ROZPRAWY INŻYNIERSKIE, 20, 2, 233–240, 1972, Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk

PEWNA KLASA ROZWIĄZAŃ ZAGADNIENIA TRÓJWYMIAROWEGO DLA MATERIAŁU SZTYWNO-IDEALNIE PLASTYCZNEGO Z RODZINĄ CHWILOWO NIEROZCIĄGLIWYCH PŁASZCZYZN

WIKTOR GAMBIN (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

W pracach [1 i 2] rozpatrzono kinematykę dowolnego nieściśliwego ośrodka ciągłego, zawierającego jednoparametrową rodzinę $\mathcal{L}$ chwilowo nierozciągliwych płaszczyzn. Istnienie w ośrodku rodziny $\mathcal{L}$ było własnością definiującą ruch tego ośrodka. Pokazano tam, że stan prędkości deformacji dla takiego ruchu w każdym punkcie $\mathbf{x}$ i chwili t jest czystym ścinaniem. Szczegółowo przedyskutowano przypadek, gdy kierunek ścinania $\mathbf{l}$, wersor $\mathbf{k}$ normalny do płaszczyzny z $\mathcal{L}$ i wersor $\mathbf{m}=\mathbf{k}\times\mathbf{l}$, tworzą unormowaną bazę pewnego układu trójortogonalnego.

W dalszym ciągu taki ruch nazywać będziemy ruchem o własności Ω. Powierzchniami tworzącymi wspomniany układ trójortogonalny były: chwilowo nierozciągliwe płaszczyzny rodziny $\mathcal{L}$, chwilowo nierozciągliwe powierzchnie rozwijalne lub obrotowe rodziny $\mathcal{M}$ oraz chwilowo wzajemnie nieprzesuwne (tzn. takie, na których w danej chwili t znika rzut tensora prędkości deformacji na wersor normalny) powierzchnie rodziny $\mathcal{K}$. Dla omówionych ruchów podano wzory, określające postać pól prędkości lub pozwalające tę postać wyznaczyć z warunków, które powinny spełniać pola prędkości.

Powstaje pytanie, czy ruchy o własności Ω realizują się dla jakichś materiałów nieściśliwych. Załóżmy, że tak jest dla pewnego ruchu tego typu i pewnego konkretnego materiału. Funkcja opisująca ruch za pomocą równań konstytutywnych wchodzi do lewej strony równań ruchu, przy czym z prawej strony tych równań figuruje jej druga pochodna względem czasu. Z reguły w wyniku takiego podstawienia otrzymamy nadokreślony układ trzech operatorowych równań skalarnych. Tak będzie np. w przypadku cieczy lepkich nieściśliwych: newtonowskich i nienewtonowskich. Z warunków niesprzeczności tego układu trzech równań skalarnych wynikną więc dodatkowe więzy nałożone na kinematykę badanego ośrodka.

Praca niniejsza jest ilustracją omówionej drogi postępowania, przedstawionej na przykładzie materiału Levy'ego-Misesa. W dalszym ciągu nazywać go będziemy materiałem sztywno-idealnie plastycznym.

W p. 2 pracy podamy twierdzenie o dopuszczalnych ruchach o własności Ω dla tego materiału, a w p. 3 szczegółowo przedyskutujemy, odpowiadające tym ruchom, pola tensora naprężenia. W wyniku otrzymamy jako szczególne przypadki znalezionych stanów naprężenia ważne, znane klasy rozwiązań dla materiału sztywno-idealnie plastycznego. Są to rozwiązania opisujące skręcanie prętów kołowych o zmiennym przekroju i skręcanie wycinków pierścieni o przekroju dowolnym.

W p. 4 przedstawimy próbę klasyfikacji szeregu znanych rozwiązań teorii idealnej plastyczności jako tych, dla których ruchy mają własność Ω.

2. Dopuszczalne ruchy o własności Ω materiału sztywno-idealnie plastycznego

Dla izotropowego materiału sztywno-idealnie plastycznego są spełnione lokalnie: prawo zachowania pędu

$$\operatorname{div}\mathbf{T}+\rho\mathbf{b}=\rho\left[\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+(\operatorname{grad}\mathbf{V})\mathbf{V}\right], \tag{2.1}$$

prawo płynięcia

$$\mathbf{D}^*=\lambda\mathbf{T}^*, \qquad \lambda(\mathbf{x},t)\geqslant 0, \tag{2.2}$$

warunek plastyczności

$$\operatorname{tr}(\mathbf{T}^*\mathbf{T}^*)=2k^2 \tag{2.3}$$

oraz warunek nieściśliwości

$$\operatorname{tr}\mathbf{D}\equiv\operatorname{div}\mathbf{V}=0. \tag{2.4}$$

W równaniach tych $\mathbf{T}(\mathbf{x},t)$ oznacza pole tensorowe naprężeń, $\mathbf{V}(\mathbf{x},t)$ pole wektorowe prędkości cząstek, ρ gęstość, $\mathbf{b}$ pole wektorowe sił masowych, $\mathbf{D}=\frac{1}{2}[\operatorname{grad}\mathbf{V}+(\operatorname{grad}\mathbf{V})^T]$ pole tensorowe prędkości odkształceń, $\mathbf{T}^*\equiv\mathbf{T}-\frac{1}{3}(\operatorname{tr}\mathbf{T})\mathbf{1}$, $\mathbf{D}^*\equiv\mathbf{D}-\frac{1}{3}(\operatorname{tr}\mathbf{D})\mathbf{1}$, $\mathbf{x}$ promień wodzący z ustalonego punktu przestrzeni, t czas, $\lambda(\mathbf{x},t)$ pewną funkcję skalarną niezerową dla ruchu w strefie plastycznej, a przyjmującą wartość zero w strefie sztywnej oraz k stałą materiałową.

Przyjmiemy założenie, że siły inercji i siły masowe są małe; założenia te są nieistotne z punktu widzenia sposobu prowadzenia dalszych rozważań, ale za to znacznie je upraszczają.

Równanie (2.1) napiszemy więc w postaci

$$\operatorname{div}\mathbf{T}=0. \tag{2.5}$$

Załóżmy teraz, że materiał znajduje się w ruchu o własności Ω sprzężonym z układem trójortogonalnym $\{s,\alpha,\beta\}$ o bazie $\mathbf{e}_s$, $\mathbf{e}_\alpha$, $\mathbf{e}_\beta$ i parametrach Lamégo h_s, h_α, h_β. Będziemy zatem mieli

$$\mathbf{D}=D(\mathbf{e}_\alpha\otimes\mathbf{e}_s+\mathbf{e}_s\otimes\mathbf{e}_\alpha), \tag{2.6}$$

gdzie $D=D(s,\alpha,\beta,t)$ jest dowolną funkcją wskazanych argumentów, $\mathbf{e}_s/h_s$ polem wersorów normalnych do płaszczyzn rodziny $\mathcal{L}$, a $\mathbf{e}_\alpha/h_\alpha$ polem kierunków ścinania na każdej z tych płaszczyzn.

Z prawa płynięcia (2.2) i warunku plastyczności otrzymujemy

$$\mathbf{T} = \sigma \mathbf{1} + (\nu k)(\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_s + \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_\alpha), \tag{2.7}$$

gdzie $\sigma = \sigma(\mathbf{x}, t)$ jest zmiennym ciśnieniem hydrostatycznym, a $\nu = \operatorname{sgn} D$.

Poszukiwanymi przez nas wielkościami opisującymi stan naprężenia są zatem ciśnienie σ i jednoparametrowa rodzina płaskich siatek ortogonalnych, rozpiętych na polach wektorowych $\mathbf{e}_\alpha$ i $\mathbf{e}_\beta$.

W znalezieniu ich pomocne będzie następujące

TWIERDZENIE. *Materiał sztywno-idealnie plastyczny może być w ruchu o własności Ω tylko wtedy, gdy 1° płaszczyzny rodziny $\mathcal{L}$ są równoległe, 2° płaszczyzny rodziny $\mathcal{L}$ przecinają się wzdłuż jednej prostej, 3° płaszczyzny rodziny $\mathcal{L}$ mają nie redukującą się do prostej obwiednię, przy czym kierunek ścinania na każdej z tych płaszczyzn jest stały.*

D o w ó d. Niech rozpatrywany ruch będzie sprzężony z układem trójortogonalnym $\{s, \alpha, \beta\}$. Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$\varkappa_{ij} \equiv -\frac{h_{j,i}}{h_i h_j}, \quad i, j = s, \alpha, \beta; \ i \neq j$$

na krzywiznę geodezyjną j-linii na powierzchni $i = \text{const}$, gdzie $h_j \equiv |\mathbf{e}_j|$ jest parametrem Lamégo j-linii. Ponadto

$$\varkappa_{ij,K} \equiv \frac{\varkappa_{ij,k}}{h_k} \quad \text{dla} \quad k = s, \alpha, \beta \quad \text{oraz} \quad \text{dla} \quad k \neq i \neq j \neq k.$$

Podstawiając (2.7) do równań quasi-statycznej równowagi (2.5) otrzymamy

$$\operatorname{grad} \sigma + (\nu k) \operatorname{div}(\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_s + \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_\alpha) = 0, \tag{2.8}$$

czyli

$$\sigma_{,s} - (\nu k)(\varkappa_{\alpha\beta} - 2\varkappa_{\beta s}) h_s = 0, \quad \sigma_{,\alpha} = 0, \quad \sigma_{,\beta} = 0. \tag{2.9}$$

Geometrię powierzchni, które tworzą układ $\{s, \alpha, \beta\}$ (przy założeniu $\varkappa_{s,\alpha} = \varkappa_{s,\beta} = 0$, które oznacza, że powierzchnie $s = \text{const}$ są płaszczyznami) opisują równania Lamégo, na które składają się (por. np. [3]):

równania Gaussa

$$\begin{gathered} \varkappa_{\alpha s, A} - (\varkappa_{\alpha s})^2 - \varkappa_{\beta s} \varkappa_{\beta\alpha} = 0, \\ \varkappa_{\alpha\beta, A} - \varkappa_{\beta\alpha, B} - (\varkappa_{\alpha\beta})^2 - (\varkappa_{\beta\alpha})^2 = 0, \\ \varkappa_{\beta s, B} - (\varkappa_{\beta s})^2 - \varkappa_{\alpha s} \varkappa_{\alpha\beta} = 0; \end{gathered} \tag{2.10}$$

oraz równania Codazziego

$$\varkappa_{\alpha\beta, S} = 0, \quad \varkappa_{\beta\alpha, S} = 0, \quad \varkappa_{\alpha s, B} + \varkappa_{\beta s}(\varkappa_{\alpha\beta} - \varkappa_{\alpha s}) = 0, \quad \varkappa_{\beta s, A} + \varkappa_{\alpha s}(\varkappa_{\beta\alpha} - \varkappa_{\beta s}) = 0. \tag{2.11}$$

Różniczkując osobno względem α i β pierwsze z równań ruchu (2.8) i podstawiając otrzymane dwie funkcje do równań Gaussa i Codazziego, otrzymamy

$$\varkappa_{\alpha\beta, A} = \varkappa_{\alpha\beta} \varkappa_{\alpha s} - 2\varkappa_{\beta\alpha} \varkappa_{\beta s}, \quad \varkappa_{\alpha\beta, B} = 3\varkappa_{\alpha\beta} \varkappa_{\beta s}. \tag{2.12}$$

Przedyskutujemy możliwości, przy których spełnione są powyższe równania.

A. Niech $\kappa_{\alpha\beta}=0$. Wówczas mamy alternatywę $\kappa_{\beta\alpha}=0$ lub $\kappa_{\beta s}=0$.

a) Niech $\kappa_{\beta\alpha}=0$. Przy takiej geometrii układu $\{s, \alpha, \beta\}$, gdy rodzina $\mathcal{L}$ tworzy dowolny wachlarz płaszczyzn, α-linie i β-linie są prostymi, a więc ruch sprzężony z tym układem ma stałe kierunki ścinania na każdej z płaszczyzn z $\mathcal{L}$. Ruch ten oraz odpowiadające mu pole tensora naprężeń dla materiału sztywno-idealnie plastycznego opisane są w pracy [1].

b) Niech $\kappa_{\beta s}=0$. Wówczas na mocy $(2.11)_4$ mamy $\kappa_{\alpha s}=0$. Tutaj s-linie i β-linie są prostymi. Przypadek ten sprowadza się do poprzedniego po odpowiedniej zamianie współrzędnych.

B. Niech $\kappa_{\alpha\beta}\neq 0$. Ponieważ $\kappa_{s\alpha}=\kappa_{s\beta}=0$, przeto

$$h_{\alpha,s}=h_{\beta,s}=0. \tag{2.13}$$

Zatem równania $(2.12)_1$ i $(2.12)_2$ prowadzą do warunków

$$\kappa_{\alpha s,s}=0, \qquad \kappa_{\beta s,s}=0. \tag{2.14}$$

Warunki te oznaczają, że rodzina $\mathcal{L}$ tworzy wachlarz płaszczyzn równoległych lub przecinających się wzdłuż jednej prostej. Istotnie, krzywizna i torsja s-linii przechodzącej przez ustalony punkt (α_0, β_0) płaszczyzny $s=\text{const}$ są następujące (por. np. [3], t. 1, 406):

$$\kappa^{(s)}(s, \alpha_0, \beta_0)=\sqrt{\kappa_{\alpha s}^2(s, \alpha_0, \beta_0)+\kappa_{\beta s}^2(s, \alpha_0, \beta_0)}=\kappa_0=\text{const}, \tag{2.15}$$

$$\tau^{(s)}(s, \alpha_0, \beta_0)=\sqrt{\left\{\left[\frac{\kappa_{\alpha s}(s, \alpha_0, \beta_0)}{\kappa_0}\right]_{,s}\right\}^2+\left\{\left[\frac{\kappa_{\beta s}(s, \alpha_0, \beta_0)}{\kappa_0}\right]_{,s}\right\}^2}=0. \tag{2.16}$$

Mając na uwadze to, że przypadek A odpowiada przypadkowi 3°, a przypadek B przypadkowi 1° i 2° dowodzonego twierdzenia, alternatywa A lub B kończy jego dowód.

Ponieważ pełne rozwiązanie zagadnienia dla przypadku A zostało podane w pracy [1], zajmiemy się zatem przypadkiem B, tzn, przypadkiem, gdy $\kappa^{(s)}=\kappa_0=0$ oraz gdy $\kappa^{(s)}=\kappa_0=\text{const}\neq 0$. Pomijamy również w dalszych rozważaniach kinematykę materiału sztywno-idealnie plastycznego, gdyż została opisana w pracy [2].

3. Stan naprężenia w materiale sztywno-idealnie plastycznym, występujący przy ruchu o własności Ω

3.1. *$\mathcal{L}$ jest rodziną płaszczyzn równoległych*

Przyjmujemy, że ruch ośrodka jest sprzężony z układem trójortogonalnym $\{z, \alpha, \beta\}$ takim, że

$$\kappa_{z\alpha}=\kappa_{z\beta}=\kappa_{\alpha z}=\kappa_{\beta z}=0.$$

Warunek ten oznacza, że powierzchnie $z=\text{const}$ są płaszczyznami równoległymi, a z-linie tworzą kongruencję prostych równoległych. Pozostałe powierzchnie układu $\alpha=\text{const}$ i $\beta=\text{const}$ tworzą dwie rodziny ortogonalnych powierzchni cylindrycznych.

Równania ruchu (2.9) w tym układzie przyjmują postać

$$\sigma_{,z}-(\nu k)\varkappa_{\alpha\beta}=0, \quad \sigma_{,\alpha}=0, \quad \sigma_{,\beta}=0. \tag{3.1}$$

Stąd

$$\sigma_{,z}=(\nu k)\varkappa_{\alpha\beta}=\sigma_1=\text{const}. \tag{3.2}$$

Zatem stan naprężenia opisany jest formułami

$$\sigma=\sigma_1 z+\sigma_0, \quad \sigma_1, \sigma_0=\text{const}, \quad \varkappa^{(\beta)}\equiv\varkappa_{\alpha\beta}=\frac{\sigma_1}{\nu k}\equiv\mu=\text{const}, \tag{3.3}$$

gdzie $\varkappa^{(\beta)}$ jest krzywizną β-linii na każdej z płaszczyzn $z=\text{const}$. Tak więc β-linie są okręgami o stałym promieniu.

Wniosek. Jeżeli płaszczyzny rodziny $\mathcal{L}$, zależnej od parametru z, są równoległe, to ruch o własności Ω materiału sztywno-idealnie plastycznego jest możliwy, gdy

1) na każdej z płaszczyzn $\mathcal{L}$ panuje stałe ciśnienie hydrostatyczne, zależące liniowo od parametru z;

2) rodzina powierzchni chwilowo nierozciągliwych $\mathcal{M}$ tworzy układ walców kołowych o stałym promieniu $R_0=k/|\sigma_1|$.

Wniosek ten pozwala na otrzymanie szeregu interesujących rozwiązań konkretnych problemów brzegowych. Niektóre z nich podane będą w oddzielnej pracy.

3.2. *$\mathcal{L}$ jest rodziną płaszczyzn przecinających się wzdłuż jednej prostej*

Przyjmujemy, że ruch ośrodka sprzężony jest z układem walcowym $\{r, \psi, z\}$, dla którego mamy

$$h_r=h_z=1, \quad h_\psi=r, \quad \varkappa_{r\psi}=-\frac{1}{r}, \quad \varkappa_{\psi r}=\varkappa_{\psi z}=\varkappa_{z\psi}=\varkappa_{rz}=\varkappa_{zr}=0.$$

Równania ruchu (2.9) w tym układzie przyjmują postać

$$\sigma_{,\psi}-(\nu k)[r\sin\theta\cdot\theta_{,z}-r\cos\theta\cdot\theta_{,r}-2\sin\theta]=0, \quad \sigma_{,z}=0, \quad \sigma_{,r}=0. \tag{3.4}$$

Aby otrzymać analogie do znanych rozwiązań, wprowadzamy kąt $\vartheta=\theta-(\pi/2)$ nachylenia ujemnego zwrotu β-linii do osi z.

Z równań (3.4) wynika, że interesujący nas stan naprężenia opisany jest równaniami

$$\sigma=\sigma_1\psi+\sigma_0, \quad \sigma_1, \sigma_0=\text{const}, \quad \vartheta_{,z}\cos\vartheta+\vartheta_{,r}\sin\vartheta=\frac{2}{r}\cos\vartheta+\mu, \tag{3.5}$$

gdzie

$$\mu=\frac{\sigma_1}{\nu k}=\text{const}.$$

Równania (3.5) dla $\mu=0$ opisują stan naprężenia występujący przy skręcaniu prętów kołowych o zmiennym przekroju oraz przy skręcaniu wycinków pierścieni o przekroju dowolnym (por. np. [4]). Otrzymaliśmy zatem uogólnienie znanej klasy rozwiązań, ważnej z punktu widzenia zastosowań. Rozwiążemy równanie (3.5) opisujące siatkę linii poślizgu w przypadku, gdy $\mu \neq 0$.

Równania charakterystyk dla (3.5) mają postać

$$\frac{dz}{\cos\vartheta} = \frac{dr}{\sin\vartheta} = \frac{d\vartheta}{\frac{2}{r}\cos\vartheta + \mu}. \tag{3.6}$$

Rozwiązując pierwsze z nich mamy

$$r^2\cos\vartheta + \frac{\mu r^2}{3} = C_1 = \text{const}, \tag{3.7}$$

a po scałkowaniu drugiego, uwzględniając (3.7), uzyskujemy wzory w postaci parametrycznej:

$$z = \int_{t_0}^{t} \frac{g(t)}{t}\,dt + C_2, \qquad C_2 = \text{const}, \qquad \sin\vartheta = g(t), \tag{3.8}$$

gdzie

$$g(t) = \left\{1 - \left[\frac{C_1}{4\left(t + \frac{\mu}{3}\right)}\right]^{2/3} (t+\mu)^2\right\}^{1/2}.$$

Równania (3.7) i (3.8) opisują poszukiwaną siatkę linii poślizgu. Dla $\mu = 0$ otrzymujemy istotnie wspomniane wyżej rozwiązanie (por. [4], str. 161):

$$r^2\cos\vartheta = C_1 = \text{const}, \qquad z = \frac{C_1}{2}\int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{|\cos\vartheta|}} + C_2, \qquad C_2 = \text{const}. \tag{3.9}$$

4. Klasyfikacja znanych rozwiązań teorii idealnej plastyczności

Okazuje się, że zdecydowaną większość znanych quasi-statycznych rozwiązań dla materiału sztywno-idealnie plastycznego stanowią rozwiązania, dla których ruchy mają własność Ω(1). Oznacza to, że dla każdego z tych zagadnień w strefie plastycznej materiału istnieją trzy ortogonalne rodziny powierzchni:

rodzina $\mathcal{K}$ powierzchni chwilowo wzajemnie nieprzesuwnych, na których nie występują naprężenia ścinające;

rodziny $\mathcal{L}$ i $\mathcal{M}$ powierzchni chwilowo nierozciągliwych. Każda z tych rodzin może być rodziną płaszczyzn (w skrócie rodziną P), powierzchni cylindrycznych (C), powierzchni rozwijalnych (R) i powierzchni obrotowych (O).

Można łatwo pokazać w sposób analogiczny do p. 2, że dla rodziny $\mathcal{K}$ płaszczyzn

(1) Ważnym zagadnieniem teorii idealnej plastyczności jest płaski stan naprężenia. Odpowiadające mu ruchy na ogół nie mają własności Ω. Związane jest to z tym, że odpowiedni stan prędkości deformacji nie jest czystym ścinaniem.

chwilowo wzajemnie nieprzesuwnych quasi-statyczny ruch materiału sztywno--idealnie plastycznego, przy którym istnieją rodziny powierzchni $\mathcal{L}$ i $\mathcal{M}$, może nastąpić tylko wtedy, gdy

1) płaszczyzny rodziny $\mathcal{K}$ są równoległe;

2) płaszczyzny rodziny $\mathcal{K}$ przecinają się wzdłuż jednej prostej.

Rozważając przypadek 1) otrzymamy uogólnienie płaskiego stanu odkształcenia, dla którego zawsze istnieją rodziny $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, a rodzina $\mathcal{K}$ tworzy rodzinę płaszczyzn równoległych. Mogą tu pojawić się przepływy plastyczne z wymienionymi rodzinami powierzchni, ale bez ograniczeń nałożonych na pole prędkości, jak to ma miejsce w płaskim stanie odkształcenia.

Przypadek 2) będzie zawierał pewną klasę osiowo-symetrycznych stanów naprężenia i odkształcenia z rodzinami powierzchni $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ o podanej geometrii.

Ogólna postać przypadków 1) i 2) nie jest dotychczas zbadana.

Rozważmy klasę krzywoliniowych układów trójortogonalnych, dla których jedna z rodzin powierzchni jest rodziną płaszczyzn. Oznaczmy te rodziny przez $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$. Każdemu z tych układów można przyporządkować odpowiedni ruch o własności Ω [2]. Tworząc wszystkie dopuszczalne kombinacje par (rodzina powierzchni, rodzaj powierzchni) otrzymamy schemat klasyfikujący znane rozwiązania z ruchami o własności Ω, przedstawiony w tablicy 1.

Tablica 1

L.p.	Rodzina powierzchni $\mathcal{K}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{M}$	Klasa rozwiązań
1	P	P	P	Jednorodne czyste ścinanie
2	P	C	C	Uogólnienie płaskiego stanu odkształcenia
3	P	O	O	Pewna klasa zagadnień osiowo-symetrycznych
4	C	P	P	Skręcanie prętów cylindrycznych
5	C	P	C	Uogólnienie skręcania prętów cylindrycznych*)
6	R	P	R	Klasa rozwiązań podana w pracy [1]
7	O	P	O	Uogólnienie skręcania prętów o zmiennym przekroju i wycinków pierścieni o przekroju dowolnym*)

*) W sensie podanym w pracy niniejszej.

Okazuje się, że oprócz wspomnianych przypadków, zawartych w p. 2 i 3 tablicy 1, znane są wszystkie quasi-statyczne rozwiązania zagadnień, dla których istnieje układ rodzin $\{\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{M}\}$ i jedna z nich jest rodziną płaszczyzn. W punktach 5, 6 i 7 zawarte są nowe nieznane dotychczas klasy rozwiązań, podane w pracy [1] oraz w niniejszej. Szczególnym przypadkiem p. 7 jest rozwiązanie podane przez W. Sokołowskiego [4].

Literatura cytowana w tekście

1. W. Gambin, J. Rychlewski, *Przestrzenne przepływy plastyczne z rodziną chwilowo nierozciągliwych płaszczyzn*, Arch. Mech. Stos., **23**, 6, 1971.
2. W. Gambin, *O ruchach izochorycznych z rodziną chwilowo nierozciągliwych płaszczyzn*, Arch. Mech. Stos., **24**, 2, 1972.
3. В. Ф. Каган, *Теория поверхностей*, Физматгиз, т. 1, 2, Москва 1948.
4. В. В. Соколовский, *Теория пластичности*, изд. 3, Высшая школа, Москва 1965.

Резюме

НЕКОТОРЫЙ КЛАСС ТРЕХМЕРНОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЖЕСТКО-ИДЕАЛЬНО-ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА С СЕМЕЙСТВОМ МГНОВЕННО НЕРАСТЯЖИМЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

В работе дается комплекс решений для жестко-идеально-пластического материала с трех-ортогональной системой трех семейств поверхностей, из которых одна является семейством плоскостей.

Эти решения являются естественным обобщением для случая трехмерных результатов обсуждений, для плоских ортогональных сеток линий скольжения с семейством прямых линий.

Приведенный комплекс решений создает три класса результатов: 1) — обобщение кручения призматических стержний, а также 2) — обобщение кручения круговых стержней переменного сечения, 3) — класса решения приведенного в работе [1].

Summary

CERTAIN CLASS OF SOLUTIONS OF A THREE-DIMENSIONAL PROBLEM FOR RIGID-PERFECTLY PLASTIC MATERIALS WITH A FAMILY OF INSTANTANEOUSLY INEXTENSIBLE PLANES

In the paper given is the set of solutions for a rigid-perfectly plastic material with a three-orthogonal system of three families of surfaces, one of which represents a family of planes.

The solutions form a natural generalization (to a three-dimensional case) of the results concerning plane orthogonal slip-line lattices with a family of straight lines.

The set of solutions presented form the following three classes of results: 1) generalized torsion of prismatic rods; 2) generalized torsion of rods with variable circular cross-section; 3) the class of solutions derived in [1].

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 września 1971 r.