

## PEWNE PROBLEMY STATYKI PŁYT SIATKOWYCH

KAROL H. BOJDA (GLIWICE)

## WSTĘP

W pracy podano zastosowania rachunku operatorów MIKUSIŃSKIEGO [1] do rozwiązywania problemów statyki płyt siatkowych. Modelem obliczeniowym płyt siatkowych w tej pracy jest dwuwymiarowy ośrodek Cosseratów z wyróżnioną «włóknistą» strukturą [2]. W punktach 1-3 podano rozwiązania dla jednorodnych siatkowych pasm płytowych dowolnie poprzecznie obciążonych. W punktach 4-6 podano operatorowe rozwiązania dla prostokątnych płyt ortotropowych o dwóch przeciwległych krawędziach swobodnie podpartych oraz wyprowadzono równania dla płyt ciągłych sprężystości podpartych.

Rozwiązania operatorowe górują nad sposobami klasycznymi tym, że można łatwo uwzględnić obciążenia skupione wykorzystując pojedyncze szeregi lub całki trygonometryczne. Ten fakt pozwolił uzyskać proste rozwiązania zagadnień dotychczas nierozwiązanych.

## 1. SIATKOWE JEDNORODNE PASMA PŁYTOWE

Rozważania ograniczymy do pasm o krawędziach utwierdzonych (rys. 1). Podstawowe równania statyki płyt siatkowych [2]

$$(1.1) \quad [A^{KL}(u, L + \varepsilon_{LM} v^M)], K + b = 0, \\ (C^{KLMN} v_{N, M}), K - \varepsilon_K^L A^{KM}(u, M + \varepsilon_{MN} v^N) + H^L = 0, \quad K, L, M, N = 1, 2,$$

dla płyt jednorodnych są w postaci rozwiniętej są następujące:

$$(1.2) \quad A^{11}(u,_{11} + v_{2,1}) + A^{22}(u,_{22} - v_{1,2}) + A^{12}(2u,_{1,2} - v_{1,1} + v_{2,2}) + b = 0, \\ C^{1111}v_{1,11} + 2C^{1121}v_{1,12} + C^{2121}v_{1,22} + C^{1112}v_{2,11} + (C^{1122} + C^{2112})v_{2,12} + \\ + C^{2122}v_{2,22} + A^{12}(u,_{11} + v_2) + A^{22}(u,_{22} - v_1) + H^1 = 0, \\ C^{1112}v_{1,11} + (C^{1122} + C^{2112})v_{1,12} + C^{2122}v_{1,22} + C^{1212}v_{2,11} + 2C^{2212}v_{2,12} + \\ + C^{2222}v_{2,22} - A^{11}(u,_{11} + v_2) - A^{12}(u,_{22} - v_1) + H^2 = 0,$$

gdzie  $A^{KL}$  i  $C^{KLMN}$  oznaczają składowe tensorów sztywności sprężystej,  $b$  i  $H^L$  obciążenie płyty,  $u, v_K$  składowe stanu przemieszczenia oraz  $\varepsilon_{KL} = \varepsilon_K^L$  symbol Ricciego. W (1.2) uwzględniono równości

$$C^{KLMN} = C^{MNKL}, \quad A^{KL} = A^{LK}.$$

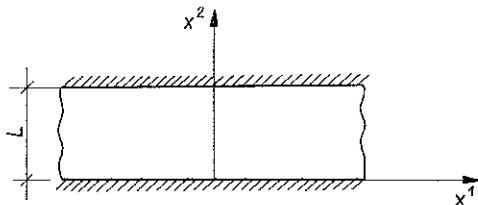
Równania (1.2) z warunkami brzegowymi

$$u(x^1, 0) = 0, \quad v_K(x^1, 0) = 0$$

sprowadza się do następujących równań operatorowych:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} & A^{11}u'' + 2A^{12}su' + A^{22}s^2u - A^{12}v_1' - A^{22}sv_1 + \\ & \quad + A^{11}v_2' + A^{12}sv_2 = -b + A^{22}u, \quad 2(x^1, 0), \\ & A^{12}u' + A^{22}su + C^{1111}v_1'' + 2C^{1121}sv_1' + C^{2121}s^2v_1 - \\ & \quad - A^{22}v_1 + C^{1112}v_2'' + (C^{1122} + C^{2112})sv_2' + C^{2122}s^2v_2 + \\ & \quad + A^{12}v_2 = -H^1 + C^{2121}v_{1,2}(x^1, 0) + C^{2122}v_{2,2}(x^1, 0), \\ & -A^{11}u' - A^{12}su + C^{1112}v_1'' + (C^{1122} + C^{2112})sv_1' + \\ & \quad + C^{2122}s^2v_1 + A^{12}v_1 + C^{1212}v_2'' + 2C^{2212}sv_2' + C^{2222}s^2v_2 - \\ & \quad - A^{11}v_2 = -H^2 + C^{2122}v_{1,2}(x^1, 0) + C^{2222}v_{2,2}(x^1, 0), \end{aligned}$$

gdzie  $s$  jest operatorem różniczkowym. W równaniach (1.3)  $u$  i  $v_K$  są funkcjami operatorowymi parametrycznymi zmiennej  $x^1$  oraz  $u'$ ,  $u''$ ,  $v_K'$ ,  $v_K''$  są odpowiednio



Rys. 1

pierwszymi i drugimi pochodnymi ciągłymi tych funkcji. W dalszym ciągu symbol  $\{f(x^K)\}$  będzie oznaczał funkcję liczbową zmiennych  $x^K$ , a symbol  $f(x^1)$  funkcję operatorową parametryczną zmiennej  $x^1$ .

Zakładając, że całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(x^K) dx^1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} H^L(x^K) dx^1$$

mają wartości ograniczone, można funkcje operatorowe obciążenia

$$b(x^1) = \{b(x^K)\}, \quad H^L(x^1) = \{H^L(x^K)\}$$

rozwinąć w pojedyncze operatorowe całki Fouriera:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} b &= \int_0^{\infty} (b_{(\alpha)} \cos \alpha x^1 + b_{[\alpha]} \sin \alpha x^1) d\alpha, \\ H^L &= \int_0^{\infty} (H_{(\alpha)}^L \cos \alpha x^1 + H_{[\alpha]}^L \sin \alpha x^1) d\alpha, \end{aligned}$$

gdzie

$$b_{(\alpha)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(x^1) \cos \alpha x^1 dx^1, \quad b_{[\alpha]} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(x^1) \sin \alpha x^1 dx^1,$$

$$H_{(\alpha)}^L = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H^L(x^1) \cos \alpha x^1 dx^1, \quad H_{[\alpha]}^L = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H^L(x^1) \sin \alpha x^1 dx^1.$$

Przyjmujemy także

$$A^{22}u_{,2}(x^1, 0) = \int_0^{\infty} (B_{(\alpha)}^1 \cos \alpha x^1 + B_{[\alpha]}^1 \sin \alpha x^1) d\alpha,$$

$$(1.5) \quad C^{2121}v_{1,2}(x^1, 0) + C^{2122}v_{2,2}(x^1, 0) = \int_0^{\infty} (B_{(\alpha)}^2 \cos \alpha x^1 + B_{[\alpha]}^2 \sin \alpha x^1) d\alpha,$$

$$C^{2122}v_{1,2}(x^1, 0) + C^{2222}v_{2,2}(x^1, 0) = \int_0^{\infty} (B_{(\alpha)}^3 \cos \alpha x^1 + B_{[\alpha]}^3 \sin \alpha x^1) d\alpha.$$

Rozwiązania zagadnienia brzegowego będziemy poszukiwali w postaci

$$(1.6) \quad u = \int_0^{\infty} (u_{(\alpha)} \cos \alpha x^1 + u_{[\alpha]} \sin \alpha x^1) d\alpha, \quad v_K = \int_0^{\infty} (v_{(\alpha)}^K \cos \alpha x^1 + v_{[\alpha]}^K \sin \alpha x^1) d\alpha.$$

Podstawiając (1.4), (1.5) i (1.6) do (1.3) dochodzimy do równań następujących na  $u_{(\alpha)}$ ,  $u_{[\alpha]}$ ,  $v_{(\alpha)}^K$ ,  $v_{[\alpha]}^K$ :

$$(1.7) \quad [D_{ij}] \begin{bmatrix} u_{(\alpha)} \\ u_{[\alpha]} \\ v_{(\alpha)}^1 \\ v_{[\alpha]}^1 \\ v_{(\alpha)}^2 \\ v_{[\alpha]}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{(\alpha)}^1 - b_{(\alpha)} \\ B_{[\alpha]}^1 - b_{[\alpha]} \\ B_{(\alpha)}^2 - H_{(\alpha)}^1 \\ B_{[\alpha]}^2 - H_{[\alpha]}^1 \\ B_{(\alpha)}^3 - H_{(\alpha)}^2 \\ B_{[\alpha]}^3 - H_{[\alpha]}^2 \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6,$$

przy czym operatory  $D_{ij}$  mają postać następującą:

$$D_{11} = D_{22} = A^{22}s^2 - A^{11}\alpha^2, \quad D_{12} = -D_{21} = 2A^{12}s\alpha,$$

$$D_{13} = D_{24} = -D_{31} = -D_{42} = -A^{22}s,$$

$$D_{14} = -D_{23} = D_{41} = -D_{32} = -A^{12}\alpha,$$

$$D_{15} = D_{26} = -D_{51} = -D_{62} = A^{12}s,$$

$$D_{16} = -D_{25} = D_{61} = -D_{52} = A^{11}\alpha,$$

$$D_{33} = D_{44} = C^{2121}s^2 - C^{1111}\alpha^2 - A^{22},$$

$$D_{34} = -D_{43} = 2C^{1121}s\alpha,$$

$$D_{35} = D_{46} = D_{53} = D_{64} = C^{2122}s^2 - C^{1112}\alpha^2 + A^{12},$$

$$D_{36} = -D_{45} = -D_{63} = D_{54} = (C^{1112} + C^{2112})s\alpha,$$

$$D_{55} = D_{66} = C^{2222}s^2 - C^{1212}\alpha^2 - A^{11}, \quad D_{56} = -D_{65} = 2C^{2212}s\alpha.$$

Z (1.7) otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} u_{(\alpha)} \\ u_{[\alpha]} \\ v_{(\alpha)}^1 \\ v_{[\alpha]}^1 \\ v_{(\alpha)}^2 \\ v_{[\alpha]}^2 \end{bmatrix} = [G_{ij}] \begin{bmatrix} B_{(\alpha)}^1 - b_{(\alpha)} \\ B_{[\alpha]}^1 - b_{[\alpha]} \\ B_{(\alpha)}^2 - H_{(\alpha)}^1 \\ B_{[\alpha]}^2 - H_{[\alpha]}^1 \\ B_{(\alpha)}^3 - H_{(\alpha)}^2 \\ B_{[\alpha]}^3 - H_{[\alpha]}^2 \end{bmatrix},$$

gdzie  $[G_{ij}] = [D_{ij}]^{-1}$ .

Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$E^1 = B_{(\alpha)}^1, \quad E^2 = B_{[\alpha]}^1, \quad E^3 = B_{(\alpha)}^2, \quad E^4 = B_{[\alpha]}^2, \quad E^5 = B_{(\alpha)}^3, \quad E^6 = B_{[\alpha]}^3$$

oraz

$$\Phi^1 = b_{(\alpha)}, \quad \Phi^2 = b_{[\alpha]}, \quad \Phi^3 = H_{(\alpha)}^1, \quad \Phi^4 = H_{[\alpha]}^1, \quad \Phi^5 = H_{(\alpha)}^2, \quad \Phi^6 = H_{[\alpha]}^2$$

operatorowe rozwiązanie sformułowanego zagadnienia brzegowego przyjmuje postać

$$(1.8) \quad \begin{aligned} u &= \int_0^{\infty} [G_{1j}(E^j - \Phi^j) \cos \alpha x^1 + G_{2j}(E^j - \Phi^j) \sin \alpha x^1] d\alpha, \\ v_1 &= \int_0^{\infty} [G_{3j}(E^j - \Phi^j) \cos \alpha x^1 + G_{4j}(E^j - \Phi^j) \sin \alpha x^1] d\alpha, \\ v_2 &= \int_0^{\infty} [G_{5j}(E^j - \Phi^j) \cos \alpha x^1 + G_{6j}(E^j - \Phi^j) \sin \alpha x^1] d\alpha. \end{aligned}$$

Oznaczając

$$G_{ij} = \{\Gamma_{ij}(x^2)\}, \quad \{\Gamma_{ij}(x^2)\} * \Phi^j = \{\psi_i(x^2)\},$$

gdzie działanie \* jest symbolem splotu, dochodzimy do zwykłej, nieoperatorowej postaci rozwiązania (1.8):

$$(1.9) \quad \begin{aligned} u &= \int_0^{\infty} [(\Gamma_{1j}(x^2)E^j - \psi_1(x^2)) \cos \alpha x^1 + (\Gamma_{2j}(x^2)E^j - \psi_2(x^2)) \sin \alpha x^1] d\alpha, \\ v_1 &= \int_0^{\infty} [(\Gamma_{3j}(x^2)E^j - \psi_3(x^2)) \cos \alpha x^1 + (\Gamma_{4j}(x^2)E^j - \psi_4(x^2)) \sin \alpha x^1] d\alpha, \\ v_2 &= \int_0^{\infty} [(\Gamma_{5j}(x^2)E^j - \psi_5(x^2)) \cos \alpha x^1 + (\Gamma_{6j}(x^2)E^j - \psi_6(x^2)) \sin \alpha x^1] d\alpha. \end{aligned}$$

Stałe  $E^j$  należy wyznaczyć z warunków brzegowych na krawędzi  $x^2 = L$ .

Dla krawędzi  $x^2 = L$  sztywno utwierdzonej otrzymujemy równania

$$\Gamma_{ij}(L)E^j - \psi_i(L) = 0.$$

Mimo, że rozwiązanie (1.9) wyrażone jest pojedynczymi całkami Fouriera, to jednak wzory te poprawne są również dla obciążeń skupionych. Podany sposób można łatwo uogólnić na zagadnienia tarczowo-płytkowe oraz na pasma z innymi warunkami brzegowymi.

## 2. ALTERNATYWNY SPOSÓB ROZWIĄZYWANIA SIATKOWYCH PASM PŁYTKOWYCH

Jak wynika z p. 1, zasadniczą trudnością rozwiązania rozpatrywanego zagadnienia brzegowego jest znalezienie funkcji  $\{G_{ij}(x^2)\}$ . Istotnie,

$$G_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det[D_{ij}]},$$

gdzie  $A_{ij}$  jest dopełnieniem algebraicznym elementu  $D_{ij}$  w macierzy  $[D_{ij}]$ , a wyznacznik  $\det[D_{ij}]$  jest wielomianem dwunastego stopnia względem  $s$ . Uciążliwe jest zatem rozkładanie  $G_{ij}$  na ułamki proste. Rozwiązania omawianego zagadnienia brzegowego można szukać także w inny sposób. Mianowicie operatory  $u_{(\alpha)}$ ,  $u_{[\alpha]}$ ,  $v_{(\alpha)}^K$ ,  $v_{[\alpha]}^K$  można przedstawić w postaci

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u_{(\alpha)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N u_n^{(m)} h^{n^2} \frac{1}{s^{m+1}}, & u_{[\alpha]} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N u_n^{[m]} h^{n^2} \frac{1}{s^{m+1}}, \\ v_{(\alpha)}^K &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N v_n^{K(m)} h^{n^2} \frac{1}{s^{m+1}}, & v_{[\alpha]}^K &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N v_n^{K[m]} h^{n^2} \frac{1}{s^{m+1}}, \end{aligned}$$

gdzie  $h^{x^2}$  jest operatorem przesunięcia,  $x^2$  oznacza szczególną wartość nadaną zmiennej  $x^2$  oraz gdzie  $N$  zależy od ilości linii  $x^2 = \frac{x^2}{0}$  nieciągłości obciążenia. Dla obciążeń ciągłych ze względu na  $x^2$  mamy  $N=0$ ,  $x^2=0$ . Prawe strony wzorów (2.1) należy podstawić do równań (1.7) i porównać wyrażenia przy tych samych potęgach operatora różniczkowego oraz przy tych samych operatorach przesunięcia. Uzyskamy w ten sposób związki rekurencyjne, z których bardzo łatwo wyznacza się wielkości  $u_n^{(m)}$ ,  $u_n^{[m]}$ ,  $v_n^{K(m)}$ ,  $v_n^{K[m]}$ .

Rozwiązanie posiada postać

$$(2.2) \quad \begin{aligned} u &= \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \frac{(x^2)^m}{m!} h^{n^2} (u_n^{(m)} \cos \alpha x^1 + u_n^{[m]} \sin \alpha x^1) d\alpha, \\ v_K &= \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \frac{(x^2)^m}{m!} h^{n^2} (v_n^{K(m)} \cos \alpha x^1 + v_n^{K[m]} \sin \alpha x^1) d\alpha. \end{aligned}$$

## 3. PRZYKŁAD

Wyznamy  $u$  i  $v_K$  dla pasma obciążonego siłą skupioną  $P$  w punkcie o współrzędnych  $x^1=0$  i  $x^2=\frac{1}{x^2}$ . W tym przypadku

$$b_{(\alpha)} = \frac{P}{\pi} h^{x^2}, \quad b_{[\alpha]} = 0, \quad H_{(\alpha)}^K = 0, \quad H_{[\alpha]}^K = 0.$$

Zgodnie z (2.1) przyjmujemy

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u_{(\alpha)} &= \sum_{m=0}^{\infty} (u_{0(m)} + u_{1(m)} h^{1/2}) \frac{1}{s^{m+1}}, & u_{[\alpha]} &= \sum_{m=0}^{\infty} (u_{0[m]} + u_{1[m]} h^{1/2}) \frac{1}{s^{m+1}}, \\ v_{(\alpha)}^K &= \sum_{m=0}^{\infty} (v_{0(m)}^K + v_{1(m)}^K h^{1/2}) \frac{1}{s^{m+1}}, & v_{[m]}^K &= \sum_{m=0}^{\infty} (v_{0[m]}^K + v_{1[m]}^K h^{1/2}) \frac{1}{s^{m+1}}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu (3.1) do (1.7) otrzymujemy natychmiast

$$\begin{aligned} u_n(0) &= u_n[0] = v_n^K(0) = v_n^K[0] = 0, \\ u_{0(1)} &= \frac{1}{A^{22}} B_{(\alpha)}^1, & u_{1(1)} &= -\frac{1}{A^{22}} \frac{P}{\pi}, & u_{0[1]} &= \frac{1}{A^{22}} B_{[\alpha]}^1, \\ u_{1[1]} &= 0, & v_{0(1)}^1 &= \frac{C^{2222} B_{(\alpha)}^2 - C^{2122} B_{(\alpha)}^3}{C}, \\ v_{0(1)}^2 &= \frac{C^{2121} B_{(\alpha)}^3 - C^{2122} B_{(\alpha)}^2}{C}, & v_{0[1]}^1 &= \frac{C^{2222} B_{[\alpha]}^2 - C^{2122} B_{[\alpha]}^3}{C}, \\ v_{0[1]}^2 &= \frac{C^{2121} B_{[\alpha]}^3 - C^{2122} B_{[\alpha]}^2}{C}, & v_{1(1)}^K &= v_{1[1]}^K = 0, \\ C &= C^{2121} C^{2222} - (C^{2122})^2 \end{aligned}$$

oraz dwanaście związków rekurencyjnych dla  $m \geq 2$ :

$$\begin{aligned} u_n(m) &= \frac{W_{nm}^1}{A^{22}}, & u_n[m] &= \frac{W_{nm}^2}{A^{22}}, \\ v_n^1(m) &= \frac{C^{2222} W_{nm}^3 - C^{2122} W_{nm}^4}{C}, & v_n^2(m) &= \frac{C^{2121} W_{nm}^4 - C^{2122} W_{nm}^3}{C}, \\ v_n^1[m] &= \frac{C^{2222} W_{nm}^5 - C^{2122} W_{nm}^6}{C}, & v_n^2[m] &= \frac{C^{2121} W_{nm}^6 - C^{2122} W_{nm}^5}{C}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} W_{nm}^1 &= A^{22} v_{n(m-1)}^1 - 2A^{12} \alpha u_{n[m-1]} - A^{12} v_{n(m-1)} + A^{11} \alpha^2 u_{n(m-2)} + \\ &\quad + A^{12} \alpha v_{n[m-2]}^1 - A^{11} \alpha v_{n[m-2]}^2, \\ W_{nm}^2 &= 2A^{12} \alpha u_{n(m-1)} + A^{22} v_{n[m-1]}^1 - A^{12} v_{n[m-1]}^2 + A^{11} \alpha^2 u_{n[m-2]} - \\ &\quad - A^{12} \alpha v_{n(m-2)}^1 + A^{11} \alpha v_{n(m-2)}^2, \\ W_{nm}^3 &= -A^{22} u_{n(m-1)} - 2C^{1121} \alpha v_{n[m-1]}^1 - (C^{1112} + C^{2112}) \alpha v_{n[m-1]}^2 - \\ &\quad - A^{12} \alpha u_{n[m-2]} + (C^{1111} \alpha^2 + A^{22}) v_{n(m-2)}^1 + (C^{1112} \alpha^2 + A^{12}) v_{n(m-2)}^2, \\ W_{nm}^4 &= A^{12} u_{n(m-1)} - (C^{1122} + C^{2112}) \alpha v_{n[m-1]}^1 - 2C^{2212} \alpha v_{n[m-1]}^2 + A^{11} \alpha u_{n[m-2]} + \\ &\quad + (C^{1112} \alpha^2 - A^{12}) v_{n(m-2)}^1 + (C^{1212} \alpha^2 + A^{11}) v_{n(m-2)}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{nm}^5 &= -A^{22}u_{n[m-1]} + 2C^{1121}\alpha v_{n(m-1)}^1 + (C^{1112} + C^{2112})\alpha v_{n(m-1)}^2 + \\
 &\quad + A^{12}\alpha u_{n(m-2)} + (C^{1111}\alpha^2 + A^{22})v_{n[m-2]}^1 + (C^{1112}\alpha^2 + A^{12})v_{n[m-2]}^2, \\
 W_{nm}^6 &= A^{12}u_{n[m-1]} + (C^{1122} + C^{2112})\alpha v_{n(m-1)}^1 + 2C^{2212}\alpha v_{n(m-1)}^2 - \\
 &\quad - A^{11}\alpha u_{n(m-2)} + (C^{1112}\alpha^2 - A^{12})v_{n[m-2]}^1 + (C^{1212}\alpha^2 + A^{11})v_{n[m-2]}^2, \\
 &\quad n=0, 1.
 \end{aligned}$$

Rozwiązanie dla rozpatrywanego przykładu ma postać

$$u = \begin{cases} \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty \frac{(x^2)^m}{m!} (u_{0(m)} \cos \alpha x^1 + u_{0[m]} \sin \alpha x^1) d\alpha, & \text{jeśli } 0 \leq x^2 < x^2, \\ \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty \left[ \frac{(x^2)^m}{m!} (u_{0(m)} \cos \alpha x^1 + u_{0[m]} \sin \alpha x^1) + \right. \\ \left. + \frac{(x^2 - x^2)^m}{m!} (u_{1(m)} \cos \alpha x^1 + u_{1[m]} \sin \alpha x^1) \right] d\alpha, & \text{jeśli } 0 \leq x^2 < x^2, \\ v_K = \begin{cases} \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty \frac{(x^2)^m}{m!} (v_{0(m)}^K \cos \alpha x^1 + v_{0[m]}^K \sin \alpha x^1) d\alpha, & \text{jeśli } 0 \leq x^2 < x^2, \\ \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty \left[ \frac{(x^2)^m}{m!} (v_{0(m)}^K \cos \alpha x^1 + v_{0[m]}^K \sin \alpha x^1) + \right. \\ \left. + \frac{(x^2 - x^2)^m}{m!} (v_{1(m)}^K \cos \alpha x^1 + v_{1[m]}^K \sin \alpha x^1) \right] d\alpha, & \text{jeśli } 0 \leq x^2 < x^2. \end{cases} \end{cases}$$

Wyprowadzone związki rekurencyjne są poprawne dla pasm siatkowych o dowolnej strukturze, obciążonych siłą skupioną.

Rozpatrzmy teraz konkretną konstrukcję. Będzie nią pasmo siatkowe utworzone z dwóch prostopadłych rodzin belek o tych samych przekrojach i o osiach tworzących siatkę kwadratów.

W tym przypadku ([2], str. 163 w. 17.20)

$$C^{1111} = C^{2222} = S_1, \quad C^{1212} = C^{2121} = S_2, \quad A^{11} = A^{22} = \frac{12S_2}{l^2},$$

gdzie  $S_1$  i  $S_2$  są kolejno sztywnościami skręcania i zginania belek pasma, podzielonymi przez ich rozstaw  $l$ . Pozostałe składowe tensorów sztywności sprężystej są równe zeru.

Ze względu na symetrię ustroju i obciążenia względem płaszczyzny prostopadłej do  $x^1$  i przechodzącej przez  $x^2$  mamy

$$B_{[\alpha]}^1 = B_{[\alpha]}^2 = B_{(\alpha)}^3 = 0$$

oraz

$$u_{n[m]} = v_{n[m]}^1 = v_{n(m)}^2 = 0.$$

Dalej otrzymujemy

$$u_{n(0)} = v_{n(0)}^1 = v_{n[0]}^2 = 0, \quad u_{0(1)} = \frac{l^2}{12S_2} B_{(\alpha)}^1, \quad u_{1(1)} = -\frac{Pl^2}{12\pi S_2},$$

$$v_{0(1)}^1 = \frac{1}{S_2} B_{(\alpha)}^2, \quad v_{0[1]}^2 = \frac{1}{S_1} B_{[\alpha]}^3, \quad v_{1[1]}^1 = v_{1[1]}^2 = 0$$

oraz sześć bardzo prostych związków rekurencyjnych dla  $m \geq 2$ :

$$u_n(m) = v_{n(m-1)}^1 + \alpha^2 u_{n(m-2)} - \alpha v_{n[m-2]}^2,$$

$$v_{n(m)}^1 = -\frac{12}{l^2} u_{n(m-1)} + \left( \frac{S_1}{S_2} \alpha^2 + \frac{12}{l^2} \right) v_{n(m-2)}^1,$$

$$v_{n[m]}^2 = \frac{S_2}{S_1} \left[ -\frac{12}{l^2} \alpha u_{n(m-2)} + \left( \alpha^2 + \frac{12}{l^2} \right) v_{n[m-2]}^2 \right], \quad n=0, 1.$$

W tym przypadku stałe  $B_{(\alpha)}^1$ ,  $B_{(\alpha)}^2$ ,  $B_{[\alpha]}^3$  wyznacza się z trzech równań następujących:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{(L)^m}{m!} u_{0(m)} + \frac{(L-x^2)^m}{m!} u_{1(m)} \right] = 0,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{(L)^m}{m!} v_{0(m)}^1 + \frac{(L-x^2)^m}{m!} v_{1(m)}^1 \right] = 0,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{(L)^m}{m!} v_{0[m]}^2 + \frac{(L-x^2)^m}{m!} v_{1[m]}^2 \right] = 0,$$

gdzie  $L$  jest szerokością pasma. W zależności od żądanej dokładności należy uwzględnić kilka lub kilkanaście wyrazów w każdym równaniu.

Rozwiązanie zaś przyjmuje postać

$$u = \begin{cases} \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x^2)^m}{m!} u_{0(m)} \cos \alpha x^1 d\alpha, & \text{jeśli } 0 \leq x^2 < \frac{1}{x^2}, \\ \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{(x^2)^m}{m!} u_{0(m)} + \frac{(x^2 - \frac{1}{x^2})^m}{m!} u_{1(m)} \right] \cos \alpha x^1 d\alpha, & \text{jeśli } 0 \leq \frac{1}{x^2} < x^2; \end{cases}$$

$$v_1 = \begin{cases} \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x^2)^m}{m!} v_{0(m)}^1 \cos \alpha x^1 d\alpha, & \text{jeśli } 0 \leq x^2 < \frac{1}{x^2}, \\ \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{(x^2)^m}{m!} v_{0(m)}^1 + \frac{(x^2 - \frac{1}{x^2})^m}{m!} v_{1(m)}^1 \right] \cos \alpha x^1 d\alpha, & \text{jeśli } 0 \leq \frac{1}{x^2} < x^2; \end{cases}$$



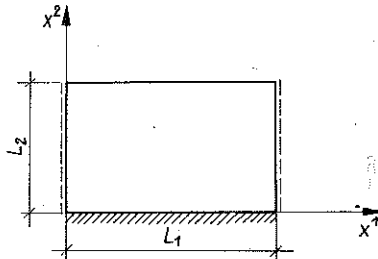
$$v_2 = \begin{cases} \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty \frac{(x^2)^m}{m!} v_{0[m]}^2 \sin \alpha x^1 d\alpha, & \text{jeśli } 0 \leq x^2 < x^2, \\ \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty \left[ \frac{(x^2)^m}{m!} v_{0[m]}^2 + \frac{(x^2 - x^2)^m}{m!} v_{1[m]}^2 \right] \sin \alpha x^1 d\alpha, & \text{jeśli } 0 \leq x^2 < x^2. \end{cases}$$

## 4. SIATKOWE ORTOTROPOWE PŁYTY PROSTOKĄTNE

Spośród płyt siatkowych spotykamy się najczęściej z płytami ortotropowymi, w których kierunki ortotropii pokrywają się z liniami parametrycznymi  $x^k = \text{const}$ . Dla takich płyt prostokątnych (rys. 2) układ (1.2) przyjmuje postać

$$(4.1) \quad \begin{aligned} & A^{11}(u_{,1} + v_2)_{,1} + A^{22}(u_{,2} - v_1)_{,2} + b = 0, \\ & C^{1111}v_{1,11} + C^{2121}v_{1,22} + (C^{1122} + C^{2112})v_{2,12} + A^{22}(u_{,2} - v_1) + H^1 = 0, \\ & C^{2222}v_{2,22} + C^{1212}v_{2,11} + (C^{1122} + C^{2112})v_{1,12} - A^{11}(u_{,1} + v_2) + H^2 = 0. \end{aligned}$$

Rozważania ograniczymy do płyt o dwóch przeciwległych krawędziach swobodnie podpartych i dowolnych dwóch pozostałych warunkach brzegowych.



Rys. 2

Równania (4.1) wraz z warunkami brzegowymi

$$\begin{aligned} & u(0, x^2) = u(L_1, x^2) = v_1(0, x^2) = v_1(L_1, x^2) = 0, \\ & C^{1212}v_{2,1}(0, x^2) + C^{1221}v_{1,2}(0, x^2) = C^{1212}v_{2,1}(L_1, x^2) + C^{1221}v_{1,2}(L_1, x^2) = 0, \\ & u(x^1, 0) = v_2(x^1, 0) = 0, \end{aligned}$$

sprowadza się do równań operatorowych

$$(4.2) \quad \begin{aligned} & A^{11}u'' + A^{22}s^2u - A^{23}sv_1 + A^{11}v_2' = -b + A^{22}u_{,2}(x^1, 0), \\ & A^{22}su - A^{22}v_1 + C^{1111}v_1'' + C^{2121}s^2v_1 + (C^{1122} + C^{2112})sv_2' = \\ & \quad \quad \quad = -H^1 + C^{2121}v_{1,2}(x^1, 0), \\ & -A^{11}u' + (C^{1122} + C^{2112})sv_1' - A^{11}v_2 + C^{1212}v_2'' + \\ & \quad \quad \quad + C^{2222}s^2v_2 = -H^2 + C^{2222}v_{2,2}(x^1, 0) \end{aligned}$$

z operatorowymi warunkami

$$(4.3) \quad \begin{aligned} u(0) &= u(L_1) = v_1(0) = v_1(L_1) = 0, \\ C^{1212}v_2'(0) + C^{1221}[sv_1(0) - v_1(0, 0)] &= \\ &= C^{1212}v_2'(L_1) + C^{1221}[sv_1(L_1) - v_1(L_1, 0)] = 0. \end{aligned}$$

Obciążenia wyrazimy w postaci pojedynczych szeregów operatorowych:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} b &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m \sin \alpha_m x^1, & H^1 &= \sum_{m=0}^{\infty} H_m^1 \sin \alpha_m x^1, \\ H^2 &= \sum_{m=0}^{\infty} H_m^2 \cos \alpha_m x^1, & \alpha_m &= \frac{m\pi}{L_1}, \end{aligned}$$

w których  $b_m, H_m^1, H_m^2$  są znanymi operatorami.

Rozwiązania zagadnienia brzegowego będziemy poszukiwali w postaci szeregów operatorowych

$$(4.5) \quad u = \sum_{m=0}^{\infty} u_m \sin \alpha_m x^1, \quad v_1 = \sum_{m=0}^{\infty} v_m^1 \sin \alpha_m x^1, \quad v_2 = \sum_{m=0}^{\infty} v_m^2 \cos \alpha_m x^1.$$

Funkcje operatorowe  $u, v_1$  i  $v_2$  przyjęte w postaci (4.5) spełniają warunki (4.3). Poza tym przyjmujemy

$$(4.6) \quad \begin{aligned} A^{22}u_{,2}(x^1, 0) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_m^1 \sin \alpha_m x^1, \\ C^{2121}v_{1,2}(x^1, 0) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_m^2 \sin \alpha_m x^1, \\ C^{2222}v_{2,2}(x^1, 0) &= \sum_{m=0}^m B_m^3 \cos \alpha_m x^1. \end{aligned}$$

Podstawiając (4.4), (4.5) i (4.6) do równań (4.2) dochodzimy do układu następujących równań operatorowych:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} [G_m^{ij}] \begin{bmatrix} u_m \\ v_m^1 \\ v_m^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_m^1 - b_m \\ B_m^2 - H_m^1 \\ B_m^3 - H_m^2 \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, 2, 3. \\ G_m^{11} &= -A^{11}\alpha_m^2 + A^{22}s^2, & G_m^{12} &= -A^{22}s, \\ G_m^{13} &= -A^{11}\alpha_m, & G_m^{21} &= A^{22}s, & G_m^{22} &= -A^{22} - C^{1111}\alpha_m^2 + C^{2121}s^2, \\ G_m^{23} &= -(C^{1122} + C^{2112})\alpha_m s, & G_m^{31} &= -A^{11}\alpha_m, \\ G_m^{32} &= (C^{1122} + C^{2112})\alpha_m s, & G_m^{33} &= -A^{11} - C^{1212}\alpha_m^2 + C^{2222}s^2. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$(4.8) \quad \begin{bmatrix} u_m \\ v_m^1 \\ v_m^2 \end{bmatrix} = [D_m^{ij}] \begin{bmatrix} B_m^1 - b_m \\ B_m^2 - H_m^1 \\ B_m^3 - H_m^2 \end{bmatrix},$$

gdzie

$$[D_m^{ij}] = [G_m^{ij}]^{-1}.$$

Przedstawienie rozwiązania w zwykłej nieoperatorowej postaci jest już elementarne. Istotnie,

$$(4.9) \quad D_m^{ij} = \frac{\Gamma_m^{ij}}{\det [G_m^{ij}]},$$

gdzie  $\Gamma_m^{ij}$  jest dopełnieniem algebraicznym elementu  $G_m^{ij}$  w macierzy  $[G_m^{ij}]$ . Wyznacznik  $\det [G_m^{ij}]$  jest wielomianem szóstego stopnia względem  $s$ , zawierającym tylko parzyste potęgi operatora różniczkowego.

Zatem w każdym przypadku można wyrażenie (4.9) rozłożyć na drodze elementarnej na ułamki proste, a następnie korzystając ze znanych wzorów rachunku operatorów [1] przedstawić otrzymane wyrażenia w postaci funkcji liczbowych.

Wprowadzając oznaczenia

$$D_m^{ij} = \{A_{(m)}^{ij}(x^2)\}, \quad \{A_{(m)}^{ij}(x^2)\} * \theta_j^m = \{A_{(m)}^i(x^2)\}$$

oraz

$$\begin{aligned} B_m^1 &= F_1^{(m)}, & B_m^2 &= F_2^{(m)}, & B_m^3 &= F_3^{(m)}, \\ b_m &= \theta_1^m, & H_m^1 &= \theta_2^m, & H_m^2 &= \theta_3^m, \end{aligned}$$

rozwiązanie można napisać w postaci

$$(4.10) \quad \begin{aligned} u &= \sum_{m=0}^{\infty} [A_{(m)}^{1j}(x^2) F_j^{(m)} - A_{(m)}^1(x^2)] \sin \alpha_m x^1, \\ v_1 &= \sum_{m=0}^{\infty} [A_{(m)}^{2j}(x^2) F_j^{(m)} - A_{(m)}^2(x^2)] \sin \alpha_m x^1, \\ v_2 &= \sum_{m=0}^{\infty} [A_{(m)}^{3j}(x^2) F_j^{(m)} - A_{(m)}^3(x^2)] \cos \alpha_m x^1. \end{aligned}$$

Stałe  $F_j^{(m)}$  ( $j=1, 2, 3$ ) wyznacza się z warunków brzegowych na krawędzi  $x^2=L_2$ .

To samo zagadnienie rozwiązano sposobem klasycznym w pracy [3]. Uzyskane tam rozwiązanie jest poprawne tylko dla obciążeń ciągłych ze względu na  $x^2$ .

Dysponując rozwiązaniem (4.10) poprawnym dla obciążeń nieciągłych oraz dla obciążeń skupionych, można bardzo łatwo otrzymać rozwiązania dla płyt ciągłych.

## 5. PŁYTY NA SPRĘŻYSTYM PODŁOŻU

Rozważania ograniczymy do płyt o warunkach brzegowych uwzględnionych w czwartym punkcie pracy, spoczywających na niejednorodnym jednoparametrowym sprężystym podłożu typu Winklera. Założymy przy tym, że współczynnik

podłoża jest funkcją tylko zmiennej  $x^2$ . Związki uzyskane w tym punkcie będą służyły do wyprowadzenia równań dla płyt ciągłych.

Płyta spoczywająca na sprężystym podłożu jest dodatkowo obciążona oddziaływaniami podłoża  $\bar{b}$  i  $\bar{H}^K$ . Dalej założymy, że  $\bar{H}^K=0$  oraz

$$(5.1) \quad \bar{b} = \frac{k(x^2)}{1+\mu} u,$$

gdzie  $k(x^2)$  jest parametrem podłoża, a  $\mu$  zależy od stosunku pola nieobciążonej bezpośrednio części podłoża pod płytą siatkową do pola części obciążonej. Rozważania ograniczymy tylko do takich płyt, dla których  $\mu$  jest wielkością stałą, niezależną od ugięcia.

Całkowite obciążenie płyty wynosi  $b - \bar{b}$ ,  $H^K$ . Nie znane na razie obciążenie  $\bar{b}$  przedstawiamy w postaci

$$(5.2) \quad \bar{b} = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{b}_m \sin \alpha_m x^1.$$

Na podstawie (4.10), (5.1) i (5.2) dochodzimy do równań całkowych typu Volterry drugiego rodzaju na wielkości  $\bar{b}_m$ :

$$(5.3) \quad \frac{k(x^2)}{1+\mu} \int_0^{x^2} \bar{b}_m(\omega) A_{(m)}^{11}(x^2-\omega) d\omega - \bar{b}_m = \frac{k(x^2)}{1+\mu} [A_{(m)}^1(x^2) - A_{(m)}^{1j}(x^2) F_j^{(m)}].$$

## 6. PŁYTY CIĄGŁE NA SPRĘŻYSTYCH PODPORACH POŚREDNICH

Przyjmijmy, że funkcja  $k(x^2)$  ma kształt

$$(6.1) \quad k(x^2) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x^2 \neq \overset{r}{x}^2, \\ k_r, & \text{jeśli } x^2 = \overset{r}{x}^2, \end{cases} \quad r=1, 2, \dots, R.$$

Przyjęcie funkcji  $k(x^2)$  w postaci (6.1) odpowiada płycie podpartej sprężystości wzdłuż linii  $x^2 = \overset{r}{x}^2$ .

Z (6.1) wynika, że w tym przypadku

$$(6.2) \quad \bar{b} = \sum_{r=1}^R \bar{b}^r h^{\overset{r}{x}^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r=1}^R \bar{b}_m^r h^{\overset{r}{x}^2} \sin \alpha_m x^1.$$

Podstawiając (6.2) do (5.3) oraz uwzględniając, że wielkości  $\bar{b}_m^r$  są operatorami liczbowymi, dochodzimy do równań

$$(6.3) \quad \frac{k(x^2)}{1+\mu} \sum_{r=1}^R \bar{b}_m^r A_{(m)}^{11}(x^2) h^{\overset{r}{x}^2} - \sum_{r=1}^R \bar{b}_m^r h^{\overset{r}{x}^2} = \frac{k(x^2)}{1+\mu} [A_{(m)}^1(x^2) - A_{(m)}^{1j}(x^2) F_j^{(m)}].$$

Wypisując równania (6.3) dla  $x^2 = \overset{r}{x}^2$  otrzymujemy układ algebraicznych równań liniowych na wielkości  $\bar{b}_m^r$ :

$$(6.4) \quad \sum_{n=1}^{r-1} \bar{b}_m^n A_{(m)}^{11}(x^{\overset{r}{x}^2} - x^{\overset{n}{x}^2}) - \frac{1+\mu_r}{k_r} \bar{b}_m^r = A_{(m)}^1(x^{\overset{r}{x}^2}) - A_{(m)}^{1j}(x^{\overset{r}{x}^2}) F_j^{(m)}.$$

W równaniach (6.4)  $\mu_r$  jest stosunkiem długości nieobciążonej bezpośrednio części podpory  $r$  pod płytą siatkową do długości części obciążonej.

Równania (6.4) wraz z równaniami uzyskanymi z warunków brzegowych na krawędzi  $x^2 = L_2$  pozwalają wyznaczyć wartości  $F_j^{(m)}$  oraz  $\bar{b}_m^r$ , a tym samym rozwiązać siatkową płytę ciągłą na sprężystych podporach.

Przedstawiony tu bardzo zwięźle sposób rozwiązywania siatkowych prostokątnych płyt ciągłych może być z korzyścią stosowany również do rozwiązywania siatkowych pasm ciągłych na sprężystych podporach.

Mimo że otrzymanie zamkniętych wzorów na wielkości  $u_m$ ,  $v_m^1$  i  $v_m^2$  z równań (4.7), jak wspomniano, jest zawsze możliwe, to i tu rachunki mogą okazać się uciążliwe. Wtedy również można szukać rozwiązań w postaci szeregów analogicznych do (2.1). W wielu przypadkach można w ten sposób znacznie uprościć rachunki.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. MIKUSIŃSKI, *Rachunek operatorów*, PWN, Warszawa 1957.
2. Cz. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1970.
3. B. BOCZKAJ, *Niektóre zagadnienia statyki rusztów mostowych*, Rozprawa Doktorska, Politechnika Łódzka, 1969.

#### Резюме

#### НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СТАТИКИ СЕТЧАТЫХ ПЛАСТИНОК

В работе дается решение краевой задачи, теории сетчатых пластинок для однородной произвольно поперечно нагруженной полосы с защепленными краями. Выводятся также уравнения для сетчатых сплошных пластинок, покоящихся на упругих промежуточных опорах. Эти вопросы решаются с помощью операторов Микусинского.

#### SUMMARY

#### CERTAIN PROBLEMS OF STATICS OF LATTICE PLATES

In the paper given is the solution of the boundary value problem of the lattice plates theory for a homogeneous strip loaded by arbitrary transverse load and clamped along the edges.

The equations are also derived for continuous plates supported on several elastic supports. The problems have been solved by means of the Mikusiński operator.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA W GLIWICACH

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 października 1971 r.