

OPTYMALNE SPRĘŻANIE OŚRODKÓW O STAŁEJ GRUBOŚCI W PŁASKIM STANIE NAPRĘŻENIA

JAN HOLNICKI-SZULC

1. WSTĘP

W pracy rozpatrzono sprężysty, jednorodny, izotropowy ośrodek o stałej grubości znajdujący się w płaskim stanie naprężenia. Jego naprężenia dopuszczalne na rozciąganie i ściskanie wynoszą odpowiednio $\bar{\sigma}$ i $\underline{\sigma}$ ($\bar{\sigma} \geq 0$, $\underline{\sigma} \leq 0$).

Przyjęto, że pod wpływem przyczyn zewnętrznych wywołany jest w ośrodku stan naprężenia $\sigma_{ij}^{(p)}$ ($i, j=1, 2$). Celem pracy jest poszukiwanie takiego dodatkowego pola naprężeń σ_{ij} , które po wprowadzeniu do ustroju, pozwoli uzyskać stan naprężenia $\sigma_{ij}^{(p)} + \sigma_{ij}$ o składowych głównych nie przekraczających w żadnym punkcie wartości dopuszczalnych $\bar{\sigma}$ i $\underline{\sigma}$.

Dla wyznaczenia σ_{ij} przyjęto między innymi kryterium wyboru żądające, aby całkowita energia wewnętrzna $\frac{1}{2} \int_D (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) dx_1 dx_2$ wprowadzona do ośrodka przez stan σ_{ij} osiągała minimum.

Dysponując wyznaczonym polem naprężenia σ_{ij} , można poszukiwać przyczyn, które ten stan wywołują. W pracy rozpatrzono możliwość wywołania pola σ_{ij} przez wprowadzenie odpowiednio dobranej kontynuacji układu cięgien sprężających.

Po sformułowaniu zagadnienia w przypadku ogólnym, rozpatrzono jako przykład zagadnienie kołowo symetryczne.

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Przyjęto, że na ośrodek działają obciążenia zewnętrzne na brzegu p_i oraz siły masowe $X_i^{(p)}$.

Opisując zagadnienie w naprężeniach, otrzymuje się na gruncie teorii sprężystości układ równań pozwalający wyznaczyć wywołany stan naprężenia $\sigma_{ij}^{(p)}$. Są to następujące równania:

równania równowagi

$$(2.1) \quad \sigma_{i,j}^{(p)} + X_i^{(p)} = 0;$$

równanie ciągłości odkształceń

$$(2.2) \quad \nabla^2 \sigma_{ii}^{(p)} = -(1+\nu) X_{j,j}^{(p)}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2}$$

oraz warunki brzegowe

$$(2.3) \quad p_i = \sigma_{ij}^{(p)} n_j,$$

gdzie n_j oznaczają kosinusy kierunkowe normalnej do brzegu C .

W pracy poszukiwany jest dodatkowy stan naprężenia σ_{ij} pochodzący od sprężenia, spełniający analogiczne równania

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij,j} + X_i &= 0, \\ \nabla^2 \sigma_{ii} &= -(1+\nu) X_{i,i} \end{aligned}$$

z warunkami na brzegu C ośrodka

$$q_i = \sigma_{ij} n_j$$

oraz z wyrażeniami warunkami ograniczającymi

$$(2.5) \quad \underline{\sigma} \leq [\sigma_{ij}^{(p+a)}]_k \leq \bar{\sigma}, \quad k=1, 2,$$

gdzie

$$\sigma_{ij}^{(p+a)} = \sigma_{ij}^{(p)} + \sigma_{ij},$$

oraz gdzie $[\sigma_{ij}^{(p+a)}]_k$ oznacza wartości naprężeń głównych tensora $\sigma_{ij}^{(p+a)}$, a $\bar{\sigma}, \underline{\sigma}$ wartości dopuszczalne naprężeń głównych.

Postulat (2.5) stanowi żądanie nieprzekroczenia dopuszczalnego wyężenia według hipotezy ekstremalnych naprężeń głównych. Otrzymano układ trzech niezależnych równań (2.4)_{1,2} i dwu ograniczeń (2.5) z pięcioma funkcjami niewiadomymi $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, X_1, X_2$. W szczególnym przypadku, gdy $\bar{\sigma} = \underline{\sigma} = 0$, z warunków (2.5) oraz (2.4)₁ wynika, że należy przyjąć jednoznacznie określone rozwiązanie $\sigma_{ij} \equiv -\sigma_{ij}^{(p)}, X_i \equiv -X_i^{(p)}$. Równanie (2.4)₂ spełnione jest tożsamościowo.

W pozostałych przypadkach istnieje pewien domknięty przedział $\langle \underline{\sigma}, \bar{\sigma} \rangle$ zawierający liczbę 0, w którym muszą zawierać się składowe główne tensora $\sigma_{ij}^{(p+a)}$ (2.5). Dobór rozwiązań jest wtedy wieloznaczny (jednym z nich mogą być wzmiankowane wyżej pola $\sigma_{ij} \equiv -\sigma_{ij}^{(p)}, X_i \equiv -X_i^{(p)}$). Celowe jest zatem wprowadzenie pewnego kryterium wyboru, pozwalającego na wyszukanie rozwiązań optymalnych (w sensie tego kryterium).

Jako warunek optymalizacji można przyjąć żądanie, aby całkowita energia wewnętrzna wprowadzona do ośrodka przez stan σ_{ij} osiągała minimum:

$$(2.6) \quad \int_D \int \left(\frac{1+\nu}{2E} \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{2E} \sigma_{ii} \sigma_{jj} \right) dx_1 dx_2 = \min.$$

Jeżeli więcej niż jedno rozwiązanie układu (2.4)_{1,2} i (2.5) wprowadza tę samą minimalną energię (2.6) do ustroju, to są to rozwiązania równie dobre w myśl kryterium (2.6) i zadowalać będzie nas znalezienie jednego z nich.

Obszar całkowania D w związku (2.6) opisuje powierzchnię całej rozpatrywanej tarczy. W punkcie 3 rozważono możliwość sprowadzenia sformułowanego wyżej zagadnienia do rozwiązywania go w poszczególnych podobszarach D^k przy zachowaniu kontaktowych warunków naprężeniowych na ich granicach.

Po wyznaczeniu z układu warunków (2.4)_{1,2}, (2.5) i (2.6) stanu naprężenia σ_{ij} można z równań (2.4)₃ określić obciążenia q_i , jakie należy przyłożyć na brzegu w celu zachowania równowagi. Znane zatem będą siły X_i , q_i , jakie powinny działać na układ dla uzyskania odpowiedniego pola σ_{ij} .

Z zasady superpozycji wynika, że znaleziony stan σ_{ij} będzie miał tę własność, że wypadkowy rozkład naprężeń $\sigma_{ij}^{(p+q)}$ spełniać będzie wszelkie warunki równowagi i ciągłości odkształceń przy jednoczesnym nieprzekroczeniu w żadnym punkcie obszaru D^k dopuszczalnego wyężenia materiału.

Rugując z równania (2.4)₂ X_i , po uwzględnieniu równań (2.4)₁, otrzymano

$$(2.7) \quad \nabla^2 \sigma_{ii} = (1+\nu) \sigma_{ij, ij}.$$

Wyrażając składowe tensora σ_{ij} przez $\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ i $\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$, gdzie σ_1 i σ_2 są to wartości główne tensora, otrzymano:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma + \tau \cos 2\alpha, \\ \sigma_{22} &= \sigma - \tau \cos 2\alpha, \\ \sigma_{12} &= \tau \sin 2\alpha, \end{aligned}$$

gdzie $\alpha(x_1, x_2)$ oznacza kąt pochylenia kierunku głównego (odpowiadającego σ_1) do osi x_1 .

Wstawiając (2.8) do (2.7) otrzymano

$$(2.9) \quad 2\nabla^2 \sigma = (1+\nu) [\nabla^2 \sigma + (\tau \cos 2\alpha)_{,11} + 2(\tau \sin 2\alpha)_{,12} - (\tau \cos 2\alpha)_{,22}].$$

Układ zależności (2.4)_{1,2}, (2.5) i (2.6) można równoważnie przedstawić w postaci (2.4)₂, (2.8), (2.9), (2.5) i (2.6), skąd uzyskujemy układ warunków (2.9), (2.5) i (2.6), wyrażonych przez niewiadome σ , τ , α i niezależnych od X_i :

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \sigma_{,11} + \sigma_{,22} &= \frac{1+\nu}{1-\nu} [(\tau \cos 2\alpha)_{,11} + 2(\tau \sin 2\alpha)_{,12} - (\tau \cos 2\alpha)_{,22}], \\ \int_D \int \frac{1}{E} [(1-\nu) \sigma^2 + (1+\nu) \tau^2] dx_1 dx_2 &= \min, \\ \underline{\sigma} \leq \sigma + \sigma^{(p)} + \sqrt{(\tau \cos 2\alpha + \tau^{(p)} \cos 2\alpha^{(p)})^2 + (\tau \sin 2\alpha + \tau^{(p)} \sin 2\alpha^{(p)})^2} &\leq \bar{\sigma}, \\ \underline{\sigma} \leq \sigma + \sigma^{(p)} - \sqrt{(\tau \cos 2\alpha + \tau^{(p)} \cos 2\alpha^{(p)})^2 + (\tau \sin 2\alpha + \tau^{(p)} \sin 2\alpha^{(p)})^2} &\leq \bar{\sigma}. \end{aligned}$$

Jeżeli znalezione zostanie optymalne rozwiązanie σ , τ , α układu (2.10), to można na podstawie zależności (2.8), a następnie (2.4)_{1,3} znaleźć układ sił masowych X_i oraz obciążeń brzegowych q_i .

Mając określony stan naprężenia $\sigma_{ij}^{(p)}$ w obszarze D , można wyróżnić trzy rodzaje podobszarów D^a , D^b , D^c :

- podobszary, w których $\underline{\sigma} \leq \sigma_1^{(p)} \leq \bar{\sigma}$ i $\underline{\sigma} \leq \sigma_2^{(p)} \leq \bar{\sigma}$;
- podobszary, w których $(\sigma_1^{(p)} > \bar{\sigma}$ lub $\sigma_1^{(p)} < \underline{\sigma})$ i $(\sigma_2^{(p)} > \bar{\sigma}$ lub $\sigma_2^{(p)} < \underline{\sigma})$;
- podobszary, w których jedno z naprężeń głównych przekracza naprężenia dopuszczalne $\bar{\sigma}$ lub $\underline{\sigma}$.

Jeżeli dopuścimy występowanie pewnych nieciągłości w rozwiązaniach wzdłuż granic obszarów $C^{(k,l)}$ ($k, l = a, b, c$), to zadanie poszukiwania pola naprężeń σ_{ij} (2.10) prowadzi do postawienia tego problemu w poszczególnych D^k , o ile zapewnimy spełnienie kontaktowych warunków zgodności na $C^{(k,l)}$:

$$(2.11) \quad \sigma_{ij}^{(k)} n_j^{(k,l)} = -\sigma_{ij}^{(l)} n_j^{(l,k)},$$

gdzie symbole $n_j(k, l)$ oznaczają kosinusy kierunkowe normalnej zewnętrznej do brzegu $C^{(k,l)}$ ograniczającego obszaru D^k , oraz $n_j^{(l,k)}$ opisuje normalną zewnętrzną do brzegu $C^{(l,k)}$ ograniczającego D^l .

Spełnienie warunku (2.11) gwarantuje, że wprowadzenie pewnego stanu naprężenia w obszarze D^k nie powoduje żadnych zmian w polach naprężeń innych obszarów. W obszarach D^a poszukiwanym rozwiązaniem jest stan $\sigma_{ij} \equiv 0$, który spełnia wszystkie warunki (2.10).

Należy zwrócić uwagę na fakt, że rozwiązanie uzyskane przez złożenie rozwiązań z poszczególnych obszarów D^k wprowadza do ustroju nie większą energię (2.10)₂ niż rozwiązanie zagadnienia spełniające (2.10) w całym obszarze D , gdyż dziedzina funkcjonału (2.10)₂ została rozszerzona o takie σ i τ , że wraz z α nie muszą spełniać warunku (2.10)₁ na liniach $C^{(k,l)}$.

Mając określony stan naprężenia σ_{ij} można wyznaczyć z warunków (2.4)_{1,3} pole sił masowych X_i oraz obciążeń brzegowych q_i , jakie go wywołują.

3. WYWOŁANIE POLA SIŁ MASOWYCH X_i I OBCIĄŻEŃ BRZEGOWYCH q_i

Przechodząc do realizacji wyznaczonego pola sił masowych X_i i obciążeń brzegowych q_i , rozważyć możemy wprowadzenie odpowiedniego układu cięgien sprężających.

Założono o cięgnach, że są dowolnie cienkie i rozmieszczone dowolnie gęsto, tak że ich pole przekroju oraz kąt pochylenia mogą być traktowane jako odpowiednio regularne funkcje współrzędnych (klasy C^1). Cięgna mogą mieć przebieg krzywoliniowy oraz zakotwienia zarówno na brzegu jak i wewnątrz ośrodka. Cięgna oddziałują na ośrodek jedynie przez zakrzywienia i zakotwienia (model kontynualnie rozłożonych kabli sprężających).

Przy tak przyjętych założeniach [6] równania równowagi wiązki cięgien w prostokątnym układzie kartezjańskim x_1, x_2 przyjmują postać [3]

$$(3.1) \quad \begin{aligned} (S \cos^2 \varphi)_{,1} + \frac{1}{2} (S \sin 2\varphi)_{,2} &= X_1, \\ \frac{1}{2} (S \sin 2\varphi)_{,1} + (S \sin^2 \varphi)_{,2} &= X_2, \end{aligned}$$

gdzie $S(x_1, x_2)$ oznacza gęstość siły w cięgnie oraz $\varphi(x_1, x_2)$ kąt pomiędzy styczną do cięgna a dodatnim zwrotem osi x_1 .

Równania (3.1) można napisać ogólniej (por. (4.21) i (4.22)) wprowadzając pojęcie stanu napięcia $\sigma_{ij}^{(s)}$ panującego w wiązce cięgien. Stany naprężeń σ_{ij} i $\sigma_{ij}^{(s)}$ opisują

różne pola tensorowe, sprzężone ze sobą za pośrednictwem wzajemnych oddziaływań sił masowych X_i .

Znając pole X_i oraz obciążenie q_i , mamy określone zagadnienie brzegowe dla quasi-liniowego, parabolicznego układu równań (3.1) [2] z następującymi warunkami na brzegu C obszaru:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} S(\cos^2 \varphi n_1 + \sin \varphi \cos \varphi n_2) &= -q_1, \\ S(\cos \varphi \sin \varphi n_1 + \sin^2 \varphi n_2) &= -q_2. \end{aligned}$$

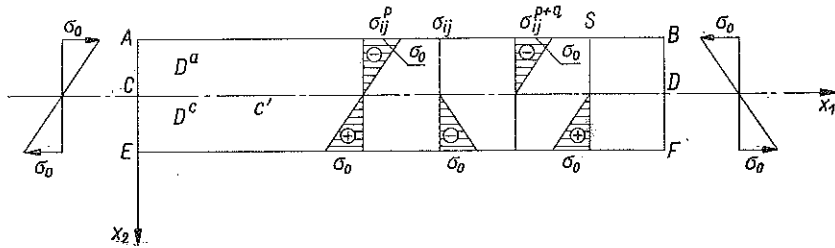
Na rozwiązanie zagadnienia (3.1) i (3.2) należy narzucić dodatkowy warunek konstrukcyjny

$$(3.3) \quad S \geq 0.$$

co oznacza, że ciągną przenoszą jedynie siły rozciągające.

Zagadnienie wprowadzania pola sił masowych X_i i obciążeń brzegowych q_i wywołanych przez wiązkę sprężającą (3.1) i (3.2), spełniającą warunek (3.3), zilustrowano przykładami zginanej belki i kołowo-symetrycznego zagadnienia Lamégo.

Rozważmy przykład belki poddanej czystemu zginaniu (rys. 1). Przyjmijmy, że naprężenia dopuszczalne materiału wynoszą $\bar{\sigma} = 0$, $\underline{\sigma} = -\sigma_0$. Zatem w obszarze belki można rozróżnić dwa podobszary D^a i D^c .



Rys. 1

W obszarze D^a nie wprowadzamy żadnego sprężenia, natomiast w obszarze D^c należy wprowadzić takie pole σ_{ij} , które spełniałoby warunki (2.10) oraz warunek zgodności (2.11) na brzegu C' , który sprowadza się do układu warunków $\sigma = 0$, $\tau = 0$, $\alpha = 0$ na C' .

Łatwo się przekonać, że poszukiwanym stanem σ_{ij} jest liniowy rozkład naprężeń σ_{11} przedstawiony na rysunku. Stan końcowy $\sigma_{ij}^{(p+a)}$ spełnia warunki wyężeniowe materiału. Spełnia on także warunki równowagi w całym obszarze D . Nie jest jednak zachowany warunek nierozdzielności odkształceń (2.10)₁ na granicy obszarów C' .

Z równań (2.4) wynika, że pole sił masowych spełnia warunki $X_i = 0$ w obszarze D , natomiast z warunków (2.4)₃ można określić wymagane obciążenia brzegu CE i DF . Zatem poszukiwanym układem cięgien sprężających wymuszających stan σ_{ij} (określonym przez (3.1)–(3.3)) jest układ cięgien prostoliniowych o gęstości rozłożonej liniowo na grubości podobszary D^c (rys. 1).

Powstawaniu nieregularności deformacji wzdłuż linii C' można zapobiec przez wstępne sprężanie w obszarze D^c , a następnie przez dołączenie (bez oddziaływań) części belki opisanej obszarem D^a . Po wprowadzeniu obciążenia zewnętrznego ciągłość deformacji zostanie zachowana w całym obszarze D .

4. ZAGADNIENIE KOŁOWO SYMETRYCZNE

Zastosujemy powyższe rozważania do przypadku tarcz kołowo symetrycznych z obciążeniem p_i i $X_i^{(p)}$ zachowującym tę samą symetrię.

Przechodząc do opisu zagadnienia we współrzędnych biegunowych r, θ , przyjęto

$$(4.1) \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \theta = \arctg \frac{x_2}{x_1}.$$

Stan naprężenia σ_{ij} określony będzie odpowiednio przez składowe $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$.

Transformując równanie (3.1)₁ do układu r, θ ($r = r(x_1, x_2)$, $\theta = \theta(x_1, x_2)$), należy przyjąć

$$(4.2) \quad \begin{aligned} r_{,1} &= \cos \theta, & \theta_{,1} &= -\frac{\sin \theta}{r}, \\ r_{,2} &= \sin \theta, & \theta_{,2} &= \frac{\cos \theta}{r}. \end{aligned}$$

Jeżeli mamy funkcję $\psi(x_1, x_2) = \psi[x_1(r, \theta), x_2(r, \theta)]$, to

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \psi_{,1} &= \psi_{,r} \cos \theta - \frac{1}{r} \psi_{,\theta} \sin \theta, \\ \psi_{,2} &= \psi_{,r} \sin \theta + \frac{1}{r} \psi_{,\theta} \cos \theta, \\ \psi_{,11} &= \psi_{,rr} \cos^2 \theta - \frac{2}{r} \psi_{,r\theta} \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{r} \psi_{,r} \sin^2 \theta + \\ &\quad + \frac{2}{r^2} \psi_{,\theta} \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{r^2} \psi_{,\theta\theta} \sin^2 \theta, \\ \psi_{,22} &= \psi_{,rr} \sin^2 \theta + \frac{2}{r} \psi_{,r\theta} \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{r} \psi_{,r} \cos^2 \theta - \\ &\quad - \frac{2}{r^2} \psi_{,\theta} \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{r^2} \psi_{,\theta\theta} \cos^2 \theta, \\ \psi_{,12} &= \psi_{,rr} \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{r} \theta_{,r\theta} \cos 2\theta - \frac{1}{r^2} \psi_{,\theta\theta} \sin \theta \cos \theta - \\ &\quad - \frac{1}{r^2} \psi_{,\theta} \cos 2\theta - \frac{1}{r} \psi_{,r} \sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

Wykorzystując wzory (4.2) i (4.3), równanie (2.10)₁ przedstawić możemy we współrzędnych biegunowych w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 (4.4) \quad \sigma_{,rr} + \frac{1}{r} \sigma_{,r} + \frac{1}{r^2} \sigma_{,\theta\theta} = \frac{1+\nu}{1-\nu} & \left\{ (\tau \cos 2\alpha)_{,rr} \cos 2\theta - \right. \\
 & - 4(\tau \cos 2\alpha)_{,r\theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} - (\tau \cos 2\alpha)_{,r} \frac{\cos 2\theta}{r} + \\
 & + 4(\tau \cos 2\alpha)_{,\theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} - (\tau \cos 2\alpha)_{,\theta\theta} \frac{\cos 2\theta}{r^2} + \\
 & + 2(\tau \sin 2\alpha)_{,rr} \sin \theta \cos \theta + 2(\tau \sin 2\alpha)_{,r\theta} \frac{\cos 2\theta}{r} - \\
 & - 2(\tau \sin 2\alpha)_{,\theta\theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} - 2(\tau \sin 2\alpha)_{,\theta} \frac{\cos 2\theta}{r^2} - \\
 & \left. - 2(\tau \sin 2\alpha)_{,r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \right\} \equiv \Phi(r, \theta).
 \end{aligned}$$

Z kołowej symetrii zadania wynika, że kąt pochylenia trajektorii naprężeń głównych stanu $\sigma_{ij}^{(p)}$ spełnia warunek $\alpha^{(p)} \equiv \theta$. Dla zachowania kołowej symetrii należy przyjąć także

$$(4.5) \quad \alpha \equiv \theta, \quad \sigma = \sigma(r), \quad \tau = \tau(r).$$

Uwzględniając to, równanie (4.4) możemy przedstawić w postaci

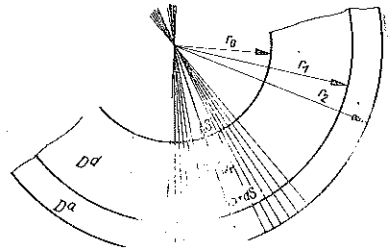
$$(4.6) \quad (1-\nu) \left(\sigma_{,rr} + \frac{1}{r} \sigma_{,r} \right) = (1+\nu) \left(\tau_{,rr} + \frac{3}{r} \tau_{,r} \right) \equiv \Phi(r).$$

Wyrażając w tym równaniu σ i τ przez naprężenia główne:

$$(4.7) \quad \sigma = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2}, \quad \tau = \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2},$$

otrzymamy równanie

$$\begin{aligned}
 (4.8) \quad \nu \sigma_{,rr} + \frac{2+\nu}{r} \sigma_{,r} = \sigma_{\theta,rr} + \\
 + \frac{1+2\nu}{r} \sigma_{\theta,r} \equiv \Phi(r),
 \end{aligned}$$



Rys. 2

odpowiadające równaniu (2.10)₁.

Ponieważ $\alpha \equiv \alpha^{(p)} \equiv \theta$, więc (2.10)_{2,3,4} prowadzą, w przypadku obszaru D ograniczonego dwoma okręgami $r=r_0$ i $r=r_1$ (rys. 2) do warunków następujących:

$$(4.9) \quad \int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{2E} (\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - 2\nu \sigma_r \sigma_\theta) dr = \min$$

oraz

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \underline{\sigma} - \sigma_r^{(p)} &\leq \sigma_r \leq \bar{\sigma} - \sigma_r^{(p)}, \\ \underline{\sigma} - \sigma_\theta^{(p)} &\leq \sigma_\theta \leq \bar{\sigma} - \sigma_\theta^{(p)}. \end{aligned}$$

W ten sposób uzyskano jedno równanie (4.8) i warunek optymalizacji (4.9) z ograniczeniami (4.10) względem dwu niewiadomych $\sigma_r(r)$ i $\sigma_\theta(r)$. Przyjmując $\sigma_{\theta,r} = f(r)$, otrzymujemy z (4.8) równanie różniczkowe zwyczajne postaci

$$(4.11) \quad f_{,r} + \frac{1+2\nu}{r} f = \Phi(r).$$

Rozwiązaniem ogólnym tego równania jest funkcja:

$$(4.12) \quad f(r) = \sigma_{\theta,r} = e^{-(1+2\nu)\ln r} \left[c_1 - \int \Phi(r) e^{(1+2\nu)\ln r} dr \right],$$

zatem

$$(4.13) \quad \sigma_\theta = \int \left[r^{-(1+2\nu)} c_1 - r^{-(1+2\nu)} \int \Phi(r) r^{1+2\nu} dr \right] dr + c_2.$$

Wykonując całkowanie przez części wewnątrz nawiasu oraz całkowanie funkcji w klamrze otrzymujemy

$$(4.14) \quad \sigma_\theta = -\frac{1}{2\nu} \left[\int \Phi(r) r dr - \frac{1}{r^{2\nu}} \int \Phi(r) r^{1+2\nu} dr + \frac{c_1}{r^{2\nu}} \right] + c_2.$$

W wyniku analogicznych operacji można otrzymać

$$(4.15) \quad \sigma_r = -\frac{1}{2} \left[\int \Phi(r) r dr - r^{-\frac{2}{\nu}} \int \Phi(r) r^{\frac{2+\nu}{\nu}} + \nu r^{-\frac{2}{\nu}} c_3 \right] + c_4.$$

Mając określony stan naprężenia $\sigma_{ij}^{(p)}$ w obszarze D , można wydzielić cztery następujące rodzaje podobszarów D^a, D^b, D^c i D^d :

- podobszary, w których $\underline{\sigma} \leq \sigma_r^{(p)} \leq \bar{\sigma}$ i $\sigma \leq \sigma_\theta^{(p)} \leq \bar{\sigma}$;
- podobszary, w których $\sigma_r^{(p)} > \bar{\sigma}$ lub $\sigma_r^{(p)} < \underline{\sigma}$ i $(\sigma_\theta^{(p)} > \bar{\sigma}$ lub $\sigma_\theta^{(p)} < \underline{\sigma})$;
- podobszary, w których $(\sigma_r^{(p)} > \bar{\sigma}$ lub $\sigma_r^{(p)} < \underline{\sigma})$ i $\sigma \leq \sigma_\theta^{(p)} \leq \bar{\sigma}$;
- podobszary, w których $(\underline{\sigma} \leq \sigma_r^{(p)} \leq \bar{\sigma})$ i $(\sigma_\theta^{(p)} > \bar{\sigma}$ lub $\sigma_\theta^{(p)} < \underline{\sigma})$.

Jeżeli nie uwzględnimy warunku nierozdzielności odkształceń (4.8) na brzegach obszarów D^a, D^b, D^c i D^d , to zadanie poszukiwania pola naprężeń σ_{ij} (4.8) i (4.10) prowadzi do postawienia tego problemu w poszczególnych obszarach pod warunkiem, że zapewnimy spełnienie kontaktowych warunków zgodności na brzegach $C^{(k,l)}$ ($k, l = a, b, c, d$) (2.11):

$$(4.16) \quad \sigma_r^{(k)} n_r^{(k,l)} = -\sigma_r^{(l)} n_r^{(l,k)}.$$

W obszarach D^a należy przyjąć $\sigma_{ij} \equiv 0$.

W obszarach D^b należy przyjąć na podstawie (4.10)

$$(4.17) \quad \sigma_r = \bar{\sigma} - \sigma_r^{(p)}, \quad \sigma_\theta = \bar{\sigma} - \sigma_\theta^{(p)},$$

gdzie symbol $\bar{\sigma}$ oznacza odpowiednio $\bar{\sigma}$ lub $\underline{\sigma}$, zależnie od tego, która z wartości ograniczających $\bar{\sigma}$ i $\underline{\sigma}$ została przekroczona przez odpowiednią składową tensora $\sigma_{ij}^{(p)}$. Taki stan naprężenia σ_{ij} wprowadza do ustroju, przy zachowaniu warunków (4.10) minimum energii sprężystości a zatem spełnia kryterium (4.9). Ponieważ $\sigma_{ij}^{(p)}$ spełnia warunki równowagi i ciągłości deformacji, więc także warunek (4.8). Funkcja $\sigma_{ij}^{(p+a)}$ spełnia związek (4.8) tożsamościowo, gdyż $\sigma_r^{(p+a)} = \text{const}$ i $\sigma_\theta^{(p+a)} = \text{const}$; stąd $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(p+a)} - \sigma_{ij}^{(p)}$ także musi spełniać to równanie (zasada superpozycji).

W obszarach D^c na podstawie (4.10)₁ należy przyjąć

$$(4.18) \quad \sigma_r = \bar{\sigma} - \sigma_r^{(p)}$$

oraz σ_θ wyznaczyć z warunku (4.8).

W obszarach D^d na podstawie (4.10)₂ należy przyjąć

$$(4.19) \quad \sigma_\theta = \bar{\sigma} - \sigma_\theta^{(p)}$$

oraz σ_r wyznaczyć z warunku (4.8).

Tak wprowadzone stany σ_{ij} spełniają także warunek (4.9).

Jeżeli przy szukaniu rozwiązań w obszarach D^d narzucimy na składowe σ_r wyznaczone na podstawie równania (4.8) warunki brzegowe, to otrzymane pole naprężenia σ_{ij} spełnia warunki równowagi w całym obszarze D , może jednak nie spełniać warunku nierozdzielności odkształceń (4.8) na brzegach poszczególnych podobszarów, co omówiono szczegółowo na przykładzie zagadnienia Lamégo.

Znając funkcje $\sigma_r(r)$ i $\sigma_\theta(r)$, można wyznaczyć z równania równowagi,

$$(4.20) \quad \sigma_{r,r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + X_r = 0,$$

rozkład siły X_r oraz z warunków brzegowych obciążenie q_r i q_θ takie, które wymuszają stan σ_{ij} .

Pozostaje jeszcze do omówienia realizacja układu obciążeń X_r , q_r , q_θ przez wiązkę cięgien sprężających.

Zdefiniujmy dla dowolnego zagadnienia we współrzędnych kartezjańskich symetryczny tensor stanu napięcia wiązki:

$$(4.21) \quad \overset{(s)}{\sigma}{}^{ij} \stackrel{\text{def}}{=} S a^i a^j, \quad a^i a^i \equiv 1,$$

gdzie S oznacza gęstość siły w cięgnię, a^i jednostkowy wektor kierunkowy cięgna.

Przyjmijmy przy tym, że układ poddany jest działaniu pola sił masowych $\overset{(s)}{X}{}^i = -X^i$ w obszarze D i obciążeń brzegowych $\overset{(s)}{q}{}^i = -q^i$ na powierzchni. Przy tych założeniach układ (2.7)–(2.10)₁ można przedstawić w postaci następującej:

równania równowagi dla obszaru

$$(4.22) \quad (S a^i a^j)_{,j} + \overset{(s)}{X}{}^i = 0, \quad a^i a^i \equiv 1,$$

brzegowe równania równowagi

$$(4.23) \quad Sa^t a^j n_j = q^t;$$

warunek cięgien rozciąganych

$$(4.24) \quad S \geq 0 \Leftrightarrow Sa^t a^j \delta_{ij} \geq 0 \Leftrightarrow \sigma^{tt} \geq 0,$$

gdzie symbol δ_{ij} oznacza deltę Kroneckera.

Równania (4.22)₁ jako równania tensorowe można napisać w dowolnym, krzywoliniowym układzie współrzędnych, posługując się różniczkowaniem kowariantnym:

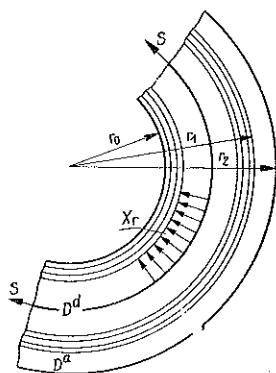
$$(4.25) \quad (Sa^t a^j)|_j + X^t = 0.$$

Odnosząc równania (4.25) do układu współrzędnych biegunowych r, θ , otrzymujemy:

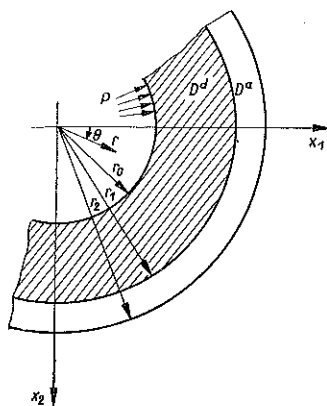
$$(4.26) \quad \begin{aligned} (Sa^r a^r)_{,r} + \frac{(Sa^r a^\theta)_{,\theta}}{r} + \frac{S(a^r a^r - a^\theta a^\theta)}{r} + X^r &= 0, \\ \frac{(Sa^\theta a^\theta)_{,\theta}}{r} + (Sa^r a^\theta)_{,r} + \frac{2Sa^r a^\theta}{r} + X^\theta &= 0. \end{aligned}$$

W przypadku wiązki ułożonej kołowo symetrycznie i poddanej kołowo symetrycznemu układowi obciążeń należy przyjąć $S = S(r)$, $a^r = a^r(r)$, $a^\theta = a^\theta(r)$, $X^r = X^r(r)$, $X^\theta = 0$, co pociąga za sobą znikanie pochodnych względem θ .

Jeżeli dopuścimy wystąpienie tylko jednej rodziny cięgien, to musi to być a) wiązka cięgien radialnych (rys. 2) lub b) wiązka cięgien obwodowych (rys. 3).



Rys. 3



Rys. 4

W przypadku a) należy przyjąć $a^r \equiv 1$ i $a^\theta \equiv 0$, co spełnia (4.22)₂ i sprowadza układ (4.26) do jednego równania

$$(4.27) \quad S_{,r} + \frac{S}{r} = X_r.$$

W przypadku b) należy przyjąć $a^r \equiv 0$ i $a^\theta \equiv 1$, co spełnia (4.22)₂ i sprowadza układ (4.26) do równania

$$(4.28) \quad S = -rX_r.$$

Widać, że warunek (4.24) jest w tym przypadku równoważny warunkowi

$$(4.29) \quad X_r \leq 0.$$

Warunki brzegowe (4.23) prowadzą do warunków następujących:

$$(4.30) \quad \begin{aligned} Sn_r &= -q_r & \text{dla} & \quad r=r_0, \\ q_0 &= 0 & \text{dla} & \quad \theta=\theta_0 \end{aligned}$$

lub

$$(4.31) \quad \begin{aligned} q_r &= 0 & \text{dla} & \quad r=r_0, \\ Sn_\theta &= -q_\theta & \text{dla} & \quad \theta=\theta_0. \end{aligned}$$

5. PRZYKŁAD

Rozważmy tarczę pierścieniową o promieniu wewnętrznym r_0 i zewnętrznym r_2 poddaną ciśnieniu wewnętrznemu (rys. 4). Stan naprężenia $\sigma_{ij}^{(p)}$ tego ustroju opisują składowe [4]

$$(5.1) \quad \sigma_r^{(p)} = -\frac{pr_0^2}{r_2^2 - r_0^2} \left(\frac{r_2^2}{r^2} - 1 \right), \quad \sigma_\theta^{(p)} = -\frac{pr_0^2}{r_2^2 - r_0^2} \left(\frac{r_2^2}{r^2} + 1 \right).$$

Założmy, że mamy do czynienia z materiałem o naprężeniach dopuszczalnych $\bar{\sigma} = p$, $\underline{\sigma} = -2p$. Z zależności (5.1) wynika, że dla $r_2 = 2r_0$ istnieje obszar D^d , w którym $\sigma_\theta^{(p)} > \bar{\sigma}$ i $\underline{\sigma} < \sigma_r^{(p)} < \bar{\sigma}$ oraz obszar D^a , w którym $\underline{\sigma} < \sigma_r^{(p)} < \bar{\sigma}$ i $\underline{\sigma} < \sigma_\theta^{(p)} < \bar{\sigma}$ (rys. 5). Granicę obszarów D^d i D^a oznaczoną przez r_1 wyznaczyć można z warunku

$$(5.2) \quad [\sigma_\theta^{(p)}]_{r=r_1} = p.$$

Zatem z równania (5.1) otrzymuje się

$$(5.3) \quad r_1 = \sqrt{\frac{r_2^2 r_0^2}{r_2^2 - 2r_0^2}}.$$

Będziemy poszukiwać pola naprężeń sprężających σ_{ij} spełniających warunki (4.8)–(4.10).

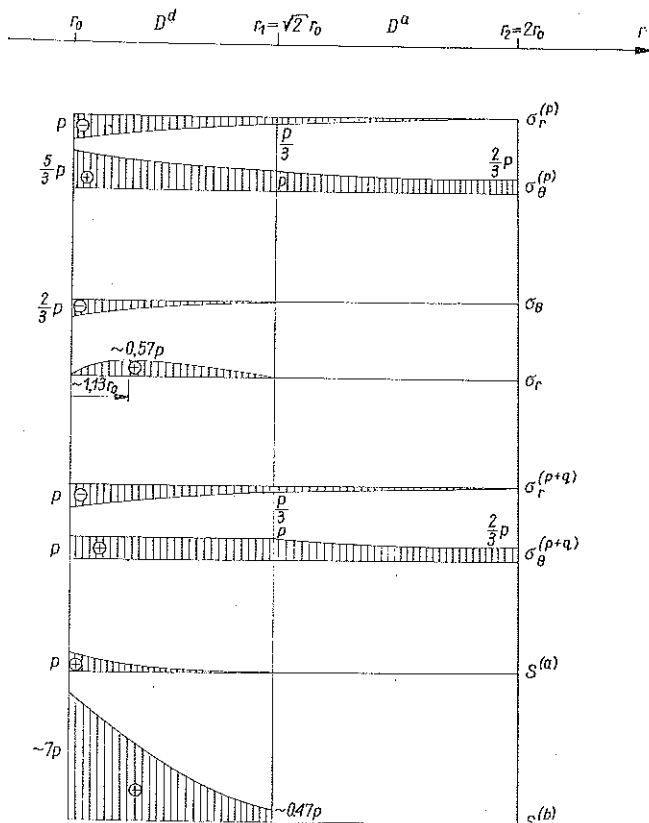
Jeżeli dopuścimy powstanie nieciągłości stanu deformacji na obwodzie $r=r_1$, to rozwiązanie nasze sprowadza się (w myśl rozważań z p. 4) do przyjęcia w obszarze D^a $\sigma_{ij} \equiv 0$, a w obszarze D^d

$$(5.4) \quad \sigma_\theta = p - \sigma_\theta^{(p)} = p - \frac{pr_0^2}{r_1^2 - r_0^2} \left(\frac{r_1^2}{r^2} + 1 \right), \quad r_0 \leq r \leq r_1.$$

Zajmiemy się określeniem składowej σ_r w przedziale $r_0 \leq r \leq r_1$.

Wstawiając (5.4) do (4.8) otrzymuje się

$$(5.5) \quad \Phi(r) = - \frac{4(\nu-1) p r_0^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \frac{1}{r^4}.$$



Rys. 5

Wprowadzając tak wyznaczoną funkcję $\Phi(r)$ do związku (4.15) otrzymano:

$$(5.6) \quad \sigma_r = \frac{p r_0^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \frac{1}{r^2} - \frac{\nu C_3}{2r^{2/\nu}} + C_4.$$

Na rozwiązanie σ_r należy narzucić warunek brzegowy (4.16), który przyjmuje postać

$$(5.7) \quad [\sigma_r]_{r=r_1} = 0.$$

Ze względu na to, że wywołując pole σ_{ij} przy pomocy wiązki cięgien obwodowych należy spełnić na brzegu $r=r_0$ warunek (4.31)₁, na funkcję σ_r należy narzucić drugie ograniczenie

$$(5.8) \quad [\sigma_r]_{r=r_0} = 0.$$

Na podstawie warunków (5.7) i (5.8) wyznaczyć można stałe C_3 i C_4 z układu równań

$$(5.9) \quad \begin{aligned} \frac{pr_1^2}{r_1^2 - r_0^2} - \frac{\nu}{2r_0^{2/\nu}} C_3 + C_4 &= 0, \\ \frac{pr_0^2}{r_1^2 - r_0^2} - \frac{\nu}{2r_1^{2/\nu}} C_3 + C_4 &= 0. \end{aligned}$$

Otrzymuje się

$$(5.10) \quad \begin{aligned} C_3 &= \frac{2p}{\nu} \frac{r_1^{2/\nu} r_0^{2/\nu}}{r_1^{2/\nu} - r_0^{2/\nu}}, \\ C_4 &= -\frac{p(r_1^{2/\nu} r_0^2 - r_1^2 r_0^{2/\nu})}{(r_1^2 - r_0^2)(r_1^{2/\nu} - r_0^{2/\nu})}. \end{aligned}$$

Zatem

$$(5.11) \quad \sigma_r = \frac{pr_1^2 r_0^2}{r_1^2 - r_0^2} \frac{1}{r^2} - \frac{pr_1^{2/\nu} r_0^{2/\nu}}{r_1^{2/\nu} - r_0^{2/\nu}} \frac{1}{r^{2/\nu}} - \frac{p(r_1^{2/\nu} r_0^2 - r_1^2 r_0^{2/\nu})}{(r_1^2 - r_0^2)(r_1^{2/\nu} - r_0^{2/\nu})}, \quad r_0 \leq r \leq r_1.$$

Wstawiając (5.4) i (5.11) do (4.20) wyznaczyć można rozkład sił masowych X_r :

$$(5.12) \quad X_r = -\frac{(2-\nu)pr_1^{2/\nu} r_0^{2/\nu}}{\nu(r_1^{2/\nu} - r_0^{2/\nu})} \frac{1}{r^{2/\nu+1}} - \frac{pr_0^{2/\nu}}{r_1^{2/\nu} - r_0^{2/\nu}} \frac{1}{r}, \quad r_0 \leq r \leq r_1.$$

Ponieważ $0 < \nu < \frac{1}{2}$ oraz $r_1 > r_0$, więc $X_r < 0$ w całym przedziale $\langle r_0, r_1 \rangle$.

Ponieważ σ_r na brzegach obszaru D^d znika, przeto obciążenia brzegowe q_r także znikają. Wynika stąd, że na to aby uzyskać optymalnie sprężenie rozpatrywanej tarczy pierścieniowej, należy wprowadzić w obszarze $r_0 \leq r \leq r_1$ pole radialnych sił masowych X_r (5.12).

Pozostaje do omówienia problem realizacji pola sił masowych (5.12). Rozpatrzmy dwie możliwości: a) sprężanie wiązką cięgien radialnych, b) sprężanie wiązką cięgien obwodowych

a. *Przypadek cięgien radialnych* (rys. 2). Warunek równowagi wiązki (4.27) jest liniowym równaniem różniczkowym zwyczajnym. Jego rozwiązanie ogólne ma postać

$$(5.13) \quad S(r) = e^{-1nr} \left[c + \int X_r e^{1nr} dr \right],$$

skąd

$$(5.14) \quad S = \frac{c}{r} + \frac{1}{r} \int r X_r dr.$$

Wstawiając (5.12) do (5.14) otrzymano

$$(5.15) \quad S = \frac{pr_0^{2/\nu}}{r_1^{2/\nu} - r_0^{2/\nu}} \left[\left(\frac{r_1}{r} \right)^{2/\nu} + \frac{c}{r} - 1 \right].$$

Stałą c wyznaczmy z warunku minimum wprowadzonej objętości cięgien:

$$(5.16) \quad \int_{r_0}^{r_1} S dr = \min.$$

Pochodna funkcji S ,

$$(5.17) \quad S_{,r} = -\frac{pr_0^{2/\nu}}{r_1^{2/\nu} - r_0^{2/\nu}} \left\{ \frac{1}{r^2} \left[\frac{2r_1}{\nu} \left(\frac{r_1}{r} \right)^{2/\nu-1} + c \right] + 1 \right\},$$

jest w całym przedziale $\langle r_0, r_1 \rangle$ dla $c \geq 0$ ujemna, co wynika z faktu, że $0 < \nu < 1/2$ oraz $r_1 \geq r \geq r_0 > 0$. Zatem S jest funkcją malejącą i w celu spełnienia warunku wyboru (5.16) oraz ograniczenia (4.24) należy stałą c wyznaczyć z warunku

$$(5.18) \quad [S]_{r=r_1} = 0,$$

skąd otrzymujemy $c=0$; zatem

$$(5.19) \quad S = \frac{pr_0^{2/\nu}}{r_1^{2/\nu} - r_0^{2/\nu}} \left[\left(\frac{r_1}{r} \right)^{2/\nu} - 1 \right].$$

Jeżeli chcemy spełnić warunek brzegowy (5.8), to nie można wprowadzać zakotwień cięgien na obwodzie $r=r_0$, lecz należy przeprowadzić je przez otwór środkowy i kotwić w symetrycznie rozłożonych przeciwległych punktach tarczy (rys. 2).

b. *Przypadek cięgien obwodowych* (rys. 3). Ponieważ $X_r < 0$ w omawianym przedziale, przeto spełniony jest warunek (4.29). Wstawiając (5.12) do (4.28) otrzymano:

$$(5.20) \quad S = \frac{pr_0^{2/\nu}}{r_1^{2/\nu} - r_0^{2/\nu}} \left[\frac{2-\nu}{\nu} \left(\frac{r_1}{r} \right)^{2/\nu} + 1 \right], \quad r_0 \leq r \leq r_1.$$

Jeżeli przyjmiemy np. że tarcza wykonana jest z materiału, dla którego $\nu=1/4$ oraz że $r_2=2r_0$ [wtedy na podstawie (5.3) $r_1=\sqrt{2}r_0$], to wstawiając te parametry do wzorów (5.1), (5.4), (5.11) i (5.14), otrzymać można rozkłady uzyskanych naprężeń i gęstości sprężenia w zależności od parametru ciśnienia p , co naszkicowano na rys. 5.

Uzyskane w efekcie pole naprężenia $\sigma_{ij}^{(p+a)}$ spełnia w całym obszarze D warunki równowagi, jednak nie spełnia warunku ciągłości deformacji na linii $r=r_1$ (nieciągłość funkcji $\sigma_{\theta,r}$ i $\sigma_{r,r}$). Aby zapewnić ciągłość deformacji w całym obszarze D , należy wstępnie sprężyć pierścień D^a , a następnie (w stanie odkształconym) wpasować go bez wzajemnych oddziaływań do pierścienia D^a . Jeżeli za stan początkowy przyjmiemy określony stan: stan naprężenia σ_{ij} (rys. 5) i stan odkształcenia $\varepsilon_{ij} \equiv 0$, to po przyłożeniu obciążenia p uzyskany zostanie poszukiwany stan naprężenia $\sigma_{ij}^{(p+a)}$ (rys. 5) oraz ciągły stan deformacji odpowiadający polu naprężeń $\sigma_{ij}^{(p)}$ (rys. 5).

Jeżeli tarcza wykonana ma być z betonu sprężonego, można uzyskiwać taki efekt przez wstępne wykonanie sprężonego pierścienia D^a , a następnie dobetonowanie pierścienia D^a .

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. HOLNICKI, *Pewne metody wyrównywania naprężeń głównych w płaskich ośrodkach sprężystych*. Rozpr. Inż. 2, 1971.
2. J. HOLNICKI, *Wyznaczanie układów cięgien sprężających odpowiadających danemu polu sił masowych*, Arch. Inżyn. Łąd., 3, 1971.
3. M. KUCZYŃSKA, W. MARKS, *Kształtowanie elementów betonowych sprężonych układem gęsto rozmieszczonych cięgien*, Arch. Inżyn. Łąd., XV, 3, 1970.
4. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.
5. S. TIMOSHENKO, N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa 1962.
6. Z. WASIUTYŃSKI, *Zadanie o wyznaczeniu kształtu belki betonowej równej wytrzymałości sprężonej dowolnie gęsto, dowolnie cienkimi strunami*, VII Konf. PZITB PAN, Krynica 1961.

Резюме

ОПТИМАЛЬНОЕ СЖАТИЕ СРЕД ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ
В ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

В статье обсуждается вопрос оптимизации предварительно напряженных плит постоянной толщины в плоском напряженном состоянии. Принимается, что описываемая среда является упругой, однородной и изотропной.

В работе формулируется вопрос определения такого напряженного состояния σ_{ij} , происходящего от сжатия, которое ввело бы в систему минимум упругой энергии и одновременно, обеспечило бы непревышение ни в одной точке области и прочности материала при напряженном состоянии $\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{(p)}$ (где $\sigma_{ij}^{(p)}$ — напряженное состояние происходящее от внешних нагрузок). Обсуждается также метод вынуждения так определенного поля напряжения путем введения системы произвольно тонкой размещенной непрерывно арматуры.

Во второй части работы этот вопрос описывается в полярных координатах для кругосимметрических случаев. Этот вопрос иллюстрируется на примере задачи Ламе.

SUMMARY

OPTIMAL PRESTRESSING OF LAYERS OF CONSTANT
THICKNESS SUBJECT TO A PLANE STATE OF STRESS

The medium considered is assumed to be elastic, homogeneous and isotropic. The problem is formulated of such a state of stress σ_{ij} resulting from prestressing which would introduce into the system the minimum amount of energy and which, together with the stresses produced by external loads, would not exceed a prescribed value of reduced stress at any point of the region of the layer.

The method is also discussed of introducing the stress fields thus determined by means of a suitably shaped, dense lattice of elastic cables.

In the second part of the paper are discussed the cases of rotational symmetry of the structure; the solution is illustrated by an example of the Lamé problem.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 sierpnia 1971 r.