ROZPRAWY INŻYNIERSKIE, 20, 2, 241–251, 1972, Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk

OŚRODKI IDEALNIE-PLASTYCZNE POD DZIAŁANIEM OBCIĄŻEŃ WIELOPARAMETROWYCH

JÓZEF JOACHIM TELEGA (GLIWICE)

1. Wstęp

P. G. Hodge [2] rozważył idealnie-plastyczny ośrodek poddany niezależnym obciążeniom wieloparametrowym. Udowodnił on dwa twierdzenia będące uogólnieniem znanych z nośności granicznej twierdzeń o dolnej i górnej granicy obciążenia [3, 13 i 20]. Rodzina obciążeń, rozpatrzona w pracy [2], jest skończenie parametrowa. Okazuje się, iż w prosty sposób można uogólnić podane przez P. G. Hodge'a twierdzenia na przypadek nieskończenie parametrowej rodziny obciążeń. Zagadnienie to rozważymy w punkcie drugim. Uogólnienie powyższe traktujemy jako czysto formalne.

G. Sacchi i M. Save [9] podali nierówność charakteryzującą obciążenia graniczne (por. również [8]) materiału o niestowarzyszonym prawie płynięcia plastycznego (materiału niestandardowego), przy czym obciążenie jest jednoparametrowe. Uogólnieniem tej nierówności na przypadek obciążeń wieloparametrowych zajmiemy się w rozdziale trzecim.

W pracy [16] D. A. Hochfeld w sposób interesujący przedstawia zagadnienie dostosowywania się w przypadku zniszczenia przyrostowego. Otóż rozkłada on działające na ośrodek obciążenia na część stacjonarną (niezależną od czasu) i część zmienną zależną od czasu. Przy takim rozkładzie można twierdzeniom Melana i Koitera o dostosowywaniu się [3] nadać formę podobną do klasycznych twierdzeń o dolnej i górnej granicy obciążenia, co jest bardzo wygodne szczególnie w przypadku, gdy stosowane bywa programowanie matematyczne. Dalsze rozwinięcie tej idei jak i przykłady zastosowania programowania liniowego podane zostały w pracach [17, 18, 19 i 22].

Powstaje następujący problem: czy wobec «sprowadzalności» zagadnienia dostosowywania się (w przypadku zniszczenia przyrostowego) do twierdzeń o dolnej i górnej granicy obciążenia można sformułować twierdzenia analogiczne do tych, jakie w pracy [2] podał P. G. Hodge. Problem ten omówimy w punkcie czwartym.

Należy tutaj podkreślić, że powyższa problematyka dotyczy ośrodków zajmujących obszary skończone [10], a ponadto stanowi nawiązanie do prac [11 i 12].

2. Idealnie-plastyczne ośrodki pod działaniem nieskończenie parametrowej rodziny obciążeń

Przed uogólnieniem na przypadek nieskończenie parametrowej rodziny obciążeń podstawowych twierdzeń podanych przez P. G. Hodge'a [2] dla rodziny skończonej wydaje się rzeczą celową przypomnienie podstawowych założeń jego pracy.

2.1. Weźmy pod uwagę idealnie-plastyczny układ R o brzegu B. Oznaczmy przez Q_α, $\dot{q}_\alpha$, $\alpha=1,\ldots,r$ odpowiednio uogólnione naprężenia i uogólnione prędkości odkształceń. Niech układ będzie poddany m niezależnym uogólnionym siłom powierzchniowym $\mathbf{T}_k(\mathbf{x})$, $k=1,\ldots,m$ oraz $n-m$ uogólnionym siłom masowym $\mathbf{F}_l(\mathbf{x})$, $l=m+1,\ldots,n$ i odpowiednim warunkom brzegowym. Obszary działania sił $\mathbf{T}_k$ na B mogą się przecinać, być rozłączone lub pokrywać się.

Rozważmy układ pod obciążeniem całkowitym

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{T}(\mathbf{x},\boldsymbol{\rho}) = \sum_{1}^{m} \rho_k \mathbf{T}_k(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in B,\\
(2.1)\qquad &\\
&\mathbf{F}(\mathbf{x},\boldsymbol{\rho}) = \sum_{m+1}^{n} \rho_k F_k(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in R,
\end{aligned}
$$

gdzie ρ_k, $k=1,\ldots,n$ są niezależnymi mnożnikami obciążenia, wektor $\boldsymbol{\rho}=(\rho_1,\ldots,\rho_n)$ nazywać będziemy wektorem obciążenia.

Zdefiniujemy pojęcie stanu odpowiednio statycznie i kinematycznie dopuszczalnego.

Definicja 1. *Przez statycznie dopuszczalny stan naprężenia* rozumiemy pole naprężeń Q^0_α i wektor obciążenia $\boldsymbol{\rho}^0$ takie, że Q^0_α spełnia warunek plastyczności(¹) i jest w równowadze z obciążeniami określonymi zależnościami (2.1), przy czym $\boldsymbol{\rho}$ należy zastąpić przez $\boldsymbol{\rho}^0$.

Definicja 2. *Stan kinematycznie dopuszczalny* określony jest przez pole uogólnionych prędkości przemieszczeń $\mathbf{w}^*$ na B i $\mathbf{v}^*$ w R, przy czym spełnione są warunki ciągłości i kinematyczne warunki brzegowe. Pole prędkości odkształceń uogólnionych $\dot{q}^*_\alpha$ otrzymujemy z $\mathbf{v}^*$ stosując odpowiednie związki prędkości przemieszczeń — prędkości odkształceń.

Ze stowarzyszonego prawa plastycznego płynięcia otrzymujemy pole naprężeń Q^*_α. Określamy następnie wektor $\mathbf{E}^*=(E^*_1,\ldots,E^*_n)$ o współrzędnych

$$
\begin{aligned}
&E^*_k = \int_B \mathbf{T}_k \mathbf{w}^*\, dB, \qquad k=1,\ldots,m,\\
(2.2)\qquad &\\
&E^*_l = \int_R \mathbf{F}_l \mathbf{v}^*\, dR, \qquad l=m+1,\ldots,n,
\end{aligned}
$$

(¹) Oznacza to, że Q^0_α leży wewnątrz lub na powierzchni plastyczności (w przestrzeni naprężeń uogólnionych) ponadto żądamy, aby $\mathbf{v}^*$ i $\mathbf{w}^*$ były takie, że $\mathbf{E}^* \neq 0$. W przestrzeni obciążeń tzn. przestrzeni o osiach $\rho_1, ..., \rho_n$ definiujemy «kinematycznie dopuszczalną» płaszczyznę P, jako miejsce geometryczne wektorów $\boldsymbol{\rho}^*$ spełniających związek

$$\boldsymbol{\rho}^* \mathbf{E}^* = \int_R Q_\alpha^* \dot{q}_\alpha^* \, dR. \tag{2.3}$$

W ostatniej zależności zastosowaliśmy konwencję sumacyjną, z której w dalszych rozważaniach będziemy również korzystali.

Ze wzoru (2.3) widać, że $\boldsymbol{\rho}^*$ określa $n-1$ wymiarową hiperpłaszczyznę, która jest prostopadła do wektora $\mathbf{E}^*$.

Stosując zasadę mocy przygotowanych dla dowolnych kombinacji statycznie i kinematycznie dopuszczalnych stanów otrzymujemy

$$\int_R Q_\alpha^0 \dot{q}_\alpha^* \, dR = \int_B \mathbf{T}\mathbf{w}^* \, dB + \int_R \mathbf{F}\mathbf{v}^* \, dR = \sum_1^m \rho_k^0 \int_B \mathbf{T}_k \mathbf{w}^* \, dB + \sum_{m+1}^n \rho_k^0 \int_R \mathbf{F}_k \mathbf{v}^* \, dR. \tag{2.4}$$

Ze wzoru (2.4) uwzględniając (2.2), dostajemy

$$\int_R Q_\alpha^0 \dot{q}_\alpha^* \, dR = \boldsymbol{\rho}^0 \mathbf{E}^*. \tag{2.5}$$

Następnie określamy stan graniczny Q_α, $\dot{q}_\alpha$, jako stan zarówno statycznie jak i kinematycznie dopuszczalny. Spełniona jest wówczas nierówność

$$\boldsymbol{\rho}\mathbf{E} > 0. \tag{2.6}$$

Zbiór wektorów $\boldsymbol{\rho}$, określających stan graniczny, tworzy w przestrzeni obciążeń powierzchnię, którą nazwiemy powierzchnią graniczną. Możemy teraz sformułować twierdzenia będące uogólnieniem znanych z klasycznej nośności granicznej twierdzeń odpowiednio o dolnej i górnej granicy obciążenia.

TWIERDZENIE 1. (Uogólnione twierdzenie o dolnej granicy obciążenia). *Statycznie dopuszczalny stan naprężenia jest związany ze stanem obciążenia* $\boldsymbol{\rho}^0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\boldsymbol{\rho}^0$ *leży wewnątrz lub na powierzchni granicznej.*

TWIERDZENIE 2. (Uogólnione twierdzenie o górnej granicy obciążenia). *Kinematycznie dopuszczalny stan jest związany ze stanem obciążenia* $\boldsymbol{\rho}^*$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\boldsymbol{\rho}^*$ *leży na zewnątrz lub na powierzchni granicznej.*

P. G. HODGE [2] podał przykłady zastosowania twierdzeń 1 i 2 dla belki oraz płyty w przypadku obciążeń dwuparametrowych.

2.2. Powyższe twierdzenia łatwo uogólnić na przypadek nieskończenie parametrowej rodziny obciążeń. Zakładamy, że rodzina ta jest przeliczalna. Wzory (2.1) przyjmą odpowiednio postać

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\rho}_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{(1)} \mathbf{T}_k(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\rho}_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{(2)} \mathbf{F}_k(\mathbf{x}). \tag{2.7}$$

Zakładamy, że «wektory» $\boldsymbol{\rho}_1=(\rho_1^{(1)}, ..., \rho_n^{(1)}, ...)$, $\boldsymbol{\rho}_2=(\rho_1^{(2)}, ..., \rho_n^{(2}, ...)$ są elementami nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta l^2 (por. [1, 14 i 15]), tzn. $\boldsymbol{\rho}_1 \in l^2$, $\boldsymbol{\rho}_2 \in l^2$; natomiast wektor obciążenia $\boldsymbol{\rho}$ należy do iloczynu kartezjańskiego $l^2 \times l^2$, tzn. $\boldsymbol{\rho}=(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \in l^2 \times l^2$.

Definicje statycznie dopuszczalnego pola naprężeń uogólnionych jak i kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości uogólnionych pozostają bez zmian (definicje 1 i 2). Wektor $\mathbf{E}^*$ w tym przypadku jest zdefiniowany następująco:

$$\mathbf{E}^*=(\mathbf{E}^{(1)*}, \mathbf{E}^{(2)*}),$$

przy czym wektory $\mathbf{E}^{(1)*}=(E_1^{(1)*}, ..., E_n^{(1)*}, ...)$, $\mathbf{E}^{(2)*}=(E_1^{(2)*}, ..., E_n^{(2)*}, ...)$ mają współrzędne określone odpowiednio zależnościami

$$E_k^{(1)}=\int_B \mathbf{T}_k \mathbf{w}^* dB, \quad k=1,2,..., \qquad E_k^{(2)*}=\int_R \mathbf{F}_k \mathbf{v}^* dR, \quad k=1,2,.... \tag{2.8}$$

Podobnie jak poprzednio żądamy, aby $\mathbf{v}^*$ i $\mathbf{w}^*$ były takie, aby $\mathbf{E}^* \neq 0$. Można przyjąć, że $\mathbf{E}^{(1)*} \in l^2$, $\mathbf{E}^{(2)*} \in l^2$, gdyż w rzeczywistych układach moc nie może być nieskończona. Tak więc mamy $\mathbf{E}^* \in l^2 \times l^2$.

W przestrzeni obciążeń, zawartej w $l^2 \times l^2$, definiujemy kinematycznie dopuszczalną hiperpłaszczyznę [15] jako miejsce geometryczne wektorów $\boldsymbol{\rho}^*$ spełniających związek

$$[\boldsymbol{\rho}^*, \mathbf{E}^*]=\int_R Q_\alpha^* \dot{q}_\alpha^* dR, \tag{2.9}$$

gdzie [,] oznacza iloczyn skalarny w przestrzeni $l^2 \times l^2$.

Związek (2.5) przybierze postać

$$\int_R Q_\alpha^0 \dot{q}_\alpha^* dR=[\boldsymbol{\rho}^0, \mathbf{E}^*], \tag{2.10}$$

gdzie

$$\boldsymbol{\rho}^0=(\boldsymbol{\rho}_1^0, \boldsymbol{\rho}_2^0) \in l^2 \times l^2.$$

Stan graniczny określony jest nierównością

$$[\boldsymbol{\rho}, \mathbf{E}] > 0. \tag{2.11}$$

Można wykazać, że «powierzchnia» graniczna, którą definiujemy podobnie jak poprzednio, jest powierzchnią wypukłą (tzn. brzegiem obszaru wypukłego) w przestrzeni $l \times l$. Tak więc przytoczone poprzednio twierdzenia 1 i 2 dla nieskończenie parametrowej rodziny obciążeń pozostają zachowane.

3. Materiały o niestowarzyszonym prawie płynięcia

Materiały, których zachowanie się (pod działaniem obciążeń wielo-parametrowych) rozważaliśmy, należą do klasy materiałów o stowarzyszonym prawie płynięcia, tzn. takich, dla których potencjał plastyczny jest określony warunkiem plastyczności. Materiały, dla których to nie zachodzi, noszą nazwę materiałów o niestowarzyszonym prawie płynięcia albo materiałów niestandardowych [9].

Załóżmy, że powierzchnia $g=0$, określająca potencjał plastyczny dla materiału M o niestowarzyszonym prawie płynięcia, jest całkowicie wpisana w powierzchnię plastyczności $f=0$, przy czym obydwie te powierzchnie są wypukłe. Oznaczmy odpowiednio przez F i G ośrodki o stowarzyszonych prawach płynięcia określonych odpowiednio przez f i g. Jeśli ośrodek M poddany jest obciążeniu jednoparametrowemu, to [9] (por. również [8])

$$\rho^G \leqslant \rho^M \leqslant \rho^F, \tag{3.1}$$

gdzie ρ^G, ρ^F i ρ^M oznaczają odpowiednio intensywność obciążenia granicznego dla materiału G, F i M.

Rozpatrzmy z kolei przypadek ogólniejszy, kiedy ośrodek M poddany jest obciążeniom wieloparametrowym określonym związkami (2.1). Dla materiałów F i G możemy zastosować wyniki otrzymane przez P. G. HODGE'A [2], czyli przytoczone przez nas w punkcie drugim twierdzenia 1 i 2. Otrzymamy w przestrzeni obciążeń dwie wypukłe powierzchnie graniczne. Powierzchnia graniczna odpowiadająca materiałowi G będzie wpisana w pewierzchnię odpowiadającą materiałowi F, gdyż pole naprężeń odpowiadające stanowi granicznemu materiału G jest polem statycznie dopuszczalnym dla materiału F.

Załóżmy, iż zmieniamy tylko i-ty mnożnik obciążenia, natomiast pozostałych $n-1$ jest ustalonych. Wówczas zgodnie z nierównością (3.1) otrzymujemy

$$\rho_i^G \leqslant \rho_i^M \leqslant \rho_i^F. \tag{3.2}$$

Ponieważ i było dowolne, więc

$$\boldsymbol{\rho}^G \leqslant \boldsymbol{\rho}^M \leqslant \boldsymbol{\rho}^F, \tag{3.3}$$

przy czym w ostatniej zależności nierówności należy rozumieć w sensie nierówności współrzędnych. Z nierówności (3.3) wynika, że wektor obciążenia $\boldsymbol{\rho}^M$, określający stan graniczny materiału M o niestowarzyszonym prawie płynięcia, leży pomiędzy powierzchniami granicznymi materiałów G i F.

4. Przyrostowe zniszczenie materiałów sprężysto-idealnie-plastycznych

Klasyczne twierdzenia MELANA i KOITERA [3] o dostosowywaniu się były już w różnoraki sposób uogólniane i przekształcane do postaci bardziej nadającej się do obliczeń praktycznych [4–7, 11, 12 i 21].

D. A. HOCHFELD [16] rozważając kinematyczne twierdzenie o dostosowywaniu się, czyli twierdzenie Koitera, zaproponował rozkładanie obciążeń działających na ośrodek na część stacjonarną od czasu niezależną, i zmienną, zależną od czasu. Przy tym założeniu twierdzenie Koitera przyjmuje postać twierdzenia o górnej granicy obciążenia [13].

W pracach [17 i 19] metodę rozkładu obciążeń zastosowano do statycznego twierdzenia o dostosowywaniu się, tzn. twierdzenia Melana. Okazuje się, iż w tym przypadku twierdzenie Melana przechodzi w twierdzenie o dolnej granicy obciążenia.

Rozkład obciążenia na części stacjonarną i zmienną ma zasadniczo sens dla zniszczenia przyrostowego, gdyż w przypadku przemiennej plastyczności fikcyjna powierzchnia plastyczności degeneruje się np. do punktu [16, 17 i 19].

Ogólnie można powiedzieć, że zagadnienie dostosowywania się w przypadku zniszczenia przyrostowego można sprowadzić do twierdzeń o dolnej i górnej granicy obciążenia, przy czym należy obciążenie rzeczywiste zastąpić obciążeniem stacjonarnym, a rzeczywistą powierzchnię plastyczności — powierzchnią fikcyjną. Nasuwa się więc pytanie co do możliwości uogólnienia wyników otrzymanych przez P. G. HODGE'A [2] właśnie na takie zagadnienie dostosowywania się. Problem ten obecnie rozważymy.

Niech sprężysto-idealnie-plastyczny ośrodek będzie poddany obciążeniom stacjonarnym określonym związkami (2.1). Zmodyfikujemy określenie naprężeń uogólnionych oraz zdefiniujemy uogólnione przyrosty odkształceń (por [13], rozdz. X).

DEFINICJA 3. *Uogólnionymi naprężeniami* $\overline{Q}_\alpha$, $\alpha=1, ..., r$, nazwiemy te siły wewnętrzne lub ich kombinacje, które wchodzą do warunku określającego fikcyjną powierzchnię plastyczności $\Phi(\overline{Q}_\alpha)=0$.

DFINICJA 4. *Uogólnionymi przyrostami* odkształceń nazwiemy takie wielkości Δq_α, które pozwalają przedstawić przyrost pracy plastycznej D po wykonaniu cyklu w postaci

$$D=\sigma_{ij*}\Delta\varepsilon''_{ij0}=\overline{Q}_\alpha\Delta q_\alpha, \tag{4.1}$$

gdzie

$$\Delta\varepsilon''_{ij0}=\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_{ij*}} \tag{4.2}$$

przy czym φ oznacza funkcję określającą fikcyjną powierzchnię plastyczności w przestrzeni naprężeń, $\Delta\varepsilon''_{ij0}$ przyrosty odkształceń plastycznych po wykończeniu cyklu [16, 17 i 19].

Zmodyfikujemy z kolei definicje 1 i 2.

DEFINICJA 5. *Przez statycznie dopuszczalny stan naprężeń uogólnionych* rozumieć będziemy pole uogólnionych naprężeń $\overline{Q}^0_\alpha$ i wektor obciążenia $\mathbf{p}^0$ takie, że $\overline{Q}^0_\alpha$ spełnia fikcyjny warunek plastyczności i jest w równowadze ze stacjonarnymi obciążeniami określonymi związkami (2.1); w związkach tych $\mathbf{p}$ należy zastąpić przez $\mathbf{p}^0$.

DEFINICJA 6. *Kinematycznie dopuszczalny stan przyrostów przemieszczeń* jest określony przez pole uogólnionych przyrostów przemieszczeń $\Delta\mathbf{w}^*$ na B i $\Delta\mathbf{v}^*$ w R, przy czym spełnione są warunki ciągłości i kinematyczne warunki brzegowe.

Z kinematycznie dopuszczalnego pola przyrostów przemieszczeń otrzymujemy pole przyrostów uogólnionych odkształceń Δq^*_α. Stosując stowarzyszone prawo płynięcia dla fikcyjnej powierzchni plastyczności Φ,

$$\Delta q_\alpha=\Lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\overline{Q}_\alpha}, \tag{4.3}$$

otrzymujemy pole naprężeń uogólnionych które oznaczymy przez $\overline{Q}^*_\alpha$.

Definiujemy współrzędne wektora $\mathbf{E}^*$ w następujący sposób:

$$
(4.4)\qquad
\begin{aligned}
E_k^* &= \int_B \mathbf{T}_k \Delta \mathbf{w}^* \, dB, \qquad k=1,\dots,m,\\
E_l^* &= \int_R \mathbf{F}_l \Delta \mathbf{v}^* \, dR, \qquad k=m+1,\dots,n.
\end{aligned}
$$

przy czym żądamy, aby $\mathbf{E}^* \neq 0$.

W przestrzeni obciążeń określamy «kinematycznie dopuszczalną» płaszczyznę π jako miejsce geometryczne wektorów $\boldsymbol{\rho}^*$, spełniających związek

$$
(4.5)\qquad \boldsymbol{\rho}^* \mathbf{E}^* = \int_R \overline{Q}_\alpha^* \Delta q_\alpha^* \, dR.
$$

Rozumując podobnie jak przy wyprowadzaniu wzoru (2.5) otrzymujemy

$$
(4.6)\qquad \int_R \overline{Q}_\alpha^0 \Delta q_\alpha^* \, dR = \boldsymbol{\rho}^0 \mathbf{E}^*.
$$

Podobnie jak w rozdziale drugim wprowadzamy pojęcie stanu granicznego. W rozważanym przez nas przypadku stan ten jest określony przez naprężenia uogólnione $\overline{Q}_\alpha$ i przyrosty odkształceń uogólnionych Δq_α, przy czym spełnione są wymagania zarówno strony statycznej jak i kinematycznej. Zachodzi wówczas związek

$$
(4.7)\qquad \boldsymbol{\rho}\mathbf{E} > 0.
$$

Zbiór wektorów $\boldsymbol{\rho}$, określających stan graniczny, tworzy w przestrzeni obciążeń powierzchnię, którą nazwiemy powierzchnią dostosowania.

Z postulatu Druckera [3, 13 i 20] otrzymujemy

$$
(4.8)\qquad (\overline{Q}_\alpha - \overline{Q}_\alpha^0)\Delta q_\alpha \geqslant 0, \qquad (\overline{Q}_\alpha^* - \overline{Q}_\alpha)\Delta q_\alpha^* \geqslant 0.
$$

Całkując funkcję $(4.8)_1$ i uwzględniając wzór (4.5) otrzymujemy

$$
(4.9)\qquad (\boldsymbol{\rho}^* - \boldsymbol{\rho})\mathbf{E}^* \geqslant 0.
$$

Twierdzenia o dostosowywaniu się, w przypadku zniszczenia przyrostowego, sformułujemy w terminach przestrzeni obciążeń.

TWIERDZENIE 3. *Statycznie dopuszczalny stan naprężeń uogólnionych jest związany z wektorem obciążenia $\boldsymbol{\rho}^0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\boldsymbol{\rho}^0$ leży wewnątrz lub na powierzchni dostosowania.*

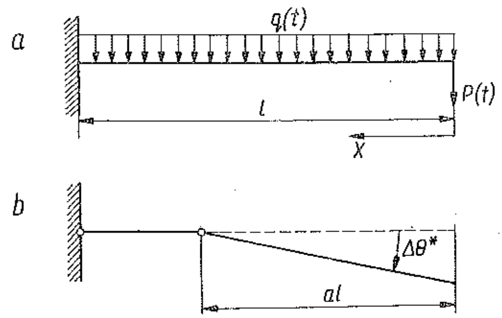
Twierdzenie to jest zmodyfikowaną postacią twierdzenia Melana w przypadku zniszczenia przyrostowego.

TWIERDZENIE 4. *Stan kinematycznie dopuszczalny jest związany ze stanem obciążenia $\boldsymbol{\rho}^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\boldsymbol{\rho}^*$ nie leży wewnątrz powierzchni dostosowania.*

Jest to zmodyfikowana postać twierdzenia Koitera.

Dowody powyższych twierdzeń są analogiczne do dowodów przeprowadzonych przez P. G. HODGE'A [2], dlatego też nie zostały tutaj podane.

Uwaga 1. Jeśli wektor obciążenia ρ leży na powierzchni dostosowania, to fakt ten oznacza, iż nastąpił przyrost odkształceń plastycznych (cykl graniczny [16, 17 i 19]). Jak wiadomo, przyrosty te mogą nastąpić tylko w skończonej liczbie cykli (aby układ dostosował się). Jeśli wektor ρ leży wewnątrz powierzchni dostosowania, to reakcja układu jest sprężysta.



Rys. 1

Uwaga 2. Rozumując podobnie jak w punkcie drugim, można zbudować «powierzchnię» dostosowania dla nieskończenie parametrowej rodziny obciążeń.

Przykład 1. Rozpatrzmy belkę przedstawioną na rys. 1a (por. [2], rys. 2). Niech quasi-statyczne obciążenia $q(t)$, $P(t)$ mają postać

$$
\begin{aligned}
&q(t) = q^c + q^v(t), \qquad -\Delta q \leqslant q^v(t) \leqslant \Delta q, \qquad \Delta q > 0\,;\\
&P(t) = P^c + P^v(t), \qquad 0 \leqslant P^v(t) \leqslant \Delta P, \qquad \Delta P > 0,
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

gdzie q i P są to obciążenia stacjonarne, q (t), P (t) — obciążenia zmienne. Proste rachunki wykazują, że ekstremalne wartości momentów zginających M^+ i M^- od obciążeń $q^v(t)$, $P^c(t)$ wynoszą

$$
M^+ = \max_{t \in T} M^v(t) = \frac{\Delta q l^2}{2}, \quad M^- = \min_{t \in T} M^v(t) = -\frac{\Delta q l^2}{2} - \Delta P l,
\tag{4.11}
$$

przy czym T oznacza czas trwania cyklu.

Fikcyjny warunek plastyczności ma postać

$$
-M_0 - M^- \leqslant \bar{M} \leqslant M_0 - M^+,
\tag{4.12}
$$

gdzie M_0 oznacza moment graniczny. Wprowadzając oznaczenia

$$
M_0^- \overset{\mathrm{df}}{=} -M_0 + \frac{\Delta q l^2}{2} + \Delta P l, \qquad M_0^+ \overset{\mathrm{df}}{=} M_0 - \frac{\Delta q l^2}{2}
\tag{4.13}
$$

napiszemy warunek (4.12) następująco:

$$
M_0^- \leqslant \bar{M} \leqslant M_0^+.
\tag{4.14}
$$

Ponieważ interesuje nas zniszczenie przyrostowe, więc wystarczy przyjąć

$$
-M_0 + \frac{\Delta q l^2}{2} + \Delta P l < 0,
\tag{4.15}
$$

gdyż z ostatniej zależności otrzymujemy

$$
0 < \Delta P l < M_0 - \frac{\Delta q l^2}{2} = M_0^+
$$

co oznacza, iż powierzchnia plastyczności (fikcyjna) nie degeneruje się do punktu.

Rozważmy obecnie statyczną metodę wyznaczania powierzchni dostosowania (twierdzenie 3). W tym celu należy rozpatrzeć zachowanie się belki pod obciążeniem $\rho_1 P^c$ i $\rho_2 q^c$. Przyjmijmy oznaczenia

$$M_0^+ = \nu_1 M_0, \quad 0 < \nu_1 < 1, \qquad M_0^- = \nu_2 M_0, \quad -1 < \nu_2 < 0 \tag{4.16}$$

oraz wprowadźmy następujące wielkości bezwymiarowe:

$$m^0 = \frac{\bar{M}}{M_0}, \quad x = \frac{X}{l}, \quad \tilde{q}^c = \frac{q^v l^2}{2M_0}, \quad p^c = \frac{P^c l}{M_0}. \tag{4.17}$$

Tym samym zagadnienie zostało sprowadzone do belki o długości jednostkowej ($0 \leqslant x \leqslant 1$) poddanej obciążeniom $\rho_1 p^c$ i $\rho_2 \tilde{q}^c$. Dla prostoty można przyjąć, że

$$p^c = \tilde{q}^c = 1. \tag{4.18}$$

Równanie równowagi i fikcyjny warunek plastyczności mają obecnie odpowiednio postać

$$m^0(x) = -\rho_1^0 x - \rho_2^0 x^2, \qquad \nu_2 \leqslant m^0(x) \leqslant \nu_1. \tag{4.19}$$

Wzory (4.19) określają statycznie dopuszczalne pole momentów (definicja 5). Rozumując podobnie jak P. G. Hodge [2], otrzymujemy nierówności określające powierzchnię dostosowania:

$$\begin{gathered} -\nu_1 \leqslant \rho_1^0 + \rho_2^0 \leqslant -\nu_2; \\ \rho_0^2 \geqslant \frac{1}{4\nu_1} (\rho_1^0)^2 \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant -\rho_1^0 \leqslant 2\rho_2^0; \\ \rho_2^0 \leqslant \frac{1}{4\nu_2} (\rho_1^0)^2 \quad \text{dla} \quad 0 \geqslant -\rho_1^0 \geqslant 2\rho_2^0. \end{gathered} \tag{4.20}$$

Powierzchnia dostosowania, czyli brzeg obszaru wypukłego określonego nierównościami (4.20), została przedstawiona na rys. 2.

Metoda kinematyczna jest oparta na twierdzeniu 4. W celu zastosowania tego twierdzenia należy określić klasę mechanizmów zniszczenia. Przyjmiemy za P. G. Hodge'em [2] klasę przedstawioną na rys. 1b. Korzystając z definicji 6, wzorów (4.4_1), $(4.17)_3$, $(4.17)_4$ i (4.18) otrzymujemy współrzędne wektora

$$\mathbf{E}^* = M_0 \Delta\Theta^*(a, a^2), \qquad 0 \leqslant a \leqslant 1. \tag{4.21}$$

Korzystając następnie ze wzorów (4.5), (4.9) i (4.21) otrzymujemy

$$-\nu_1 M_0 \Delta\Theta^* \leqslant M_0 \Delta\Theta^*(\rho_1 a + \rho_2 a^2) \leqslant -\nu_2 M_0 \Delta\Theta^*,$$

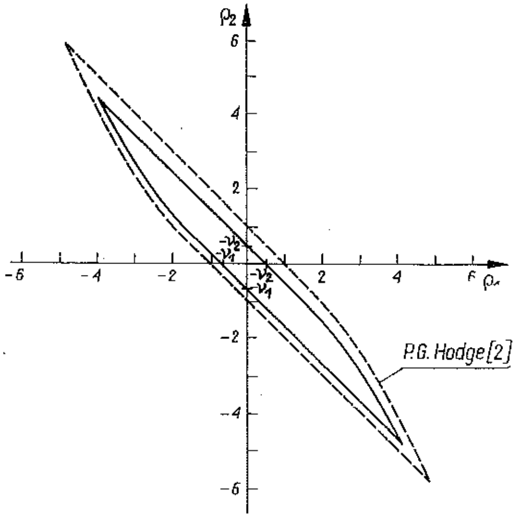
czyli ostatecznie

$$-\nu_1 \leqslant \rho_1 a + \rho_2 a^2 \leqslant -\nu_2. \tag{4.22}$$

Nierówności (4.20) i (4.22) wyznaczają na płaszczyźnie ρ_1, ρ_2 ten sam obszar. Wynika stąd, że powierzchnie dostosowania, otrzymane metodą statyczną i kinematyczną, pokrywają się (rozwiązanie dokładne).

5. Uwagi końcowe

Przeprowadzone w pracy rozważania są poprawne dla obszarów skończonych, gdyż dla obszarów nieskończonych już nawet w przypadku obciążeń jednoparametrowych sprawa nieco się komplikuje, jak to wykazali E. M. Shoemaker i W. P. Chen [10].



Rys. 2

Zastosowanie parametrycznego programowania matematycznego, metody elementów skończonych oraz algorytmów rozwiązujących układy nierówności liniowych do zmodyfikowania twierdzeń o dostosowywaniu się zostanie podane w następnych pracach. Pewne przykłady szczególne można już jednak znaleźć w pracach [18, 19 i 22], dotyczą one jednak zastosowania tylko programowania liniowego przy wykorzystaniu metody różnic skończonych. Przykłady te dotyczą płyt kołowych i powłok obrotowych, przy czym uwzględniono niestacjonarne pola temperaturowe. W naszych rozważaniach ograniczyliśmy się do zagadnień izotermicznych.

Literatura cytowana w tekście

1. A. Aleksiewicz, *Analiza funkcjonalna*, PWN, Warszawa 1969.
2. P. G. Hodge, *Limit analysis with multiple load parameters*, Int. J. Solids Structures, **6**, 661–675, 1970.
3. W. T. Koiter, *General theorems for elastic-plastic solids*, Progress Solid Mechanics, North Holland, 166–221, Amsterdam 1960.
4. L. Konieczny, *Teoria przystosowywania się belek*, Mech. Teor. Stos., **8**, 3, 256–276, 1970.
5. J. A. König, *Theory of shake-down of elastic-plastic structures*, Arch. Mech. Stos., **17**, 2, 227–238, 1966.
6. J. A. König, *Shakedown theory of plates*, Arch. Mech. Stos., **21**, 5, 623–637, 1969.
7. J. A. König, *Podstawowe twierdzenia z zakresu teorii dostosowywania się konstrukcji sprężysto-plastycznych do obciążeń zmiennych w czasie*, Mech. Teor. Stos., **8**, 2, 149–158, 1970.

8. A. C. PALMER, *A limit theorem for materials with non-associated flow laws*, Journal de Mécanique, **5**, 2, 217–222, 1966.
9. G. SACCHI, M. SAVE, *A note on the limit loads of non-standard materials*, Meccanica, **3**, 1, 43–45, 1968.
10. E. M. SHOEMAKER, W. P. CHEN, *On uniqueness of the limit load for unbounded regions*, Arch. Mech. Stos., **21**, 5, 679–689, 1969.
11. J. J. TELEGA, *Zastosowanie programowania liniowego do wyznaczania nośności granicznej konstrukcji* [przegląd prac], Mech. Teor. Stos., **9**, 1, 7–52, 1971.
12. J. J. TELEGA, *O niektórych uogólnieniach twierdzeń nośności granicznej dla ośrodka Cosseratów*, Mech. Teor. Stos. [praca przesłana do Redakcji].
13. *Teoria plastyczności*, praca zbiorowa pod redakcją W. OLSZAKA, P. PERZYNY, A. SAWCZUKA, PWN, Warszawa 1965.
14. K. YOSIDA, *Functional analysis*, Springer-Verlag, 1968.
15. Б. З. Вулих, *Введение в функциональный анализ*, Москва 1967.
16. Д. А. Гохфельд, *Некоторые задачи теории приспособляемости пластин и оболочек*, Труды VI Всес. Конф. по Теории Оболочек и Пластинок, 284–291, Москва 1966.
17. Д. А. Гохфельд, О. Ф. Чернявский, *Обобщенные переменные в задачах приспособляемости пластинок и оболочек*, Труды VII Всес. Конф. по Теории Оболочек и Пластинок, 194–200, Москва 1970.
18. Д. А. Гохфельд, О. Ф. Чернявский, *Применение методов линейного программирования к задачам приспособляемости в кинематической формулировке*, Тепловые Напр. в Эл. Констр., вып. 9, 273–283, Киев 1970.
19. Д. А. Гохфельд, О. Ф. Чернявский, *Об определении условий прогрессирующего разрушения в осесимметричных задачах приспособляемости методом линейного программирования*, Мех. Тв. Тела, № 3, 96–104, 1970.
20. Л. М. Качанов, *Основы теории пластичности*, Москва 1969.
21. В. И. Розенблюм, *К анализу приспособляемости неравномерно нагретых упруго-пластических тел*, ПМТФ, № 5, 98–101, 1965.
22. О. Ф. Чернявский, *Несущая способность идеально-пластической конической оболочки при теплосменах*, Тепл. Напр. в Эл. Констр. вып. 10, 66–72, Киев 1970.

Резюме

ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКИЕ СРЕДЫ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

Работа является попыткой обобщения теорем П. Г. Ходжа [2] на: 1) случай бесконечного семейства нагрузок, 2) среды с неассоциированным законом текучести, 3) вопрос приспособляемости для случая прогрессирующего разрушения.

Summary

PERFECTLY PLASTIC MEDIA ACTED UPON BY MULTI-PARAMETER LOADS

The paper represents an attempt of generalization of the theorems given by P. G. Hodge [2] to 1) an infinite family of loadings, 2) the media with non-associated law of plastic flow, 3) the problems of shake-down in the case of incremental collapse.

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 września 1971 r.