a dla zagęszczania — na rys. 5b i 5c. Z istniejących danych doświadczalnych wynika, że nachylenie dróg $dq/dp = 3/2$ jest wystarczające, aby przeciąć oba obszary zagęszczania i rozluźniania (teoretycznie dla małych dq/dp drogi obciążania mogłyby zawsze przecinać obszar



Rys. 9

wyznaczają część nowego przekroju f' w obszarze rozluźniania (rys. 9b). Prowadząc proces deformacji aż do ustalenia się zmian objętościowych, otrzymujemy informacje o położeniu linii krytycznej oraz o kształcie krzywej gęstości krytycznej. Analogiczne doświadczenia w obszarze zagęszczania dostarczają danych o położeniach kolejnych przekrojów dla większych gęstości. Zauważmy jednak, że proste drogi obciążania dają informacje o całym przekroju początkowym i tylko o częściach następnych — albo w obszarze rozluźniania, albo zagęszczania (rys. 9 b).

Dla pełnego wyznaczenia kolejnych przekrojów niezbędne są drogi obciążania

zagęszczania). Niemożliwe jest jednakże ustalenie z góry, zwłaszcza dla materiałów silnie zagęszczonych, w jakim przedziale początkowych ciśnień p muszą być przeprowadzone doświadczenia, aby objęły cały obszar zagęszczania. Jak wskazują dotychczasowe doświadczenia na materiałach zagęszczonych, w których uzyskiwano jedynie krzywe niestateczne, wymagane ciśnienia mogą być bardzo znaczne. Proste drogi obciążania pozwalają także na częściowe wyznaczenie kolejnych przekrojów f', f'', \dots , dla różnych gęstości ρ . Dla dróg w obszarze rozluźniania otrzymujemy informacje o położeniu przekroju dla mniejszych gęstości. Korzystając z wykresu $p = p(\varepsilon_p)$ i funkcji $\rho = \rho^0 \exp \varepsilon_p$ lub bezpośrednio z pomiaru — wyznaczamy gęstość przyporządkowaną parze kolejnych wartości p' i q' . Pary wartości p' i q' dla tej samej gęstości, ale dla różnych dróg,

z odciążeniem i dociążaniem. Pragnąc określić położenie kolejnych przekrojów powierzchni w obszarze zagęszczania, ale dla mniejszych gęstości niż ρ^0 , trzeba wprawdzie wykonać badania w obszarze rozluźniania, prowadząc proces do pewnego położenia f' i stosując odciążanie, a następnie po zwiększeniu ciśnienia p — ponowne dociążenie już w obszarze zagęszczania (rys. 9c). Odwrotną procedurę stosujemy dla wyznaczenia przekroju powierzchni w obszarze rozluźniania dla gęstości większych od ρ^0 . Badania z odciążaniem mogą stanowić także kontrolę poprawności wyznaczenia kolejnych przekrojów z dróg prostych. W tym celu zmiany ciśnienia p po odciążeniu powinny być niewielkie w stosunku do pierwotnej drogi obciążania.

Powyższe rozważania opierały się na podstawowych założeniach o modelu: położenie przekroju powierzchni $p q \rho$ dla danej gęstości jest niezależne od drogi obciążania, po jakiej ten przekrój jest osiągnięty. Weryfikację tego założenia uzyskamy realizując inne drogi bardziej złożone od $dq/dp=3/2$.

Przy wyznaczaniu kolejnych krzywych f, f', \dots na płaszczyźnie $p q$ korzystamy jedynie z pomiarów wielkości p i q oraz pomiaru gęstości. Postać krzywej ścinania i zagęszczania daje tylko informacje jakościowe, czy znajdujemy się w obszarze zagęszczania czy rozluźniania. Znając kształt kolejnych przekrojów i odpowiadające im gęstości można poszukiwać analitycznych wyrażeń na funkcje materiałowe. Jest to niezbędne przy wykorzystaniu wyników do rozwiązania zagadnień brzegowych. Dla analizy zachowania się materiału przy innych niż w doświadczeniach drogach obciążania wystarczające są wykresy funkcji materiałowych, z których poszukiwane funkcje $q=q(\varepsilon_q)$ i $p=p(\varepsilon_q)$ można skonstruować metodą graficzną (por. p. 2.3).

3.4. Sprawdzenie stosowalności stowarzyszonego prawa płynięcia

Pełna weryfikacja doświadczalna modelu teoretycznego wymaga, oprócz wyznaczenia funkcji materiałowych, sprawdzenia poprawności stowarzyszonego prawa płynięcia przyjętego w dotychczasowych rozważaniach. Stowarzyszone prawo płynięcia (2.15) oznacza, że warunek plastyczności f jest potencjałem dla przyrostów odkształceń plastycznych. Z własności potencjału wynika, że przyrost odkształceń, rozumiany jako wektor w przestrzeni naprężeń, jest ortogonalny do powierzchni plastyczności zdefiniowanej przez odpowiedni warunek. Sprawdzenie tego prawa polega zatem na określeniu nachylenia wektora $d\varepsilon$ do przekroju powierzchni $p q \rho$ płaszczyzną $p q$.

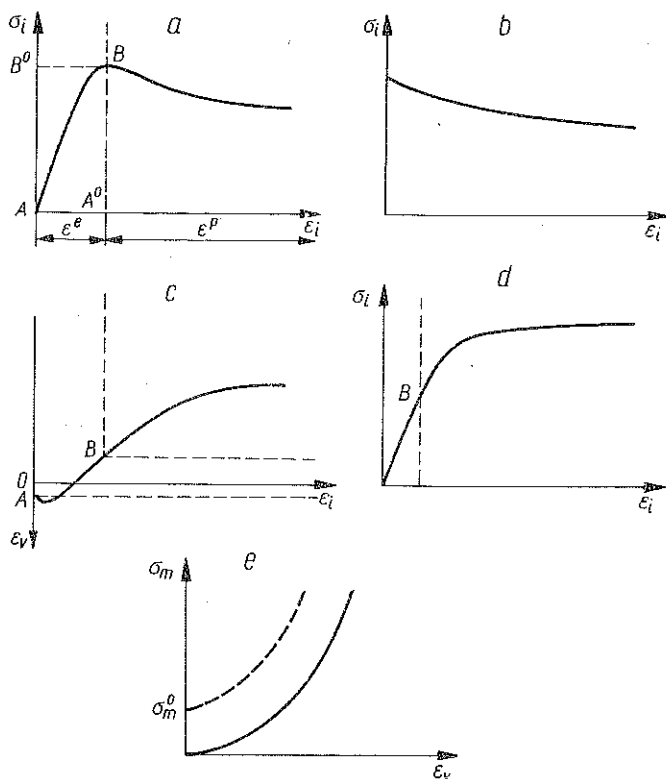
Kierunek wektora $d\varepsilon$ w danym punkcie krzywej f określają składowe $d\varepsilon_p$ i $d\varepsilon_q$ towarzyszące przesunięciu powierzchni z położenia f do f' na skutek działania wektora $d\sigma$. Wartości składowych $d\varepsilon$ otrzymujemy z pomiarów dla danej drogi obciążania. Realizując tę drogę otrzymujemy równocześnie informacje o punktach jej przecięcia z kolejnymi przekrojami powierzchni plastyczności (jest to zbiór p, q przyporządkowanych danym gęstościom ρ) i o wartościach $d\varepsilon_p$ i $d\varepsilon_q$. Znając kształt kolejnych przekrojów f można dla punktu na drodze obciążania wykreślić statyczną do f , wektor $d\varepsilon$ i zmierzyć ich wzajemne nachylenie.

Dla ścisłego wyznaczenia nachylenia wektora d musi być znany dokładny kształt krzywej f , wektor $d\varepsilon$ powinien odpowiadać bardzo małym przyrostom

$d\sigma$, a sam wektor $d\epsilon$ reprezentować jedynie odkształcenie plastyczne. Warunki pierwszy i trzeci wymagają znacznej liczby badań i właściwej interpretacji wyników (por. p. 3.5).

3.5. Interpretacja badań dla modelu ciała sztywno-plastycznego

Ograniczenie się w rozważaniach do modelu ciała sztywno-plastycznego powoduje konieczność odpowiedniej interpretacji wyników doświadczeń. Rozpatrzmy przedstawioną schematycznie na rys. 10a doświadczalną krzywą $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i)$ uzyskiwaną dla materiału zagęszczanego w przypadku prostej drogi obciążania o $dq/dp = = 3/2$. Kształt ten niewiele się zmieni, jeżeli przejdziemy do współrzędnych q i ϵ_q . Krzywa nie odpowiada swym charakterem modelowi ciała sztywno-plastycznego, dla którego powinna mieć postać przedstawioną na rys. 10b. Początkowa, wznoszą-



Rys. 10

ca się część krzywej do wartości $\sigma_{i \max}$ (punkt B) odpowiada sprzężonym sprężysto-plastycznym własnościom ośrodka — z przewagą tych pierwszych. Spośród różnych aproksymacji doświadczalnego wykresu o postaci z rys. 10b można przyjąć do rozważań dwie następujące:

1. Załóżmy, że całkowite odkształcenia ośrodka składają się z części plastycznej ϵ^p i części sprężystej ϵ^e równej odkształceniom ośrodka przed osiągnięciem maksy-

malnych wartości naprężeń ścinających. Odształcenia sprężyste można pominąć, co odpowiada przesunięciu początku układu o wartości ε^e .

2. Załóżmy, że odształcenia ośrodka są tylko plastyczne, a naprężenia w początkowym obszarze ε^e stałe i równe $\sigma_{i \max}$.

Podobnej aproksymacji wymagają wykresy $\sigma_m = \sigma_m(\varepsilon_v)$ lub $\varepsilon_v = \varepsilon_v(\varepsilon_i)$, z których jeden dla tego samego materiału i tej samej drogi przedstawia rys. 10c. Odcinek początkowy OA odpowiada wzrostowi jedynie ciśnienia hydrostatycznego. Zgodnie z pierwszą aproksymacją oś ε_v będzie przechodzić przez punkt B , dla drugiej możemy przyjąć, że oś ε_v przechodzi przez punkt A .

Bardziej dyskusyjne będą aproksymacje wykresów doświadczalnych dla materiałów luźnych, dających w doświadczeniach tego samego typu krzywe przedstawione na rys. 10d. Trudno jest tu oddzielić odształcenia sprężyste i plastyczne. Jako jedną z propozycji można przyjąć, że początkowy przekrój f^0 powierzchni plastyczności osiągnięty jest w punkcie B , gdzie następuje wyraźna zmiana pochodnej; do tego punktu należy przesunąć osie σ_i i ε_v .

Rozpatrzmy jeszcze kształt wykresów doświadczalnych $\sigma_m = \sigma_m(\varepsilon_v)$ dla materiału zagęszczanego w badaniach, w których zmiana ulega jedynie σ_m a $\sigma_i = 0$, tzn. kiedy zmienia się jedynie ciśnienie hydrostatyczne. Doświadczalne wykresy mają postać przedstawioną na rys. 10c linią ciągłą, jednakże dla rozpatrywanego modelu powinny rozpoczynać się od pewnej wartości σ_m^0 , odpowiadającej położeniu f^0 . Należy jednak zaznaczyć, że w dotychczasowych badaniach realizowane ciśnienia były niewielkie, co pozwala przyjąć, że w badaniach tych nie osiągnięto przekroju powierzchni f^0 i otrzymany wykres odpowiada jedynie zmianom sprężystym.

4. BADANIA DOŚWIADCZALNE

4.1. Ogólna charakterystyka badań

Model matematyczny materiału o wzmocnieniu gęstościowym powstał na podstawie wyników wielu prac doświadczalnych, których celem było poznanie własności mechanicznych materiałów rozdrobnionych. Dostarczyły one jakościowych informacji w postaci krzywych ścinania i zagęszczania w zależności od gęstości początkowej. Prace te nie były jednakże prowadzone pod kątem weryfikacji stworzonej ostatnio teorii wzmocnienia gęstościowego. Programy obejmowały zazwyczaj jedynie proste drogi obciążania w procesie zagęszczania lub rozluźniania. Brak jest danych o wartościach przyrostów odształceń. Odnosi się to szczególnie do materiałów idealnie sypkich.

Podobnie, doświadczenia [2] nie odpowiadają w pełni programom i rejestracji wielkości niezbędnych do pełnej weryfikacji teorii; mogą jednakże stanowić punkt wyjścia do weryfikacji, a to ze względu na stosunkowo złożone drogi obciążania i możliwość wykorzystania istniejących, a nieopublikowanych danych dodatkowych.

Badania doświadczalne [2] wykonano na jednym rodzaju piasku średnio-ziarnistego i na próbkach walcowych przy osiowo-symetrycznym stanie naprężenia oraz przy kinematycznym obciążaniu. Programy były następujące:

1) obciążanie po drogach prostych przy $dq/dp = 3/2$ dla czterech wartości początkowego ciśnienia hydrostatycznego,

- 2) obciążanie po drogach złożonych, ale bez odciażania,
- 3) obciążanie, odciażanie i ponowne obciążanie po różnych drogach prostych.

Wyniki przedstawiono w postaci wykresów: a) drogi obciążania na płaszczyźnie $\sigma_1, \sqrt{2} \sigma_2$; b) funkcji $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$; c) funkcji $\varepsilon_v = \varepsilon_v(\varepsilon_i)$.

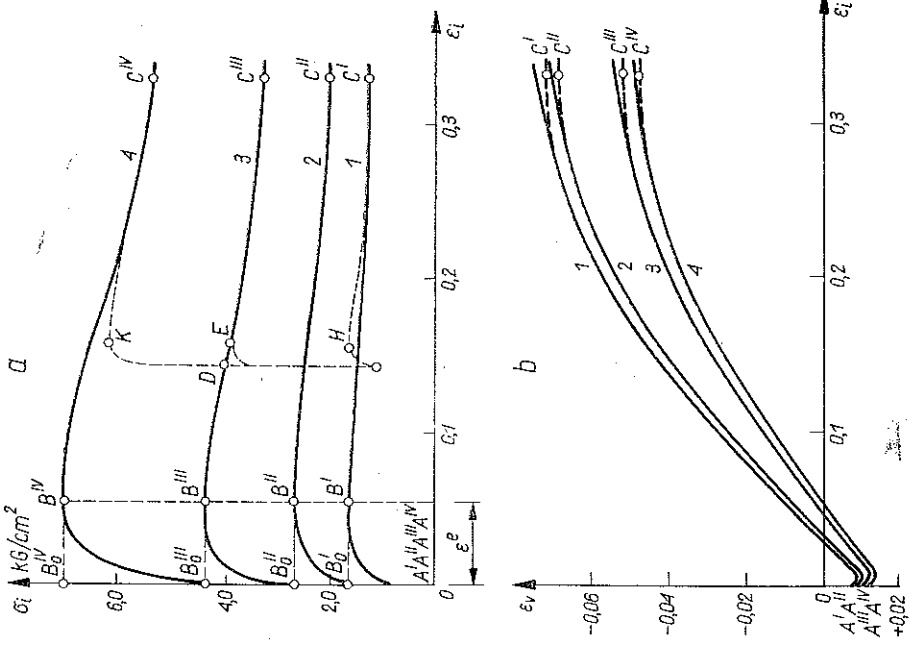
Niektóre z wyników przedstawiono na rys. 11 i 12. Na rysunkach tych zmieniono oznaczenia charakterystycznych punktów $A, A^I, \dots, B, B^I, \dots$ z pracy [2] na $A^I, A^{II}, \dots, B^I, B^{II}, \dots$. Naprężenia obliczano w stosunku do chwilowego przekroju próbki, a odkształcenia ze związków (3.2), (3.3), (3.4) i (3.6). Niezbędne do ilościowej analizy wartości p i q obliczono ze wzorów (2.5) i (2.6), ε_p ze związku (3.11), a ε_q sumując przyrosty $d\varepsilon_q$ wyrażone wzorem (2.11), korzystając z nieopublikowanych w [2] wartości $d\varepsilon_1$ i $d\varepsilon_2$.

4.2. Analiza badań z punktu widzenia ośrodka o wzmocnieniu gęstościowym

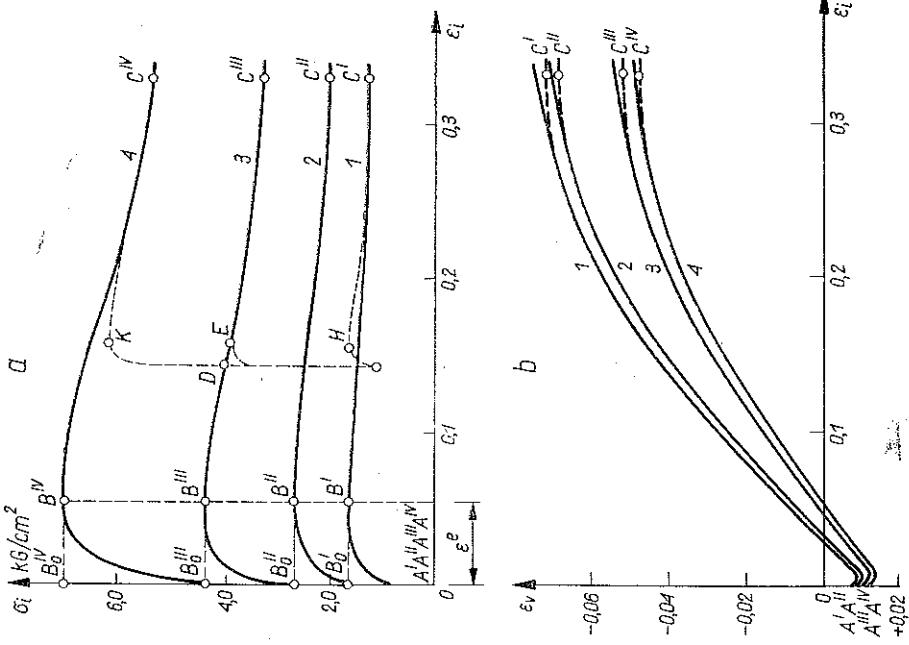
Analizę wyników badań rozpoczniemy od serii doświadczeń obejmujących proste drogi obciążenia. We współrzędnych p, q drogi te wykreślono na rys. 13.

Ogólny kształt funkcji $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$ (rys. 12a) wskazuje, że dla obu aproksymacji wyników (por. p. 3.5) są one niestateczne. Odpowiadają zatem deformacji materiału w obszarze rozluźniania. Maksymalne wartości naprężeń (punkt $B^I, B^{II}, B^{III}, B^{IV}$) wyznaczają na płaszczyźnie p, q (rys. 13) prostą o nachyleniu $\alpha_0 = 37^\circ 30'$. Prostą tę interpretujemy jako część początkowego przekroju powierzchni plastyczności f^0 . Z wykresów $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$ wynika ponadto, że naprężenia dążą do wartości asymptotycznych, które oznaczono punktami $C^I, C^{II}, C^{III}, C^{IV}$. Punkty te można na płaszczyźnie p, q aproksymować prostą o nachyleniu $\beta = 34^\circ$, będącą linią krytyczną.

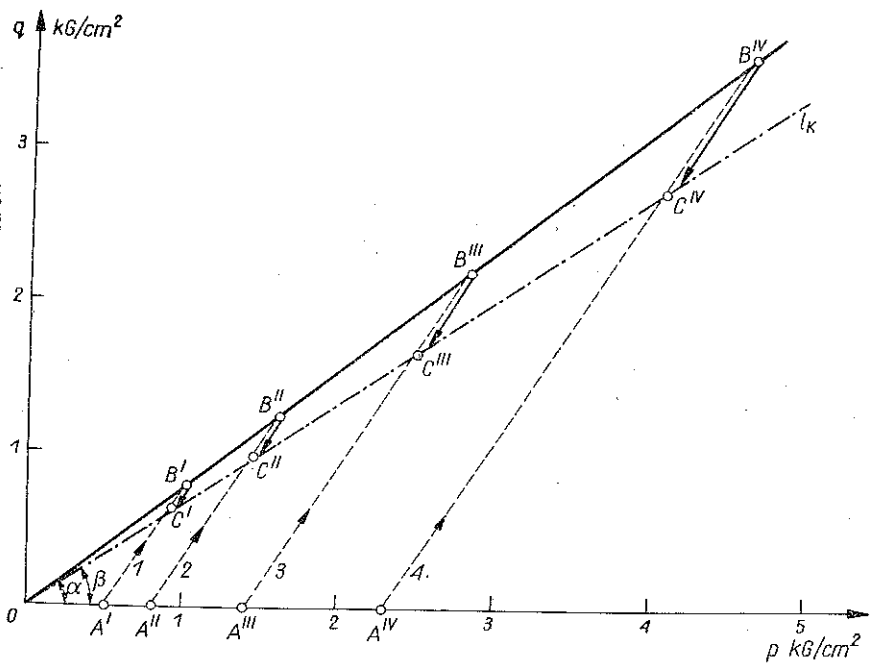
Rozpatrzmy z kolei funkcje $\varepsilon_v = \varepsilon_v(\varepsilon_i)$ odpowiadające drogom prostym (rys. 12b). Uzyskane krzywe w całym przedziale odkształceń postaciowych są monotonicznie rosnące. Oznaczałoby to, że pomimo znacznych odkształceń postaciowych nie został w doświadczeniach osiągnięty stan krytyczny. Należy jednakże wspomnieć, że odkształcenie objętościowe obliczano ze wzoru (3.3), gdzie $d\varepsilon$ określano przez pomiar ilości wypartego z całej próbki powietrza. Jak zaznaczono w p. 3.1 prowadzić to może do błędów w wartościach ε_v . Pomimo zastosowania specjalnych zamocowań próbek zmniejszających tarcie uzyskane wykresy wskazują na pewien jego udział. Stąd też dokonano korekty wykresów przez zagięcie końcowej części do poziomej asymptoty (linia przerywana na rys. 12b i punkty $C^I, C^{II}, C^{III}, C^{IV}$). Korekta ta jest jednak przybliżona i rzeczywisty kształt $\varepsilon_v = \varepsilon_v(\varepsilon_i)$ jest nieznan. Z tego względu nie obliczano gęstości dla kolejnych wartości p i q w rozpatrywanym procesie, co pozwoliłoby wykreślić położenie kolejnych krzywych f' i f'' , ... Nie pozwoliło to także na sprawdzenie poprawności stowarzyszonego prawa płynięcia. Przyjęto za to, że końcowe wartości ε są obarczone małym błędem, co pozwoliło obliczyć gęstość na linii krytycznej i skonstruować krzywą gęstości krytycznej (rys. 14). Położenie punktów obliczono przyjmując drugą aproksymację wyników. Znajomość punktów jedynie dla obszaru rozluźniania uniemożliwia dokładne wyznaczenie punktu przecięcia wykresu z odciętą ρ^0 , wyznaczającego wartość p



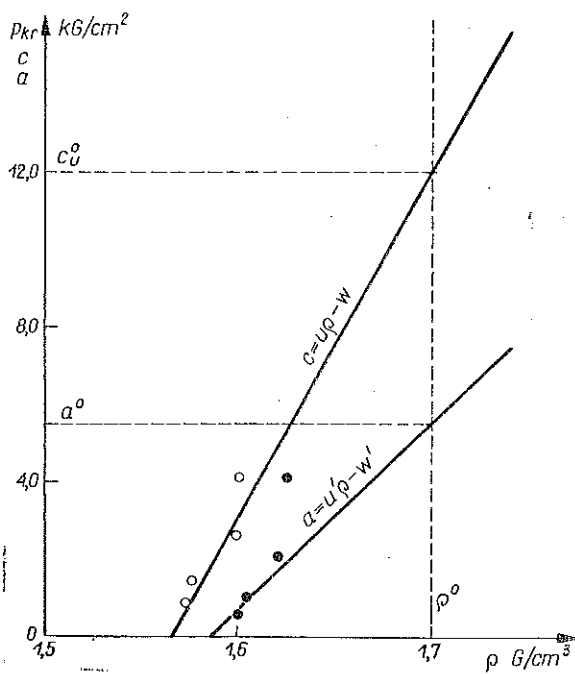
Rys. 11



Rys. 12



Rys. 13



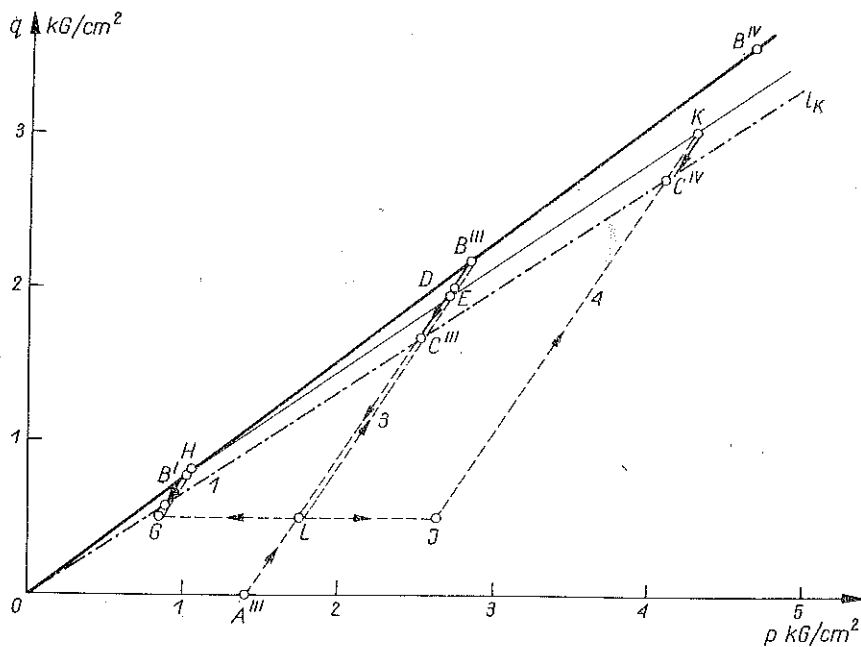
Rys. 14

punktu przecięcia linii krytycznej z początkowym przekrojem powierzchni plastyczności f^0 . Założono, że zależność ta jest liniowa:

$$(4.1) \quad P_{kr} = u\rho - w.$$

Doświadczenia drugiej serii pokazały, że dla wstępnych złożonych dróg obciążania, w których jednakże stan naprężenia nie osiąga nigdzie na płaszczyźnie p, q maksymalnych wartości wyznaczonych przez linię $B^I, B^{II}, B^{III}, B^{IV}$ — położenie tej linii nie ulega zmianie. Oznacza to, że realizowane wstępne drogi mogą odpowiadać obszarowi sztywnemu, co potwierdza «niewrażliwość» warunku plastyczności na drogę obciążania.

Wyniki trzeciej serii doświadczeń odpowiadają całkowicie zachowaniu się modelu teoretycznego, przedstawionego dla złożonych dróg na rys. 7. Zaobserwowano analogiczne efekty dla położenia krzywych $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$ powyżej lub poniżej krzywych dla obciążenia ciągłego. Końcowe wartości naprężeń, a więc położenie linii krytycznej, pokrywają się z wartościami uzyskanymi w pierwszej serii. Doświadczenia te pozwoliły ponadto wyznaczyć położenie jednego z kolejnych przekrojów f' . Na rys. 15 położenie f' zaznaczono punktami H, E i K , układającymi się w przybliżeniu wzdłuż prostej o mniejszym nachyleniu niż α_0 .



Rys. 15

Powyższe wnioski otrzymano z analizy krzywych $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$. Pozostają one poprawne dla krzywych $q = q(\varepsilon_q)$. Reasumując można stwierdzić, że aczkolwiek badania obejmowały jedynie pewne drogi obciążania w obszarze rozluźniania, to jednak jakościowe zachowanie się badanego materiału odpowiada w pełni modelowi materiału o wzmocnieniu gęstościowym.

5. ILOŚCIOWY OPIS BADAŃ DOŚWIADCZALNYCH

5.1. Uwagi ogólne

Rozważania przedstawione w p. 4.2 wskazują, że obliczenia funkcji materiałowych modelu uproszczonego z wyników badań [2] mogą zawierać znaczne błędy. Odnosi się to także do sprawdzenia poprawności stowarzyszonego prawa płynięcia. Ponadto badania nie dostarczyły żadnych informacji o zachowaniu się materiału w obszarze zagęszczania. Z tych też względów zrezygnujemy z próby dokładnego wyznaczenia funkcji materiałowych, przeprowadzając w zamian próbę opisu badanego ośrodka przy wprowadzeniu z góry pewnych założeń o postaci warunku plastyczności dla różnych gęstości; przyjmiemy także stosowność stowarzyszonego prawa płynięcia. Poszukiwać będziemy prostych postaci krzywych f , dających możliwie dobrą aproksymację doświadczalnych funkcji $q=q(\varepsilon_a)$ i $\varepsilon_p=\varepsilon_p(\varepsilon_v)$. Skorzystamy przy tym jedynie z następujących danych doświadczalnych: 1) postaci odcinka początkowego przekroju f^0 , 2) kształtu linii krytycznej oraz 3) krzywej gęstości krytycznej. Zakładamy zatem, że wartości ekstremalne naprężeń i odkształceń obarczone są nieznacznymi błędami w stosunku do wartości w trakcie omawianego procesu. Odnosi się to szczególnie do zmian objętościowych.

Ograniczanie się do prostych aproksymacji warunku plastyczności ma uzasadnienie w możliwości wykorzystania rezultatów do rozwiązania pewnych zadań brzegowych. Postępowanie takie pozwala ponadto na zdobycie pewnego doświadczenia przy dalszych próbach doboru funkcji materiałowych.

5.2. Warunek plastyczności w postaci elipsy

Jedną z najprostszych postaci rodziny przekrojów powierzchni plastyczności, aczkolwiek będącą znacznym przybliżeniem postaci doświadczalnej, jest elipsa o środku położonym na osi p i przechodząca przez punkt $p=0, q=0$ (rys. 16).

Warunek taki został rozpatrzony w pracy [5], gdzie zanalizowano kształt wykresów $q=q(\varepsilon_a)$ dla różnych dróg obciążania i dowolnie obranych parametrów elipsy.

Zgodnie z oznaczeniami z rys. 18 krzywa o kształcie elipsy ma równanie

$$(5.1) \quad f = \frac{(p-a)^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$a = a(\rho), \quad b = b(\rho),$$

gdzie a i b określają zmianę położenia elipsy w zależności od gęstości. Funkcje te redukują się do jednej funkcji po wykorzystaniu warunku, że punkty elipsy o współrzędnych $p=a$ i $q=b$ leżą na linii krytycznej l_{kr} , będącej zgodnie z wynikami doświadczeń prostą o równaniu

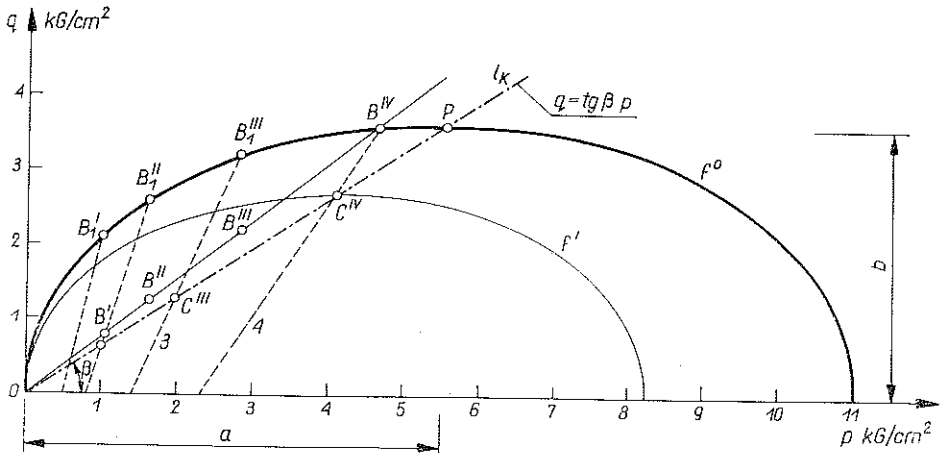
$$(5.2) \quad q = p \operatorname{tg} \beta,$$

lub

$$(5.3) \quad b = a \operatorname{tg} \beta.$$

Za niezależny parametr określony doświadczalnie przyjmiemy $a=a(\rho)$; równanie jest równoważne krzywej gęstości krytycznej. Zauważmy jednak, że

przyjmując zgodnie z rys. 14 wartość p dla punktu przecięcia linii krytycznej z krzywą f^0 równą $p^0_{kr} = 12 \text{ kG/cm}^2$ stwierdzimy, że położenie początkowej elipsy w obszarze rozluźniania (względem doświadczalnej powierzchni o kształcie prostej) prowadzi będzie do znacznych błędów w wartościach q . Dla zmniejszenia tej rozbieżności założymy, że $p^0_{kr} = 5,5 \text{ kG/cm}^2$, otrzymując elipsę pokazaną na rys. 16.



Rys. 16

Przyjmując warunek plastyczności w postaci elipsy, należy ponadto dokonać pewnej aproksymacji rzeczywistych dróg obciążenia tak, aby położenie punktów B odpowiadało elipsie. Przyjęto, że położenie punktów A^I, A^{II}, \dots jest zgodne z doświadczeniami, a punkty B^I, B^{II} na elipsie mają te same wartości p jak rzeczywiste punkty na prostej (rys. 16). Założono ponadto, że drogi obciążania są prostymi, łączącymi odpowiednio punkty A^I, B^I, \dots , skąd otrzymano nowe położenie punktów C, C^I, \dots . Powyższe założenie, przy przyjęciu pierwszej aproksymacji wyników doświadczalnych (p. 3.5), prowadzi do nowego położenia punktów na wykresie $p_{kr} = p_{kr}(p)$ zaznaczonego na rys. 14 pełnymi kółkami.

Punkty te można dość dobrze aproksymować prostą

$$(5.4) \quad p_{kr} = u'p - w',$$

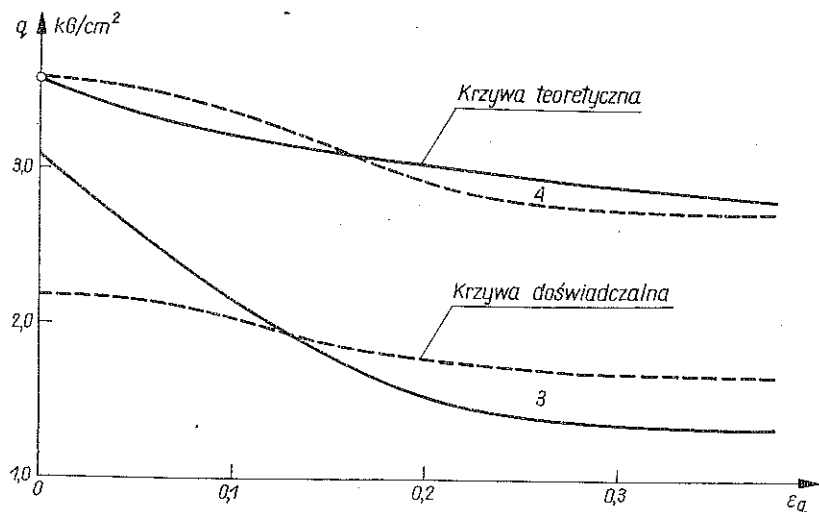
przechodzącą przez obrany punkt $p^0_{kr} = 5,5 \text{ kG/cm}^2$, co potwierdza poprawność założenia p^0_{kr} .

Składowe wektora przyrostu odkształceń plastycznych (2.17) i (2.18) dla warunku plastyczności o kształcie elipsy określone są następująco:

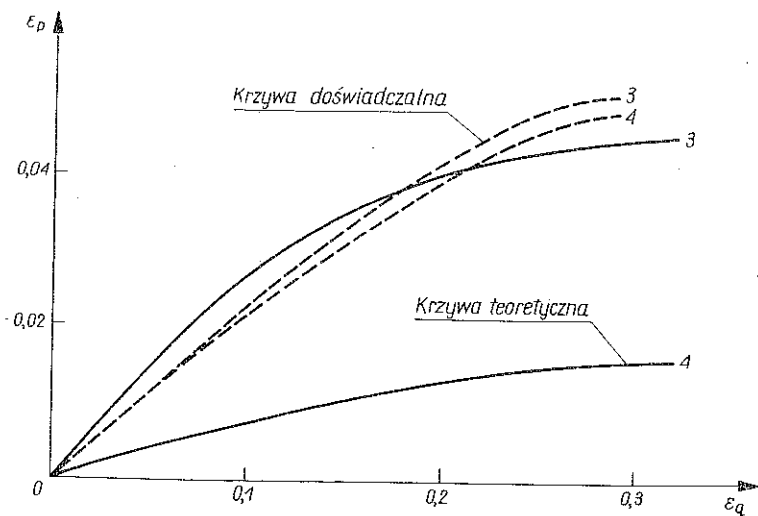
$$(5.5) \quad d\varepsilon_p = \frac{b^2(p-a)dp + a^2q dq}{p \left\{ \frac{da}{dp} [a(q^2 - b^2) - b^2(p-a)] + \frac{db}{dp} [b(p-a)^2 - a^2b] \right\}}$$

$$(5.6) \quad d\varepsilon_a = \frac{a^2b^2(p-a)q dp + a^4q^2 dq}{pb^2(p-a) \left\{ \frac{da}{dp} [a(q^2 - b^2) - b^2(p-a)] + \frac{db}{dp} [b(p-a)^2 - a^2b] \right\}}$$

Całkując funkcję (5.5) i (5.6) po wykorzystaniu (5.3) i (5.4) można obliczyć wartości ε_p i ε_q dla dowolnej drogi obciążania. Otrzymane wzory na ε_p i ε_q są jednakże dość złożone. Wystarczającą dokładność można uzyskać metodą graficzną obliczając



Rys. 17

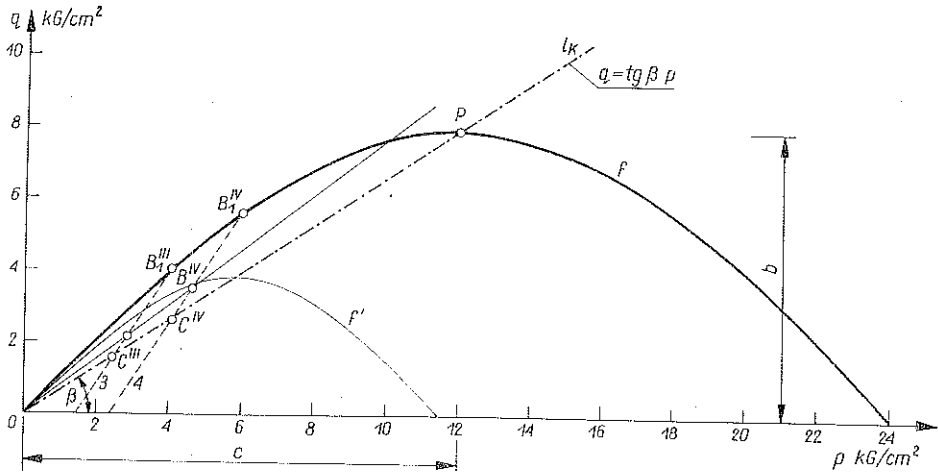


Rys. 18

przyrosty $d\varepsilon_p$ i $d\varepsilon_q$ dla małych zmian położenia powierzchni i odpowiadających zmian gęstości. Praktycznie wygodnie jest obrać małe przyrosty $\Delta\rho$ i z rys. 14 odczytać zmianę parametru a elipsy.

Obliczenie wykonano dla dwóch dróg obciążenia 3 i 4 i stałych przyrostów $d\rho=0,01 \text{ G/cm}^3$. Otrzymane funkcje $q=q(\varepsilon_q)$ i $\varepsilon_p=\varepsilon_p(\varepsilon_q)$ są przedstawione rys. 17 i 18. Stosunkowo dobra zgodność doświadczalnej i teoretycznej krzywej 4 na rys. 17

spowodowana jest przyjęciem początkowej elipsy przecinającej rzeczywiste położenie punktu B^{IV} . Krzywa 3 na tym rysunku odbiega już znacznie od krzywej doświadczalnej. Podobne różnice wystąpią dla dróg 1 i 2, co wynika z dużej różnicy rzeczywistego i przyjętego do obliczeń położenia punktów B i C .



Rys. 19

Porównując krzywe $\varepsilon_p = \varepsilon_p(\varepsilon_n)$ (rys. 18) widać dużą różnicę dla drogi 4 i znacznie mniejszą dla drogi 3.

Szczegółowa analiza rozbieżności krzywych doświadczalnych i teoretycznych przedstawiona będzie w p. 6.

5.3. Warunek plastyczności w postaci sinusoidy

Jako drugi przykład aproksymacji warunku plastyczności rozpatrzmy sinusoidę (rys. 19) o równaniu

$$(5.7) \quad f = q - b \sin\left(\frac{\pi p}{2c}\right) = 0, \quad b = b(\rho), \quad c = c(\rho).$$

Sinusoida jest krzywą bardziej płaską niż elipsa w przedziale małych wartości argumentu, dając lepsze przybliżenie doświadczalnej początkowej krzywej f^0 o kształcie prostej. Sinusoida nie zapewnia jednakże jednoznaczności wektora prędkości odkształceń plastycznych w punkcie o współrzędnych $p=2c$, $q=0$. W niniejszych rozważaniach możemy dopuścić istnienie punktu osobliwego, gdyż rozpatrywane zachowanie się modelu dotyczy jedynie obszaru rozluźnienia.

Przyjmując linię krytyczną w postaci prostej, mamy

$$(5.8) \quad b = c \operatorname{tg} \beta,$$

i zmiana położenia warunku plastyczności opisana jest tylko jedną funkcją materiałową. Dla określenia tej funkcji wykorzystamy, podobnie jak w p. 5.2, wzór na wartość p na linii krytycznej od ρ , równoważnej zależności $c = c(\rho)$.

Aproksymacja sinusoidą doświadczalnego przekroju f^0 powierzchni plastyczności wymaga, podobnie jak w przypadku elipsy, usytuowania dróg obciążania i stanów określanych punktami $A^I, A^{II}, \dots, B^I, B^{II}, \dots, C^I, C^{II}, \dots$ względem sinusoidy. Przyjęto doświadczalne wartości p i q dla punktów A^I, A^{II}, \dots i C^I, C^{II}, \dots , a położenie punktów B^I, B^{II}, \dots na przecięciu prostych łączących odpowiednie pary $A^I C^I, A^{II} C^{II}, \dots$ z sinusoidą (punkty B_1^{III} i B_1^{IV} na rys. 12). Współrzędne punktów B_1^{III} i B_1^{IV} nie odpowiadają zatem wartościom doświadczalnym i różnią się od przyjętych w p. 5.2. Przyjmując ponadto drugą interpretację wyników, przy zachowaniu doświadczalnych wartości p i q dla punktów C^I, C^{II}, \dots , ustalimy, że zależność $c=c(p)$ ma postać

$$(5.9) \quad c = u\rho - w$$

przy $c^0 = 12 \text{ kG/cm}^2$.

Przyrosty odkształceń plastycznych mają dla warunku plastyczności o postaci sinusoidy postać

$$(5.10) \quad d\varepsilon_p = \frac{dq - \frac{\pi b}{2c} \cos\left(\frac{\pi p}{2c}\right) dp}{\sin\left(\frac{\pi p}{2c}\right) \frac{db}{dp} \rho - b \frac{\pi b}{2c^2} \cos\left(\frac{\pi p}{2c}\right) \frac{dc}{dp} \rho},$$

$$(5.11) \quad d\varepsilon_q = \frac{dq - \frac{\pi b}{2c} \cos\left(\frac{\pi p}{2c}\right) dp}{\frac{\pi b}{4c} \sin\left(\frac{\pi p}{2c}\right) \frac{db}{dp} \rho - \frac{\pi^2 b^2}{8c^3} \cos\left(\frac{\pi p}{2c}\right) \frac{dc}{dp} \rho}.$$

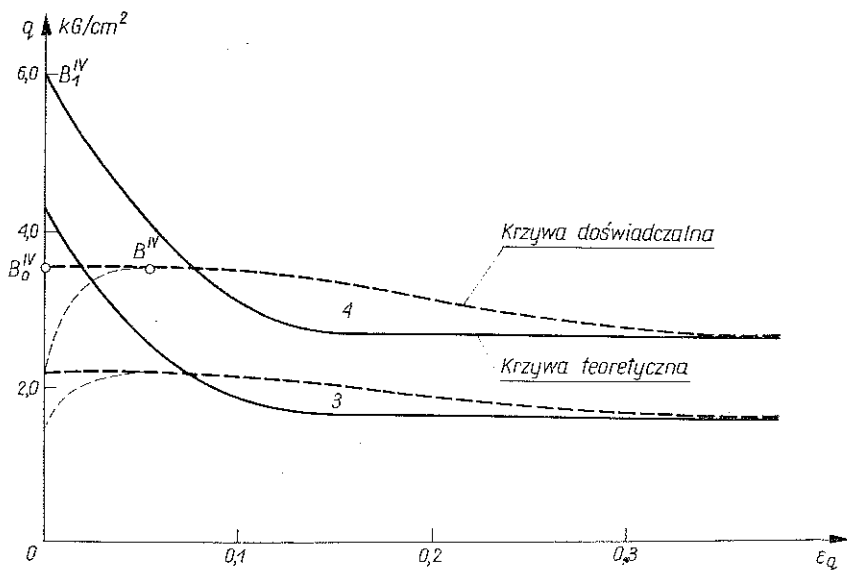
Teoretyczne krzywe $q=q(\varepsilon_q)$ i $\varepsilon_p=\varepsilon_p(\varepsilon_q)$ skonstruowano określając graficznie $d\varepsilon_p$ i $d\varepsilon_q$ dla kroków $d\rho=0,01 \text{ G/cm}^3$ i dwóch dróg obciążania 3 i 4. Krzywe te przedstawiono na rys. 20 i 21. Teoretyczne krzywe $q=q(\varepsilon_q)$ odbiegają dość znacznie od krzywych doświadczalnych; największe różnice występują dla małych wartości ε_q . Jest to spowodowane różnicą pomiędzy rzeczywistymi wartościami q w punktach B^I, B^{II}, \dots , a wartościami przyjętymi do obliczeń. Różnice występują też w funkcjach $\varepsilon_p=\varepsilon_p(\varepsilon_q)$.

5.4. Warunek plastyczności o kształcie złożonym

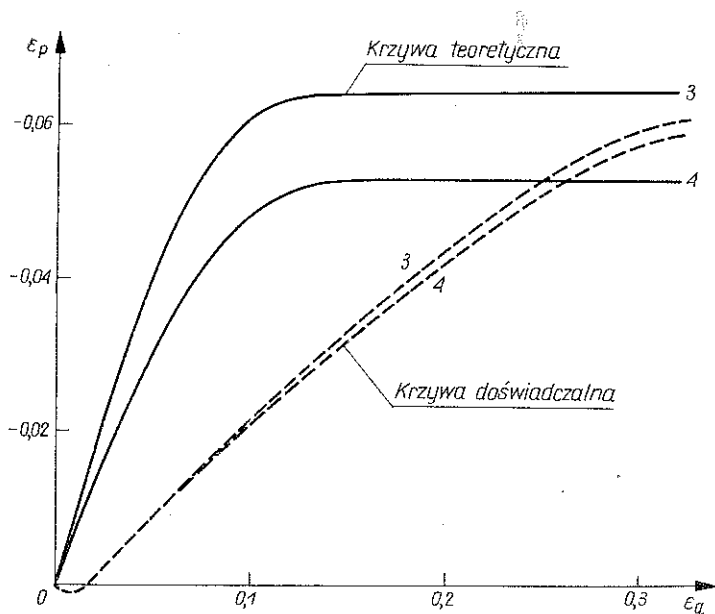
Przedstawione na rys. 17 i 20 różnice (ilościowe) spowodowane są przede wszystkim przyjęciem zbyt uproszczonych postaci warunków plastyczności i ich początkowych parametrów, odbiegających znacznie od wyników doświadczeń. Poniżej rozpatrzmy bardziej złożony kształt przekroju f^0 , lepiej pokrywający się z wynikami doświadczeń.

Zgodnie z rys. 15 przyjmujemy, że w obszarze zrealizowanych doświadczeń początkowy przekrój f^0 powierzchni plastyczności, wyznaczony przez punkty B^I, B^{II}, B^{III} i B^I , jest prostą nachyloną pod kątem $\alpha_0=37^\circ 30'$. Linię krytyczną przyjmujemy, podobnie jak poprzednio, jako prostą o nachyleniu $\beta=34^\circ$. Założymy, że każdy

z kolejnych przekrojów f składa się z odcinka prostej f_1 i stycznej do niego elipsy f_2 o środku położonym na osi p (rys. 22). Warunek styczności odcinka prostej i elipsy zapewnia jednoznaczność nachylenia wektora prędkości odkształcenia na całej krzywej f . Punkt styku f_1 i f_2 zaznaczono na rys. 22 literą Q .



Rys. 20

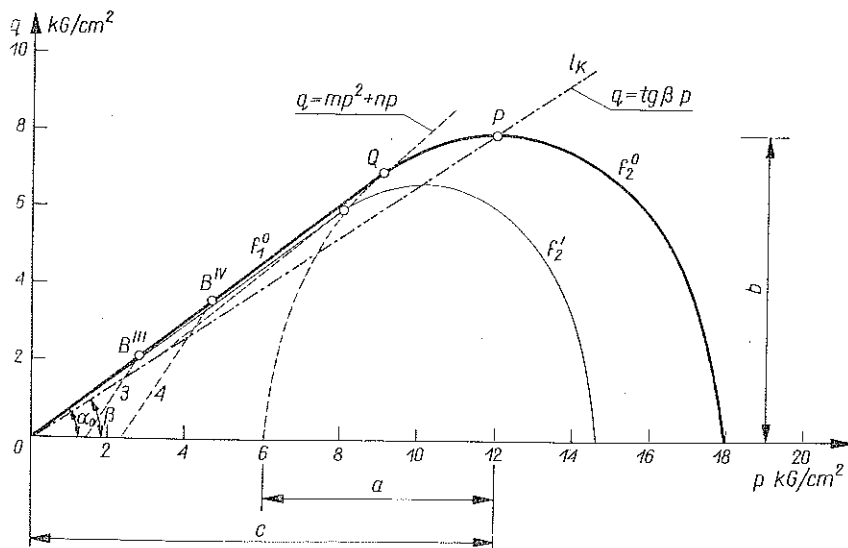


Rys. 21

Powyższy warunek plastyczności ma postać

$$(5.12) \quad f_1 = q - p \operatorname{tg} \alpha = 0, \quad \alpha = \alpha(\rho), \quad f_2 = \frac{(p-c)^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} - 1 = 0;$$

$$(5.13) \quad a = a(\rho), \quad b = b(\rho), \quad c = c(\rho).$$



Rys. 22

Cztery parametry krzywej a , b , c i α redukują się do trzech po wykorzystaniu równania linii krytycznej

$$(5.14) \quad b = c \operatorname{tg} \beta.$$

Warunek styczności odcinka prostej f_1 i elipsy f_2 daje dodatkową zależność pomiędzy parametrami a oraz c i α w postaci

$$(5.15) \quad a = c \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{\operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

W rezultacie pozostają dwa niezależne parametry, np. c i α . Funkcję $c = c(\rho)$ przyjmujemy podobnie jak w p. 5.3, opierając się na wynikach przedstawionych na rys. 14:

$$(5.16) \quad c = u\rho - w,$$

gdzie $c^0 = 12 \text{ kg/cm}^2$. O funkcji α wiadomo jedynie, że zgodnie z rys. 22 kąt α musi być zawarty pomiędzy α_0 dla przekroju początkowego f^0 a β dla najmniejszego przekroju końcowego. Warunek ten będzie spełniony, jeżeli założy się np, że punkty styczności Q leżą na paraboli

$$(5.17) \quad q = mp^2 + np,$$

przechodzącej przez punkt Q dla przekroju początkowego o współczynniku $n = \operatorname{tg} \beta$. Równanie (5.17) daje dodatkową zależność pomiędzy parametrami c i α :

$$(5.18) \quad \operatorname{tg}^3 \alpha - n \operatorname{tg}^2 \alpha - m c \operatorname{tg}^2 \beta = 0.$$

W rezultacie własności materiału są opisane warunkiem plastyczności o postaci (5.12) i (5.13) i jedną funkcją materiałową (5.16).

Przyrosty odkształceń $d\varepsilon_p$ i $d\varepsilon_a$ określone są zgodnie z prawem płynięcia odpowiednio dla obu warunków plastyczności za pomocą następujących wzorów:

dla odcinka prostej

$$(5.19) \quad d\varepsilon_{p_1} = - \frac{dq - \operatorname{tg} \alpha dp}{\frac{p}{\cos^2 \alpha} \rho \frac{d\alpha}{dp}},$$

$$(5.20) \quad d\varepsilon_{a_1} = \frac{dq - \operatorname{tg} \alpha dp}{\frac{p \operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \alpha} \rho \frac{d\alpha}{dp}},$$

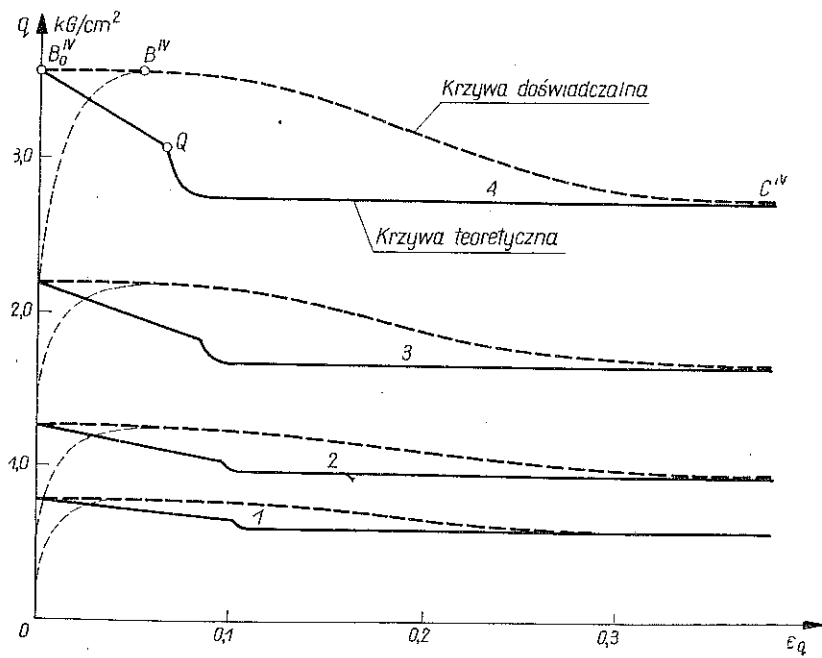
dla elipsy

$$(5.21) \quad d\varepsilon_{p_2} = \frac{b^2(p-c)dp + a^2q dq}{\rho \left\{ a \frac{da}{dp} (q^2 - b^2) + b \frac{db}{dp} [(p-c)^2 - a^2] - b^2 \frac{dc}{dp} (p-c) \right\}},$$

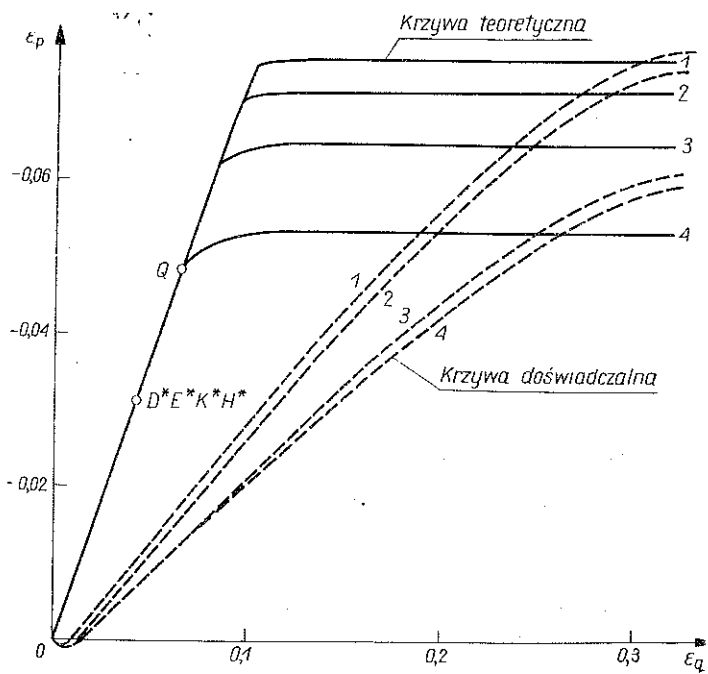
$$(5.22) \quad d\varepsilon_{a_2} = \frac{a^2 b^2 (p-c) q dp + a^4 q dq}{\rho b^2 (p-c) \left\{ a \frac{da}{dp} (q^2 - b^2) + b \frac{db}{dp} [(p-c)^2 - a^2] - b \frac{dc}{dp} (p-c) \right\}}.$$

Teoretyczne krzywe $q = q(\varepsilon_a)$ i $\varepsilon_p = \varepsilon_p(\varepsilon_a)$ obliczone graficznie dla kroków $dp = = 0,01 \text{ G/cm}^2$ i krzywe doświadczalne, odpowiadające drugiej aproksymacji, przedstawiają rys. 23 i 24. Z rys. 23 widać, że pomimo zgodności punktów początkowych i końcowych istnieje pewna rozbieżność ilościowa. Różnice są większe dla dróg obciążania przy wyższych wartościach p . Krzywe teoretyczne składają się z dwóch części: liniowej, odpowiadającej położeniu stanu naprężenia na odcinku prostym warunku plastyczności, i krzywoliniowej, odpowiadającej części elipsy.

Należy zaznaczyć, że dla szczególnej postaci warunku plastyczności (przy pominięciu związku (5.17) i założeniu $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$) odcinek początkowy krzywych $q = q(\varepsilon_a)$ byłby poziomy. Zapewniłoby to lepszą zgodność z przebiegiem doświadczalnym zjawisk. W tym jednakże przypadku odcinek prostej f_1 byłby wspólny dla wielu elips, co odbiega od przyjętego w modelu założenia, że kolejnym gęstościom ρ odpowiadają kolejne różnie położone przekroje powierzchni plastyczności $p q \rho$. Różnice ilościowe pojawiają się także na wykresach $\varepsilon_p = \varepsilon_p(\varepsilon_a)$ (rys. 24), gdzie dla stanów naprężenia leżących na odcinku f_1 otrzymuje się dla wszystkich dróg obciążania jedną zależność.



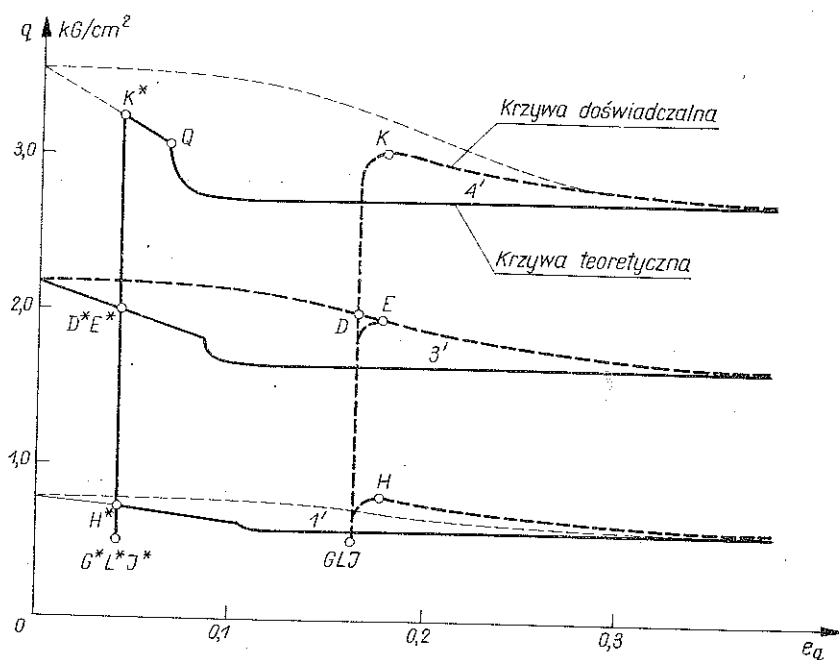
Rys. 23



Rys. 24

5.5. Warunek plastyczności przy złożonych drogach obciążania

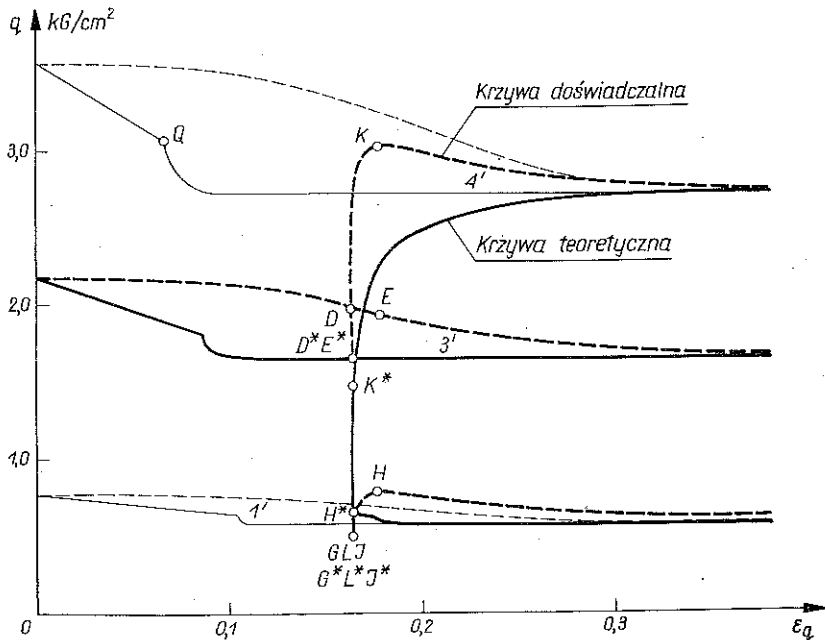
W dotychczasowych rozważaniach oparto się jedynie na pewnych danych doświadczalnych, otrzymanych z pierwszej serii doświadczeń. Nie wykorzystano żadnej informacji wynikającej z trzeciej serii. Doświadczenia te wskazują, że warunek plastyczności, wyznaczany maksymalnymi wartościami q po pewnym procesie deformacji, ma kształt prostej, zawartej pomiędzy nachyleniem powierzchni początkowej i linii krytycznej. Odpowiada to przyjętemu w p. 5.4 założeniu o zmianie f_1 . Pełna weryfikacja tego założenia jest niemożliwa, gdyż w badaniach wykonano obciążanie tylko dla jednej wartości ε_a . Doświadczenia trzeciej serii można wszakże wykorzystać do ilościowego porównania wzajemnego położenia krzywych doświadczalnych i teoretycznych uzyskanych przy prostych i złożonych drogach obciążania (por. p. 2.3). Do wyznaczenia krzywych teoretycznych przyjęto rozpatrzoną w p. 5.4 aproksymację doświadczeń dla warunku złożonego.



Rys. 25

Wobec ilościowej różnicy doświadczalnych i teoretycznych krzywych $q=q(\varepsilon_q)$ (rys. 23) należy najpierw ustalić, czy punkt odciążenia D na krzywej teoretycznej odpowiada doświadczalnej wartości q , czy ε_q . Przyjmując doświadczalną wartość q otrzymamy z rys. 23 $\varepsilon_q=0,042$ i położenie punktu D na odcinku prostym warunku plastyczności. Krzywe dociążania, obliczone analogicznie jak w p. 5.4 a przedstawione dla tego przypadku na rys. 25, pokrywają się z krzywymi dla pierwszej serii doświadczeń. Spowodowane jest to przyjęciem dróg dociążania zawierających odcinek prosty przekroju f_1 . Jeśli przyjąć z doświadczeń $\varepsilon_a=0,163$, to drogi dociążania przecinają część eliptyczną krzywej f i w konsekwencji krzywe $q=q(\varepsilon_q)$ różnią się

od krzywych dla pierwszej serii doświadczeń (rys. 26). Jakościowo ich położenie odpowiada efektom doświadczalnym; istnieją różnice ilościowe, zwłaszcza dla drogi 4, gdzie krzywa teoretyczna rozpoczyna się poniżej punktu odciążania.



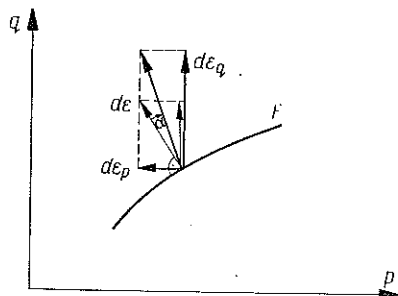
Rys. 26

6. ANALIZA WYNIKÓW I WNIOSKI

Przedstawione na rys. 17, 18, 20, 21, 23 i 24 krzywe $q=q(\varepsilon_q)$ i $\varepsilon_p=\varepsilon_p(\varepsilon_q)$ dla trzech różnych postaci warunku plastyczności wskazują na jakościową zgodność, ale również na ilościowe wyraźne różnice pomiędzy wynikami badań a wykresem teoretycznym. W odniesieniu do krzywej $q=q(\varepsilon_q)$ różnice są tym większe, im bardziej odbiega przyjęta postać krzywej f od kształtu obserwowanego doświadczalnie. Dla krzywej złożonej z odcinka prostej i elipsy niezgodność jest już niewielka. Wyraźne różnice pomiędzy krzywymi $\varepsilon_p=\varepsilon_p(\varepsilon_q)$ istnieją jednak dla wszystkich trzech przypadków. Poniżej rozpatrzemy dokładniej przyczyny tych rozbieżności.

Różnice ilościowe dla krzywych $\varepsilon_p=\varepsilon_p(\varepsilon_q)$ odnoszą się zarówno do wartości bieżących jak i końcowych. Te ostatnie wynikają z aproksymacji wyników doświadczeń określających krzywą gęstości krytycznej (rys. 14) przez prostą. Przyjęcie krzywej bliższej wynikom doświadczeń zapewniłoby lepszą zgodność; wpływ na wartości bieżące byłby jednak niewielki. Jako zasadniczą przyczynę różnic w wartościach bieżących można przyjąć nieprawidłowość stowarzyszonego prawa płynięcia przyjętego w rozważaniach *a priori*. Z rysunków 21 i 24 widać, że krzywe teoretyczne są w początkowym obszarze bardziej strome od krzywych doświadczalnych. Mniejsze ich nachylenie otrzymamy przyjmując, że wektor $d\varepsilon$ nie jest ortogonalny

do krzywej f , ale nachylony w kierunku ruchu wskazówek zegara (rys. 27). Dla takich samych przyrostów dp i przyjętej krzywej gęstości krytycznej otrzymamy większe składowe $d\epsilon_q$, co spowoduje przesunięcie krzywych na rys. 21 i 24 w prawo. Przybliżoną wartość tego odchylenia można ocenić na podstawie rys. 18. Dobra zgodność krzywych dla drogi 3 oznacza, że nachylenie wektorów $d\epsilon$ powinno być zbliżone do nachylenia, jakie mają wektory ortogonalne do elipsy dla drogi 3 (rys. 16). Dopuszczenie odchylenia wektora od normalnej spowodowałoby także przesunięcie krzywych $q=q(\epsilon_q)$ w prawo i jeszcze lepszą zgodność wyników.



Rys. 27

Należy jednakże zaznaczyć, że jak wspomniano w p. 4.2 doświadczalne krzywe $\epsilon_p = \epsilon_p(\epsilon_q)$ są obciążone błędem; ich rzeczywisty przebieg leży powyżej (rys. 8). Istnieje zatem możliwość, że uzyskane teoretyczne krzywe mogą odpowiadać stosunkowo dobrze krzywym rzeczywistym.

Istotne zastrzeżenie do przyjętych postaci warunków plastyczności można wysunąć w stosunku do ich położenia w obszarze zagęszczania. Należy przypuszczać, że w tym obszarze krzywe f są znacznie bardziej przesunięte w kierunku większych wartości p . Wskazują na to wyniki różnych prac, w których dla materiału zagęszczonego nie uzyskano krzywych statecznych nawet dla stosunkowo dużych ciśnień hydrostatycznych.

Różnice pomiędzy wykresami teoretycznymi a doświadczalnymi mogą być także spowodowane ograniczeniem się do modelu sztywno-plastycznego i podanymi w p. 3.5 aproksymacjami.

Przyjęta w opracowaniu postać prawa stowarzyszonego i uproszczone kształty warunków plastyczności wymagają dalszej doświadczalnej weryfikacji zgodnie z metodami omówionymi w p. 3. Uzyskane rezultaty wskazują jednakże, jaki popełnia się błąd w opisie deformacji materiału w obszarze rozluźniania, zakładając proste kształty warunku plastyczności i stowarzyszone prawo płynięcia. W pewnych zagadnieniach brzegowych błąd ten może być dopuszczalny.

Zaproponowany uproszczony model materiału o wzmocnieniu gęstościowym dobrze opisuje obserwowane efekty doświadczalne pod względem jakościowym.

Autor wyraża podziękowanie mgr inż. K. KWASZCZYŃSKIEJ-KORGANOWEJ za pomoc przy opracowaniu danych doświadczalnych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. C. R. CALLADINE, Correspondence: *A theoretical and experimental study of strains in triaxial tests on normally consolidated clays*, Geotechnique, **13**, 3, 250–255, 1963.
2. A. DRESCHER, W. BOJANOWSKI, *On the influence of stress path upon the mechanical properties of granular material*, Arch. Inż. Łądow., **14**, 3, 351–365, 1968.
3. D. C. DRUCKER, *Concept of path independence and material stability for soils*, Rheol. Symp. Grenoble, 23–46, 1966.

4. Z. MRÓZ, *On a theory of density-hardening media*, Acta Mech. [w druku].
5. Z. MRÓZ, K. KWASZCZYŃSKA, *Pewne problemy brzegowe dla ciał rozdrobionych o wzmocnieniu gęstościowym*, Rozpr. Inżyn., **19**, 1, 15–42, 1971.
6. A. C. PALMER, *Stress-strain relations for clays: an energy theory*, Geotechnique, **17**, 4, 348–359, 1967.
7. K. H. ROSCOE, A. N. SCHOFIELD, C. P. WROTH, *On the yielding of soils*, Geotechnique, **8**, 1, 22–53, 1958.
8. K. H. ROSCOE, A. N. SCHOFIELD, A. THURAIRAJAH, *Yielding of clays in states wetter than critical*, Geotechnique, **13**, 3, 211–240, 1963.
9. P. W. ROWE, *Stress-dilatancy, earth pressures and slopes*, J. Soil. Mech. Found. Div. ASCE., **89**, 3, 37–61, 1963.
10. P. W. ROWE, L. BARDON, I. K. LEE, *Energy components during the triaxial cell and direct shear tests*, Geotechnique, **14**, 3, 247–261, 1964.
11. A. N. SCHOFIELD, C. P. WROTH, *Critical State Soil Mechanics*, Mc Graw-Hill, 1968.
12. B. WACK, *Détermination expérimentale de la densité d'un sable à l'état de plasticité, Existence d'un densité limite*, Compte Rend. Acad. Sci, Paris T, 260, 1965.
13. J. B. WEIDLER, P. R. PASLAY, *Constitutive relations for inelastic granular medium*, J. Eng. Mech. Div. ASCE, **96**, 4, 395–406, 1970.
14. C. P. WROTH, R. H. BASSET, *A stress-strain relationship for the shearing behaviour of a sand*, Geotechnique, **15**, 1, 32–56, 1965.

Резюме

ОПЫТНАЯ ПРОВЕРКА МОДЕЛИ ПЛОТНОСТНОГО УПРОЧНЕНИЯ

В работе обзорного характера представлены исходные предпосылки, математические формулировки и физический смысл модели сыпучей среды с плотностным упрочнением, предложенной З. Мрузом.

Данная модель описывает в широком диапазоне деформаций основные свойства сыпучих материалов, каковыми являются: сопряженность формоизменения с изменениями объема и зависимость пластических свойств среды от ее плотности.

Подробный анализ поведения модели при простых и сложных путях нагружения выполнен лишь для жестко-пластического случая. Обсуждена методика экспериментальной проверки модели и способы нахождения материальных функций.

Рассуждения иллюстрируются результатами измерений трехосного сжатия сухого песка. Показано, что удовлетворительное описание этих опытов можно получить, приняв ассоциированный закон течения и поверхность текучести, проектирующуюся на плоскости σ_1 $\sqrt{2} \sigma_2$ в виде комбинации прямой и эллипса, зависящего от плотности среды.

SUMMARY

EXPERIMENTAL VERIFICATION OF A BODY WITH DENSITY HARDENING

The paper bears the character of a review and presents the assumptions, the mathematical relations and their physical interpretation for a model of granular medium with a density hardening proposed by Z. Mróz.

The model describes the fundamental properties of granular media in a wide range of deformation including the coupling of shearing and voluminal strains and also the dependence of plastic

properties upon the density of the medium. The detailed analysis of the behaviour of the model subject to simple and complex loading paths is limited to the rigid-plastic model.

The methods of experimental verification and of determination of the material functions are also given. The considerations are illustrated by the examples in which the material functions were determined on the basis of experiments with triaxially compressed dry sand.

It is shown that a sufficient accuracy may be obtained by assuming the associated flow rule and the yield surface whose cross-section by the $(\sigma_1, \sqrt{2} \sigma_2)$ -plane has the form of a straight line segment and ellipse, depending linearly on the density.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 listopada 1971 r.
