

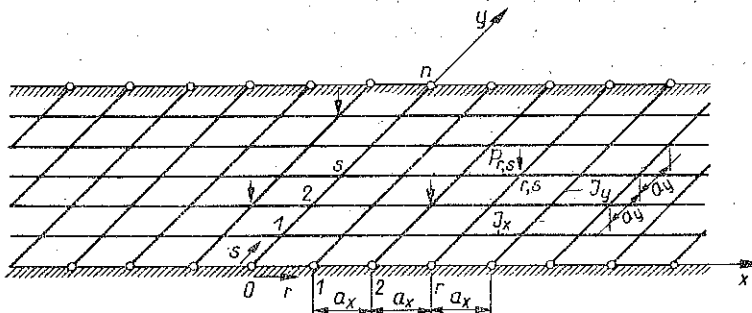
ZGINANIE PASMA I PÓLPASMA RUSZTOWEGO

BOGDAN HUSIAR i ROMUALD ŚWITKA (POZNAŃ)

I. WSTĘP

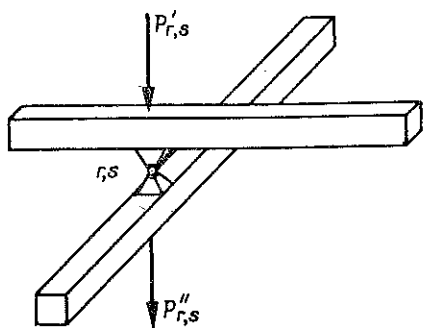
Spośród licznych publikacji poświęconych rusztom o budowie regularnej wymienimy tylko niektóre, a w szczególności te prace, w których zastosowano metodę równań różnicowych. Problemy zginania rusztów płaskich o regularnej siatce prostokątnej były omawiane w monografii F. BLEICHA i E. MELANA [2]. Obszerne omówienie statyki rusztów znajduje się również w znanej monografii W. NOWACKIEGO [9]. S. L. LEE i M. MAKINO [7] rozwiązali ruszt o siatce prostokątnej podparty w narożach. Pewien typ konstrukcji rusztowej rozważał D. L. DEAN [3]. Zginanie rusztu z węzłami sztywnymi omawiał T. WAH [14]. W. GUTKOWSKI i J. BAUER w pracy [5] rozwiązali zagadnienie zginania rusztu w kształcie siatki biegunowej. E. VITÁSEK w pracy [13] podał rozwiązanie dla nieograniczonego rusztu na podporach sprężystych otrzymane przy zastosowaniu podwójnej dyskretnej transformacji Fouriera. Problemy drgań rusztów płaskich rozważali T. WAH [15] oraz E. MACIĄG [8]. Niektóre przypadki zginania i drgań rusztów prostokątnych, złożonych z belek podpartych na końcach przegubowo, rozwiązał B. N. KUTUKOW [6] przy zastosowaniu funkcji własnych pręta prostego, traktowanego jako regularny układ dyskretny. Uogólnienie metody rozwijania rozwiązań w szereg według funkcji własnych jest zawarte w nieopublikowanej jeszcze pracy [12], w której wyprowadzono wzory na wartości i funkcje własne dyskretnego układu belkowego przy rozmaitych warunkach brzegowych, sporządzono obszerne tablice wartości i funkcji własnych i zdefiniowano skończoną, dyskretną transformację własną.

W niniejszej publikacji rozważać będziemy ruszt o siatce regularnej, w kształcie nieskończonego pasma z poprzecznkami podpartymi przegubowo (rys. 1). Układ



Rys. 1

taki może mieć zastosowanie jako przekrycie płytkich tuneli w systemie komunikacji miejskich. Następnie rozwiążemy zagadnienie zginania półpasma rusztowego, uwzględniając różne warunki podparcia na brzegu $x=0$.



Rys. 2

Ugięcia i siły wewnętrzne będziemy traktować jako funkcje dwóch zmiennych dyskretnych r, s ; r odpowiada numeracji węzłów wzdłuż osi x ($r = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty$), s — wzdłuż osi y ($s = 0, 1, 2, \dots, n$). Przyjmijmy, że podłużnice oparte są przegubowo na poprzecznicach (rys. 2). Na ruszt działają siły skupione, prostopadłe do płaszczyzny rusztu i zaczepione w węzłach; siła $P'_{r,s}$ działa na podłużnicę w węzle (r, s) , siła $P''_{r,s}$ — na poprzecznice, tak jak to przedstawia rys. 2, przy czym

$$(1.1) \quad P'_{r,s} + P''_{r,s} = P_{r,s}.$$

To rozróżnienie jest istotne dla określenia wzajemnych oddziaływań belek rusztu w węzłach obciążonych.

Przyjmijmy, że rozstawy poprzecznic i podłużnic są stałe i wynoszą odpowiednio a_x i a_y . Podobne założenie czynimy w odniesieniu do sztywności giętych podłużnic EJ_x i poprzecznic EJ_y . Rozważać będziemy tylko małe ugięcia liniowo-sprężyste.

2. RÓWNANIA RÓŻNICOWE RUSZTU

Ugięcia i siły wewnętrzne rusztu są opisywane przez równania różnicowe cząstkowe. Równania te można wyprowadzić w różny sposób i zapisać w różnej postaci w zależności od tego, jakie wielkości przyjmiemy jako niewiadome. Wydaje się, że najdogodniej jest przyjąć w tym celu ugięcia węzłów rusztu $w_{r,s}$ i siły wzajemnego oddziaływania belek krzyżujących się w węzłach $X_{r,s}$.

Zanim napiszemy równania rusztu, rozpatrzmy zginanie pojedynczego pręta prostego, traktowanego jako układ dyskretny [12]. Na osi pręta wyróżniamy punkty, zwane dalej węzłami, które kolejno numerujemy: $\dots, r-1, r, r+1, \dots$. Rozstaw węzłów niech będzie stały i wynosi a . Na pręt działają tylko siły skupione, prostopadłe do jego osi i przyłożone w węzłach. Przy tych założeniach mamy

$$(2.1) \quad \Delta^2 M_r = -P_r a,$$

gdzie Δ^2 oznacza operator drugiej różnicy centralnej, M_r moment zginający pręt w węzle r oraz P_r siłę skupioną, przyłożoną w węzle r .

Obliczmy kąt obrotu przekroju węzłowego φ_r najpierw jako odnoszący się do odcinka $r-1, r$:

$$(2.2) \quad \varphi_r = \frac{1}{a} (w_r - w_{r-1}) - \frac{a}{6EJ} (M_{r-1} + 2M_r),$$

a następnie jako odnoszący się do odcinka $r, r+1$:

$$(2.2') \quad \varphi_r = \frac{1}{a} (w_{r+1} - w_r) + \frac{a}{6EJ} (2M_r + M_{r+1}).$$

Odejmując stronami (2.2) od (2.2') dostajemy

$$(2.3) \quad \Delta^2 w_r = -\frac{a^2}{6EJ} (\Delta^2 + 6) M_r,$$

skąd można obliczyć M_r , jeśli uwzględni się związek (2.1):

$$(2.4) \quad M_r = -\frac{EJ}{a^2} \Delta^2 w_r + \frac{a}{6} P_r.$$

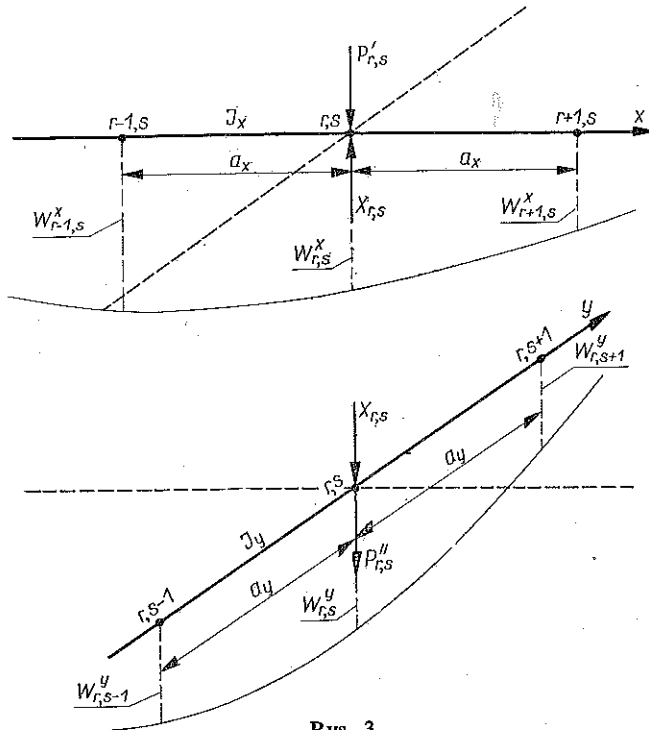
Jeśli na równaniu (2.3) wykonamy operację Δ^2 i wykorzystamy (2.1), to otrzymamy równanie różnicowe ugięć węzłów:

$$(2.5) \quad \Delta^4 w_r = \frac{a^3}{6EJ} (\Delta^2 + 6) P_r,$$

w którym Δ^4 jest operatorem czwartej różnicy centralnej.

Wzory (2.2), (2.2') i (2.4) pozwalają sformułować warunki brzegowe przy każdym sposobie podparcia pręta.

Równania różnicowe ugięć rusztu otrzymamy pisząc równania ugięć (2.5) dla podłużnic i poprzecznic z uwzględnieniem sił działających na ich węzły (rys. 3)



Rys. 3

i biorąc pod uwagę, że ugięcia podłużnicy i poprzecznicy w węźle r, s są jednakowe. W rezultacie otrzymuje się układ dwóch równań różnicowych cząstkowych w postaci

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \Delta_r^4 w_{r,s} + \mu_x (\Delta_r^2 + 6) (X_{r,s} - P'_{r,s}) &= 0, \\ \Delta_s^4 w_{r,s} - \mu_y (\Delta_s^2 + 6) (X_{r,s} + P'_{r,s}) &= 0, \\ \mu_x &= \frac{a_x^3}{6EJ_x}, \quad \mu_y = \frac{a_y^3}{6EJ_y}. \end{aligned}$$

Wskaźnik obniżony przy symbolu operatora różnicowego wskazuje tę zmienną dyskretną, względem której obliczana jest różnica cząstkowa.

Momenty zginające w węzłach podłużnic $M_{r,s}^x$ i w węzłach poprzecznic $M_{r,s}^y$ dane są za pomocą wzorów

$$(2.7) \quad \begin{aligned} M_{r,s}^x &= -\frac{a_x}{6} \left(\frac{1}{\mu_x} \Delta_r^2 w_{r,s} + X_{r,s} - P'_{r,s} \right), \\ M_{r,s}^y &= -\frac{a_y}{6} \left(\frac{1}{\mu_y} \Delta_s^2 w_{r,s} - X_{r,s} - P'_{r,s} \right). \end{aligned}$$

3. METODA TRANSFORMACJI DYSKRETYCH

Rozwiązanie otrzymamy przy zastosowaniu transformacji dyskretnych. Skończoną dyskretną transformację własną określa wzór [12]

$$(3.1) \quad y_r = \sum_{k=1}^{\sigma} \tilde{y}_k W_{r,k},$$

przy czym transformata \tilde{y}_k dana jest wzorem

$$(3.2) \quad \tilde{y}_k = \sum_{r=0}^n y_r W_{r,k}.$$

Symbol $W_{r,k}$ oznacza k -tą funkcję własną (unormowaną), którą należy dobrać stosownie do danych warunków brzegowych, $n+1$ — liczbę węzłów układu, σ jest stopniem swobody dynamicznej układu (ogólna liczba węzłów minus liczba węzłów unieruchomionych).

Można udowodnić [12], że równanie różnicowe typu

$$(3.3) \quad \Delta^4 y_r + (\Delta^2 + 6) (c_1 y_r + c_2 f_r) = 0, \quad r=0, 1, 2, \dots, n$$

transformuje się do postaci

$$(3.4) \quad (2\lambda_k + c_1) \tilde{y}_k + c_2 \tilde{f}_k = 0,$$

w której λ_k są wartościami własnymi równania

$$\Delta^4 y_r - 2\lambda (\Delta^2 + 6) y_r = 0$$

przy określonych, jednorodnych warunkach brzegowych.

W przypadku warunków brzegowych $y_0 = y_n = 0$, $y_{-1} + y_1 = y_{n-1} + y_{n+1} = 0$, mamy

$$(3.5) \quad W_{r,k} = \sqrt{\frac{2}{n}} \sin \frac{kr\pi}{n}, \quad \lambda_k = \frac{\left(1 - \cos \frac{k\pi}{n}\right)^2}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}},$$

przy czym $\sigma = n - 1$ i we wzorze (3.2) można sumować od $r = 1$ do $r = n - 1$. Wzory na wartości i funkcje własne dla innych warunków brzegowych zostały wyprowadzone w pracy [12].

Dyskretne przekształcenie Fouriera definiuje się następująco:

$$(3.6) \quad \tilde{y}(\alpha) = \sum_{-\infty}^{\infty} y_r e^{i r \alpha}, \quad y_r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{y}(\alpha) e^{-i r \alpha} d\alpha.$$

Zakłada się, że funkcja y_r jest bezwzględnie sumowalna w przedziale $(-\infty, \infty)$, co oznacza, że szereg $\sum_{-\infty}^{\infty} |y_r|$ jest zbieżny.

Dyskretne przekształcenie Fouriera zostało wprowadzone przez I. BABUŠKĘ [1]. Zastosowania praktyczne rozwinął W. NOWACKI [10]. W teorii równań różnicowych szczególne znaczenie mają twierdzenia o transformatach drugiej i czwartej różnicy:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} D_F [A^2 y_r] &= -2(1 - \cos \alpha) \tilde{y}(\alpha), \\ D_F [A^4 y_r] &= 4(1 - \cos \alpha)^2 \tilde{y}(\alpha). \end{aligned}$$

4. ZGINANIE PASMA RUSZTOWEGO

Rozważać będziemy pasmo rusztowe nieograniczone w obu kierunkach i opisane szczegółowo w p. 1. Poszukiwać będziemy rozwiązania układu równań różnicowych (2.6) spełniającego następujące warunki brzegowe:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} w_{r,0} &= 0, & M_{r,0}^y &= 0 & \text{czyli} & & w_{r,-1} + w_{r,1} &= 0, \\ w_{r,n} &= 0, & M_{r,n}^y &= 0 & \text{czyli} & & w_{r,n-1} + w_{r,n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Przyjmujemy, że rozkład sił działających na ruszt jest tego rodzaju, iż gwarantuje zbieżność szeregu $\sum_{r=-\infty}^{\infty} |w_{r,s}|$ dla każdego s . Stąd wynika, że $\lim_{r \rightarrow \pm \infty} w_{r,s} = 0$. W toku dalszych rozważań klasa funkcji opisujących rozkład obciążeń zostanie rozszerzona.

Warunkom brzegowym (4.1) odpowiada transformacja własna określona wzorami (3.1), (3.2) i (3.5). Na układzie równań (2.6) wykonujemy więc skończoną, dyskretną transformację własną względem zmiennej s oraz dyskretną transformację

Fouriera względem zmiennej r . Przetransformowane równania (2.6) przyjmują postać

$$(4.2) \quad \begin{aligned} 2c(\alpha) \tilde{w}_k(\alpha) + \mu_x \tilde{X}_k(\alpha) &= \mu_x \tilde{P}'_k(\alpha), \\ 2\lambda_k \tilde{w}_k(\alpha) - \mu_y \tilde{X}_k(\alpha) &= \mu_y \tilde{P}''_k(\alpha), \end{aligned}$$

przy czym λ_k określone jest wzorem (3.5)₂ oraz

$$(4.3) \quad c(\alpha) = \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{2 + \cos \alpha},$$

$$\{\tilde{P}'_k(\alpha); \tilde{P}''_k(\alpha)\} = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{n-1} \{P'_{r,s}; P''_{r,s}\} e^{ir\alpha} \sin \frac{ks\pi}{n}.$$

Rozwiązując układ równań (4.2) dostajemy

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \tilde{w}_k(\alpha) &= \frac{\mu_x}{2} \frac{\tilde{P}_k(\alpha)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)}, \\ \tilde{X}_k(\alpha) &= \frac{\mu\lambda_k \tilde{P}'_k(\alpha) - c(\alpha) \tilde{P}''_k(\alpha)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} = \frac{\mu\lambda_k \tilde{P}_k(\alpha)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} - \tilde{P}''_k(\alpha), \quad \mu = \frac{\mu_x}{\mu_y}. \end{aligned}$$

Łatwo można stwierdzić, że $\mu\lambda_k + c(\alpha) > 0$.

Przy przekształceniu wzoru (4.4)₂ wykorzystano związek (1.1). Biorąc pod uwagę, że transformację odwrotną określa wzór

$$(4.5) \quad \{w_{r,s}; X_{r,s}\} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{ks\pi}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \{\tilde{w}_k(\alpha); \tilde{X}_k(\alpha)\} e^{-ir\alpha} d\alpha,$$

otrzymujemy

$$(4.6) \quad \begin{aligned} w_{r,s} &= \frac{\mu_x}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{ks\pi}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{P}_k(\alpha) e^{-ir\alpha}}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha, \\ X_{r,s} &= \frac{\mu}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \sin \frac{ks\pi}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{P}_k(\alpha) e^{-ir\alpha}}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{ks\pi}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{P}''_k(\alpha) e^{-ir\alpha} d\alpha. \end{aligned}$$

Dla przykładu przyjmijmy, że na pasmo rusztowe działa tylko jedna siła skupiona P w węźle (p, q) , to znaczy

$$(4.7) \quad P_{r,s} = P \delta_{r,p} \delta_{s,q},$$

gdzie $\delta_{r,p}$ oznacza deltę Kroneckera, która w układach dyskretnych odgrywa taką samą rolę, jak funkcja Diraca w układach ciągłych. Transformata funkcji (4.7) obliczona wzorem (4.3)₂ ma postać

$$(4.8) \quad \tilde{P}_k(\alpha) = P \sqrt{\frac{2}{n}} e^{ip\alpha} \sin \frac{kq\pi}{n}.$$

Uwzględniając (4.8) w (4.6) otrzymujemy następujące wzory na ugięcia i wzajemne oddziaływania belek w węzłach pasma rusztowego:

$$(4.9) \quad w_{r,s} = \frac{P\mu_x}{n\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{kq\pi}{n} \sin \frac{ks\pi}{n} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha (p-r)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha,$$

$$X_{r,s} = \frac{2P\mu}{n\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \sin \frac{kq\pi}{n} \sin \frac{ks\pi}{n} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha (p-r)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha - P'' \delta_{r,p} \delta_{s,q}.$$

Momenty zginające w węzłach rusztu obliczamy za pomocą wzorów (2.7):

$$(4.10) \quad M_{r,s}^x = \frac{Pa_x}{3n\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{kq\pi}{n} \sin \frac{ks\pi}{n} \int_0^\pi \frac{1 - \cos \alpha + c(\alpha)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} \cos \alpha (p-r) d\alpha,$$

$$M_{r,s}^y = \frac{Pa_y \mu}{3n\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n} + \lambda_k\right) \sin \frac{kq\pi}{n} \sin \frac{ks\pi}{n} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha (p-r)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha.$$

Całki wchodzące w skład rozwiązań (4.9) i (4.10) można łatwo obliczyć metodami numerycznymi.

Rozważmy teraz przypadek, gdy tylko jedna z belek poprzecznych jest obciążona siłami równymi, działającymi w kolejnych węzłach. Przyjmijmy więc, że

$$(4.11) \quad P_{r,s} = P\delta_{r,p}.$$

Uwzględniając, że [11]

$$(4.12) \quad \sum_{s=1}^{n-1} \sin \frac{ks\pi}{n} = \begin{cases} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n}, & \text{jeśli } k=1, 3, \dots, \\ 0, & \text{jeśli } k=2, 4, \dots, \end{cases}$$

otrzymujemy następującą postać transformaty funkcji (4.11):

$$(4.13) \quad \tilde{P}_k(\alpha) = \begin{cases} P \sqrt{\frac{2}{n}} e^{i\beta\alpha} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n}, & k=1, 3, \dots, \\ 0, & k=2, 4, \dots \end{cases}$$

i rozwiązania dane są wzorami

$$(4.14) \quad w_{r,s} = \frac{P\mu_x}{n\pi} \sum_{k=1, 3, \dots}^{k \leq n-1} \sin \frac{ks\pi}{n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha (p-r)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha,$$

$$X_{r,s} = \frac{2P\mu}{n\pi} \sum_{k=1, 3, \dots}^{k \leq n-1} \lambda_k \sin \frac{ks\pi}{n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha (p-r)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha - P'' \delta_{r,p}.$$

Weźmy następnie pod uwagę obciążenie

$$P_{r,s} = P\delta_{r,p} \sin \frac{s\pi}{n}.$$

W tym przypadku

$$\tilde{P}_k(\alpha) = P \sqrt{\frac{n}{2}} e^{i p \alpha} \delta_{1,k}$$

oraz

$$(4.15) \quad \begin{aligned} w_{r,s} &= \frac{P\mu_x}{2\pi} \sin \frac{s\pi}{n} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha (p-r)}{\mu\lambda_1 + c(\alpha)} d\alpha, \\ X_{r,s} &= \frac{P\mu}{\pi} \lambda_1 \sin \frac{s\pi}{n} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha (p-r)}{\mu\lambda_1 + c(\alpha)} d\alpha - P'' \delta_{r,p} \sin \frac{s\pi}{n}. \end{aligned}$$

W końcu niech będzie dane obciążenie

$$(4.16) \quad P_{r,s} = P s \delta_{r,p}.$$

Transformatę funkcji (4.16)

$$\tilde{P}_k(\alpha) = P \sqrt{\frac{2}{n}} e^{i p \alpha} \sum_{s=1}^{n-1} s \sin \frac{k s \pi}{n}$$

obliczymy wykorzystując wzór z [11] (s. 45). W rezultacie otrzymuje się

$$\tilde{P}_k(\alpha) = P \sqrt{\frac{n}{2}} e^{i p \alpha} (-1)^{k+1} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n}$$

i następnie

$$(4.17) \quad \begin{aligned} w_{r,s} &= \frac{P\mu_x}{2\pi} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k s \pi}{n} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha (p-r)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha, \\ X_{r,s} &= \frac{P\mu}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \lambda_k \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k s \pi}{n} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha (p-r)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha - P'' s \delta_{r,p}. \end{aligned}$$

Powróćmy jeszcze do wzoru (4.9)₁. Przyjmując w nim $P=1$, otrzymamy funkcję Greena dla równań (2.6):

$$(4.18) \quad G_{r,s;p,q} = \frac{\mu_x}{n\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k q \pi}{n} \sin \frac{k s \pi}{n} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha (p-r)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha.$$

Ugięcia pasma rusztowego przy dowolnym obciążeniu można obliczyć za pomocą wzoru

$$(4.19) \quad w_{r,s} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{n-1} G_{r,s;p,q} P_{p,q}.$$

Przyjmijmy w szczególności, że wszystkie węzły pasma rusztowego obciążone są równymi siłami P :

$$P_{r,s} = P = \text{const.}$$

We wzorze (4.19) pojawi się w takim przypadku szereg

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \cos \alpha (p-r) = 2 \cos \alpha r \left(\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} \cos \alpha p \right), \quad \alpha \in [-\pi, \pi]$$

rozbieżny w zwykłym sensie, lecz zbieżny w sensie dystrybucyjnym. Uogólnioną sumę można obliczyć bądź metodą Poissona-Abela, bądź metodą Cesary [4]:

$$(4.20) \quad \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} \cos \alpha p = \pi \delta(\alpha),$$

gdzie $\delta(\alpha)$ oznacza funkcję Diraca.

Uwzględniając powyższe wywody oraz wzór (4.13), dostajemy na koniec

$$(4.21) \quad w_{r,s} = \frac{Pa_y^3}{6nEI_y} \sum_{k=1,3,\dots}^{k \leq n-1} \frac{1}{\lambda_k} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{ks\pi}{n}.$$

Taki sam wzór otrzymuje się dla ugięć belki swobodnie podpartej, traktowanej jako układ dyskretny i obciążonej w węzłach $s=1, 2, \dots, n-1$ jednakowymi siłami P .

Następnie niech będą obciążone równomiernie wszystkie węzły leżące na prawo od osi y i na niej:

$$P_{r,s} = \begin{cases} P, & r=0, 1, 2, \dots, \infty, \\ 0, & r=-1, -2, \dots, -\infty. \end{cases}$$

Obliczając ugięcia określone wzorem (4.19) dostajemy szereg

$$\sum_{p=0}^{\infty} \cos \alpha (p-r) = \cos \alpha r \sum_{p=0}^{\infty} \cos \alpha p + \sin \alpha r \sum_{p=0}^{\infty} \sin \alpha p.$$

Bierzemy pod uwagę, że $\sum_{p=0}^{\infty} \cos \alpha p = \pi \delta(\alpha) + \frac{1}{2}$ [por. wzór (4.20)] oraz [4]

$$(4.22) \quad \sum_{p=1}^{\infty} \sin \alpha p = \begin{cases} 0, & \alpha=0, \\ \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, & -\pi \leq \alpha < 0, \quad 0 < \alpha \leq \pi, \end{cases}$$

(zbieżność dystrybucyjna!). W rezultacie otrzymuje się

$$(4.23) \quad w_{r,s} = \frac{P\mu_x}{2n\pi} \sum_{k=1,3,\dots}^{k \leq n-1} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{ks\pi}{n} \left[\frac{\pi}{\mu\lambda_k} + \int_0^{\pi} \frac{\cos \alpha r + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \sin \alpha r}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha \right].$$

W podobny sposób obliczymy kolejno:

$$(4.24) \quad X_{r,s} = \frac{P\mu}{n\pi} \sum_{k=1,3,\dots}^{k \leq n-1} \lambda_k \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{ks\pi}{n} \left[\frac{\pi}{\mu\lambda_k} + \int_0^{\pi} \frac{\cos \alpha r + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \sin \alpha r}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha \right] +$$

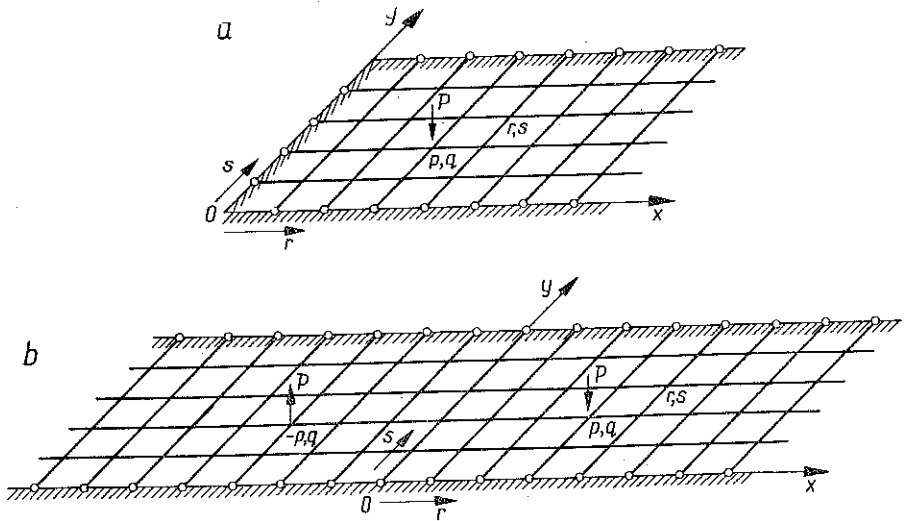
$$+ \begin{cases} -P'', & r=0, 1, 2, \dots, & s=1, 2, \dots, n-1, \\ 0, & r=-1, -2, \dots, & s=0, & s=n; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 M_{r,s}^x &= \frac{Pa_x}{6n\pi} \sum_{k=1,3,\dots}^{k \leq n-1} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{ks\pi}{n} \int_0^\pi \frac{1 - \cos \alpha + c(\alpha)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} \times \\
 (4.25) \quad & \times \left(\cos \alpha r + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \sin \alpha r \right) d\alpha, \\
 M_{r,s}^y &= \frac{Pa_y \mu}{6n\pi} \sum_{k=1,3,\dots}^{k \leq n-1} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n} + \lambda_k \right) \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{ks\pi}{n} \left[\frac{\pi}{\mu\lambda_k} + \right. \\
 & \left. + \int_0^\pi \frac{\cos \alpha r + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \sin \alpha r}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha \right].
 \end{aligned}$$

5. PÓLPASMO PODPARTE PRZEGUBOWO NA BRZEGU $x=0$

Przyjmijmy na razie, że półpasmo przedstawione na rys. 4a jest obciążone tylko jedną siłą skupioną $P=P'+P''$ działającą w węźle (p, q) . Poszukujemy rozwiązań równań (2.6) spełniających warunki brzegowe (4.1) oraz warunki na brzegu $x=0$, określone równaniami

$$(5.1) \quad w_{0,s} = 0, \quad w_{-1,s} + w_{1,s} = 0.$$



Rys. 4

Rozwiązanie dla półpasma można otrzymać wykorzystując znane już rozwiązanie (4.6) dla pasma nieograniczonego. W tym celu pasmo należy odpowiednio obciążyć, postępując analogicznie do metody stosowanej przy obliczaniu półpasma płytowego [16]. W rozważanym zadaniu pasmo rusztowe obciążamy antysymetrycznie dwiema siłami, zgodnie z rys. 4b. Mamy więc

$$(5.2) \quad P_{r,s} = P\delta_{s,q} (\delta_{r,p} - \delta_{r,-p}).$$

Łatwo obliczamy transformatę funkcji (5.2):

$$(5.3) \quad \tilde{P}_k(\alpha) = 2iP \sqrt{\frac{2}{n}} \sin \frac{kq\pi}{n} \sin \alpha p.$$

Po podstawieniu (5.3) do (4.6) otrzymujemy następujące rozwiązanie dla $r = 0, 1, 2, \dots, \infty$; $s = 0, 1, \dots, n$:

$$(5.4) \quad w_{r,s} = \frac{2P\mu_x}{n\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{kq\pi}{n} \sin \frac{ks\pi}{n} \int_0^\pi \frac{\sin \alpha p \sin \alpha r}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha,$$

$$X_{r,s} = \frac{4P\mu}{n\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \sin \frac{kq\pi}{n} \sin \frac{ks\pi}{n} \int_0^\pi \frac{\sin \alpha p \sin \alpha r}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha - P'' \delta_{r,p} \delta_{s,q}.$$

Momenty zginające obliczamy za pomocą wzorów

$$(5.5) \quad M_{r,s}^x = \frac{2Pa_x}{3n\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{kq\pi}{n} \sin \frac{ks\pi}{n} \int_0^\pi \frac{1 - \cos \alpha + c(\alpha)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} \sin \alpha p \sin \alpha r d\alpha,$$

$$M_{r,s}^y = \frac{2Pa_y \mu}{3n\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n} + \lambda_k\right) \sin \frac{kq\pi}{n} \sin \frac{ks\pi}{n} \int_0^\pi \frac{\sin \alpha p \sin \alpha r}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha.$$

Jeśli na półpasma rusztowe działają siły rozłożone dowolnie, to ugięcia obliczymy za pomocą wzoru

$$(5.6) \quad w_{r,s} = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{n-1} G_{r,s;p,q} P_{p,q},$$

w którym funkcja Greena ma postać

$$(5.7) \quad G_{r,s;p,q} = \frac{2\mu_x}{n\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{kq\pi}{n} \sin \frac{ks\pi}{n} \int_0^\pi \frac{\sin \alpha p \sin \alpha r}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha.$$

Szczególnie interesujący będzie przypadek równomiernego obciążenia wszystkich węzłów pasma rusztowego: $P_{r,s} = P = \text{const}$. W rozwiązaniu pojawi się szereg $\sum_{p=1}^{\infty} \sin \alpha p$ rozbieżny w zwykłym sensie, lecz zbieżny w sensie dystrybucyjnym. Jego suma uogólniona jest dystrybucją (4.22).

Uwzględniając (4.12) i (4.22) w (5.6) otrzymujemy funkcję ugięć półpasma rusztowego obciążonego równomiernie w poszczególnych węzłach:

$$(5.8) \quad w_{r,s} = \frac{P\mu_x}{n\pi} \sum_{k=1,3,\dots}^{k \leq n-1} \text{ctg} \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{ks\pi}{n} \int_0^\pi \frac{\text{ctg} \frac{\alpha}{2} \sin \alpha r}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha.$$

Wzajemne oddziaływania belek w węzłach są równe

$$(5.9) \quad X_{r,s} = \frac{2P\mu}{n\pi} \sum_{k=1,3,\dots}^{k \leq n-1} \lambda_k \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{n} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \sin \alpha r}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha - P''(1 - \delta_{r,0}\delta_{0,s}\delta_{n,s}).$$

Dla momentów zginających otrzymuje się następujące wzory:

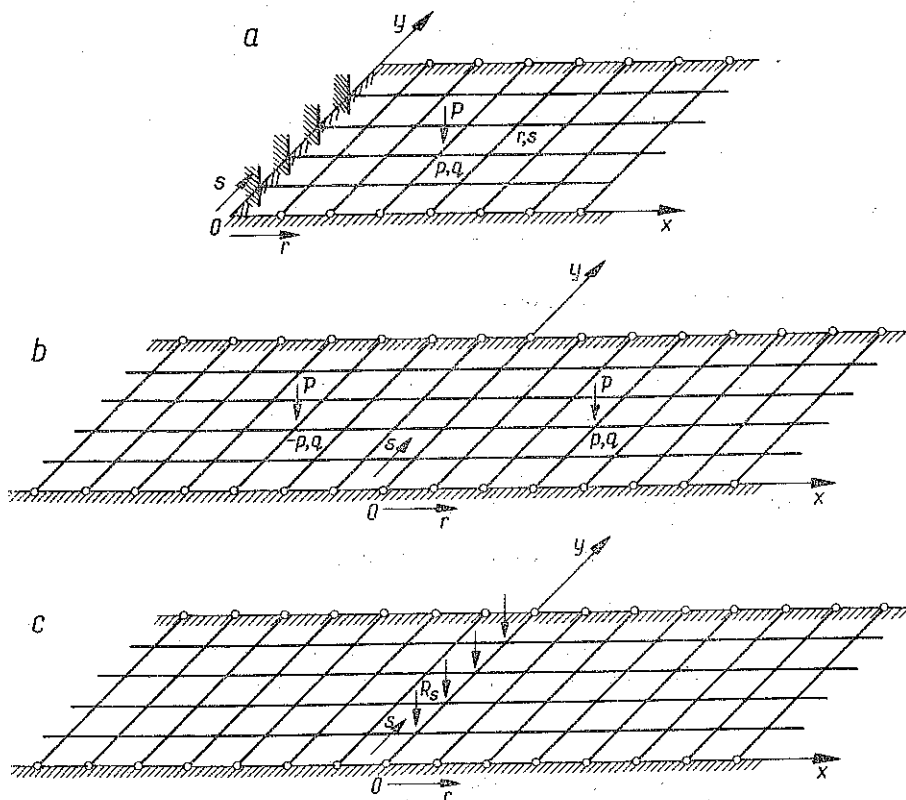
$$(5.10) \quad M_{r,s}^x = \frac{Pa_x}{3n\pi} \sum_{k=1,3,\dots}^{k \leq n-1} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{n} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos \alpha + c(\alpha)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \sin \alpha r d\alpha,$$

$$M_{r,s}^y = \frac{Pa_y \mu}{3n\pi} \sum_{k=1,3,\dots}^{k \leq n-1} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n} + \lambda_k\right) \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{n} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \sin \alpha r}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha.$$

6. PÓLPASMO UTWIERDZONE NA BRZĘGU $x=0$

6.1. Ogólne omówienie zadania

Rozwiążemy najpierw zadanie przedstawione na rys. 5a: półpasmo rusztowe jest podparte przegubowo na brzegach $y=0$ i $y=na_y$, na brzegu $x=0$ podłużnice



Rys. 5

są utwierdzone; obciążenie półpasma stanowi siła skupiona P przyłożona w węzle (p, q) . Poszukujemy rozwiązania równań (2.6), spełniającego warunki brzegowe (4.1), oraz następujące warunki na brzegu $x=0$:

$$(6.1) \quad w_{0,s} = 0, \quad \varphi_{0,s}^x = 0.$$

Również w tym przypadku możliwe jest wykorzystanie rozwiązań (4.6) dotyczących pasma nieskończonego. W tym celu rozwiązanie złożymy z dwóch części:

$$(6.2) \quad w_{r,s} = w_{r,s}^{(1)} + w_{r,s}^{(2)}.$$

Rozwiązanie $w_{r,s}^{(1)}$ odnosi się do pasma obciążonego symetrycznie względem osi y siłami P działającymi w węzłach (p, q) i $(-p, q)$ (rys. 5b). Rozwiązanie to spełnia warunek $\varphi_{0,s}^{x(1)} = 0$, jednakże nie spełnia warunku $w_{0,s}^{(1)} = 0$. W celu spełnienia warunku (6.1)₁ budujemy rozwiązanie $w_{r,s}^{(2)}$ dla pasma obciążonego w węzłach $(0, s)$ siłami R_s (rys. 5c). W tym przypadku mamy znowu $w_{0,s}^{(2)} \neq 0$, $\varphi_{0,s}^{x(2)} = 0$. Suma obydwu rozwiązań spełnia natychmiast warunek brzegowy (4.1)₂. Siły R_s dobierzemy w ten sposób, żeby został spełniony również warunek brzegowy (4.1)₁. Przyjmiemy $R_s' = 0$, $R_s' = R_s$. Siły R_s będą reakcjami podpór $(0, s)$ w układzie wyjściowym (rys. 5a).

6.2. Rozwiązanie $w_{r,s}^{(1)}$ (rys. 5b)

Przyjmując obciążenie pasma w postaci

$$P_{r,s} = P \delta_{s,q} (\delta_{r,p} + \delta_{r,-p}),$$

dostajemy

$$(6.3) \quad \tilde{P}_k(\alpha) = 2P \sqrt{\frac{2}{n}} \sin \frac{kq\pi}{n} \cos \alpha p$$

i następnie

$$(6.4) \quad \begin{aligned} w_{r,s}^{(1)} &= \frac{2P\mu_x}{n\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{kq\pi}{n} \sin \frac{ks\pi}{n} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha p \cos \alpha r}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha, \\ X_{r,s}^{(1)} &= \frac{4P\mu}{n\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \sin \frac{kq\pi}{n} \sin \frac{ks\pi}{n} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha p \cos \alpha r}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha - P'' \delta_{r,p} \delta_{a,s}, \\ M_{r,s}^{x(1)} &= \frac{2Pa_x}{3n\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{kq\pi}{n} \sin \frac{ks\pi}{n} \int_0^\pi \frac{1 - \cos \alpha + c(\alpha)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} \cos \alpha p \cos \alpha r d\alpha, \\ M_{r,s}^{y(1)} &= \frac{2Pa_y \mu}{3n\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n} + \lambda_k\right) \sin \frac{kq\pi}{n} \sin \frac{ks\pi}{n} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha p \cos \alpha r}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha, \end{aligned}$$

$$r = 0, 1, 2, \dots, \infty; \quad s = 0, 1, 2, \dots, n.$$

6.3. Rozwiązanie $w_{r,s}^{(2)}$ (rys. 5c)

Na pasmo rusztowe działa obciążenie

$$P_{r,s} = R_s \delta_{0,r}.$$

Transformata

$$(6.5) \quad \tilde{P}_k(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{s=1}^{n-1} R_s \sin \frac{ks\pi}{n} = \tilde{R}_k,$$

jak widać, jest niezależna od parametru α .

Uwzględniając (6.5) w (4.6) dostajemy

$$(6.6) \quad \begin{aligned} W_{r,s}^{(2)} &= \frac{\mu_x}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{R}_k \sin \frac{ks\pi}{n} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha r}{\mu \lambda_k + c(\alpha)} d\alpha, \\ X_{r,s}^{(2)} &= \frac{\mu}{\pi} \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{R}_k \lambda_k \sin \frac{ks\pi}{n} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha r}{\mu \lambda_k + c(\alpha)} d\alpha, \\ M_{r,s}^{x(2)} &= \frac{a_x}{6\pi} \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{R}_k \sin \frac{ks\pi}{n} \int_0^\pi \frac{1 - \cos \alpha + c(\alpha)}{\mu \lambda_k + c(\alpha)} \cos \alpha r d\alpha, \\ M_{r,s}^{y(2)} &= \frac{\mu a_y}{6\pi} \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{R}_k \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n} + \lambda_k\right) \sin \frac{ks\pi}{n} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha r}{\mu \lambda_k + c(\alpha)} d\alpha. \end{aligned}$$

6.4. Obliczenie transformaty \tilde{R}_k

Widoczne jest, że zagadnienie półpasma utwierdzonego na brzegu $x=0$ będzie rozwiązane, jeśli znana będzie transformata \tilde{R}_k . Transformatę \tilde{R}_k obliczymy wykorzystując warunek (6.1)₁:

$$w_{0,s}^{(1)} + w_{0,s}^{(2)} = \frac{\mu_x}{\pi \sqrt{2n}} \sum_{k=1}^{n-1} \left[2P \sqrt{\frac{2}{n}} \sin \frac{kq\pi}{n} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha p}{\mu \lambda_k + c(\alpha)} d\alpha + \tilde{R}_k b_k \right] \sin \frac{ks\pi}{n} = 0.$$

Powyższe równanie będzie spełnione dla każdego s , jeśli wyrażenie w nawiasach pod znakiem sumy będzie równe zero. Stąd dostajemy

$$(6.7) \quad \tilde{R}_k = -\frac{2P}{b_k} \sqrt{\frac{2}{n}} \sin \frac{kq\pi}{n} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha p}{\mu \lambda_k + c(\alpha)} d\alpha.$$

We wzorze (6.7) wprowadzono oznaczenie:

$$b_k = \int_0^\pi \frac{d\alpha}{\mu \lambda_k + c(\alpha)}.$$

6.5. Obciążenie siłami rozłożonymi równomiernie w poszczególnych węzłach

Przyjmujemy $P_{r,s} = P = \text{const}$. Transformatę (6.7) obliczamy w tym przypadku przez uwzględnienie wszystkich wpływów obciążeń poszczególnych węzłów:

$$\tilde{R}_k = -\frac{2P}{b_k} \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{n-1} \sin \frac{kq\pi}{n} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha p}{\mu \lambda_k + c(\alpha)} d\alpha.$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\sum_{p=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\cos \alpha p}{\mu \lambda_k + c(\alpha)} d\alpha = \int_0^{\pi} \frac{\pi \delta(\alpha) - \frac{1}{2}}{\mu \lambda_k + c(\alpha)} d\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\mu \lambda_k} - b_k \right)$$

oraz (4.12), otrzymujemy

$$(6.8) \quad \tilde{R}_k = \begin{cases} -P \sqrt{\frac{2}{n}} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \left(\frac{\pi}{\mu \lambda_k} - b_k \right), & k=1, 3, \dots, \\ 0, & k=2, 4, \dots \end{cases}$$

Wynik (6.8) uwzględniamy w (6.6). W podobny sposób przekształcamy wzory (6.4), w których uwzględniamy, że

$$\sum_{p=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\cos \alpha p \cos \alpha r}{\mu \lambda_k + c(\alpha)} d\alpha = \frac{\pi}{2\mu \lambda_k} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\cos \alpha r}{\mu \lambda_k + c(\alpha)} d\alpha.$$

Dodając rozwiązania $w_{r,s}^{(1)}$ i $w_{r,s}^{(2)}$ otrzymujemy ostatecznie dla $r=0, 1, 2, \dots, \infty$; $s=0, 1, 2, \dots, n$:

$$(6.9) \quad \begin{aligned} w_{r,s} &= \frac{P\mu_y}{n} \sum_{k=1,3,\dots}^{k \leq n-1} \frac{1}{\lambda_k} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{n} \left(1 - \frac{1}{b_k} \int_0^{\pi} \frac{\cos \alpha r d\alpha}{\mu \lambda_k + c(\alpha)} \right), \\ X_{r,s} &= \frac{2P}{n} \sum_{k=1,3,\dots}^{k \leq n-1} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{n} \left(1 - \frac{1}{b_k} \int_0^{\pi} \frac{\cos \alpha r}{\mu \lambda_k + c(\alpha)} d\alpha \right) - \\ &\quad - P'' (1 - \delta_{r,0} \delta_{0,s} \delta_{n,s}), \\ M_{r,s}^x &= -\frac{Pa_x}{3n\mu} \sum_{k=1,3,\dots}^{k \leq n-1} \frac{1}{\lambda_k b_k} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{n} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos \alpha + c(\alpha)}{\mu \lambda_k + c(\alpha)} \cos \alpha r d\alpha, \\ M_{r,s}^y &= \frac{Pa_y}{3n} \sum_{k=1,3,\dots}^{k \leq n-1} \frac{1}{\lambda_k} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n} + \lambda_k \right) \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{n} \left(1 - \frac{1}{b_k} \int_0^{\pi} \frac{\cos \alpha r d\alpha}{\mu \lambda_k + c(\alpha)} \right). \end{aligned}$$

7. POŁPASKO Z BRZEGIEM $x=0$ SWOBODNYM

W tym przypadku należy spełnić na brzegu $x=0$ warunki (rys. 6a)

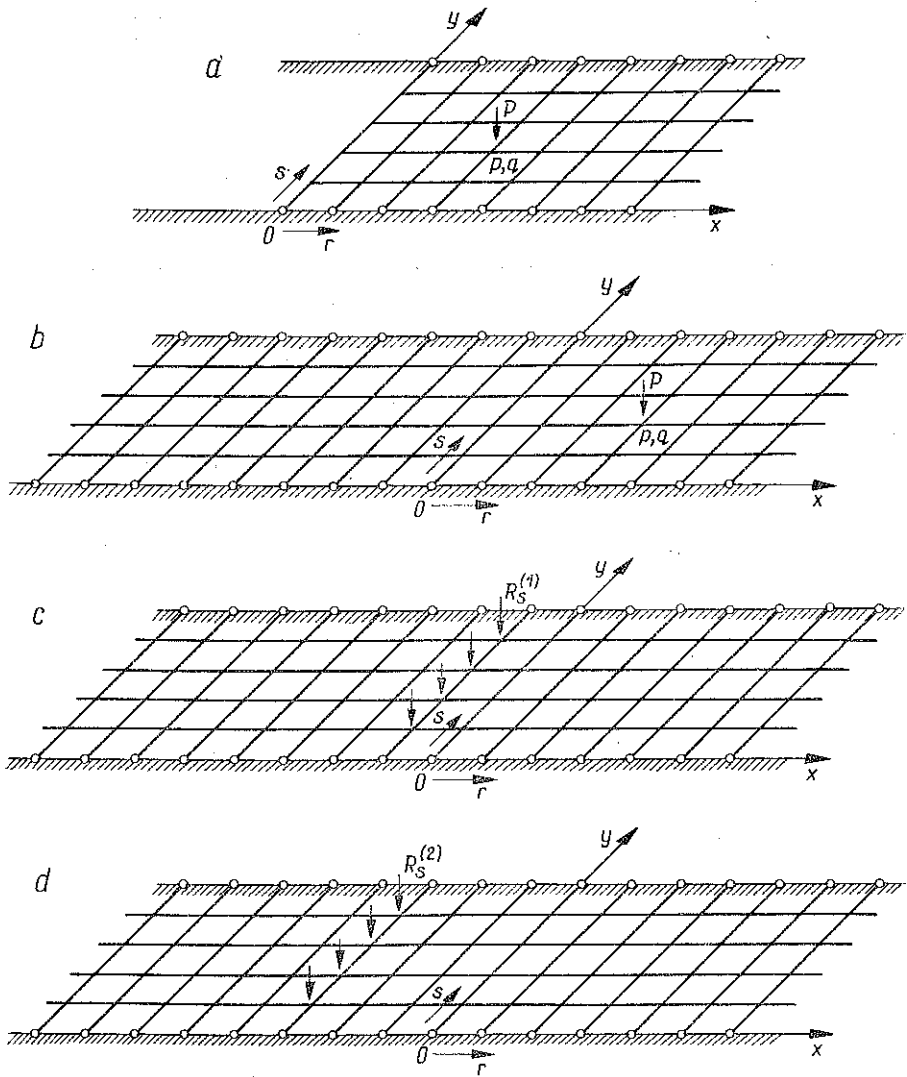
$$(7.1) \quad M_{0,s}^x = 0, \quad M_{-1,s}^x = 0.$$

Możliwe jest uzyskanie rozwiązania przez superpozycję trzech różnych rozwiązań odnoszących się do pasma rusztowego

$$(7.2) \quad w_{r,s} = w_{r,s}^{(0)} + w_{r,s}^{(1)} + w_{r,s}^{(2)}.$$

Rozwiązanie $w_{r,s}^{(0)}$ dotyczy pasma rusztowego obciążonego tak samo, jak obciążone jest rozważane półpasko (rys. 6b). Rozwiązanie $w_{r,s}^{(1)}$ budujemy dla pasma obciążonego w węzłach $(-r_1, s)$ siłami $R_s^{(1)}$ (rys. 6c), a rozwiązanie $w_{r,s}^{(2)}$ odnosi się

do pasma obciążonego w węzłach $(-r_2, s)$ siłami $R_s^{(2)}$ (rys. 6d), przy czym musi być zachowany warunek $-r_2 < -r_1 < 0$.



Rys. 6

Rozkłady sił $R_s^{(1)}$ i $R_s^{(2)}$ dobieramy w ten sposób, żeby spełnić warunki (7.1):

$$(7.3) \quad \begin{aligned} M_{0,s}^{x(0)} + M_{0,s}^{x(1)} + M_{0,s}^{x(2)} &= 0, \\ M_{-1,s}^{x(0)} + M_{-1,s}^{x(1)} + M_{-1,s}^{x(2)} &= 0. \end{aligned}$$

Jeżeli przyjmiemy, że rozważane półpasma jest obciążone tylko jedną siłą skupioną przyłożoną do węzła (p, q) , to rozwiązanie $w_{r,s}^{(0)}$ określone jest wzorami (4.9) i (4.10).

Rozwiązanie $w_{r,s}^{(1)}$ dotyczy pasma, dla którego obciążenie wyraża się funkcją

$$P_{r,s} = R_s^{(1)} \delta_{r,-r_1}.$$

Biorąc pod uwagę postać transformaty

$$\tilde{P}_k(\alpha) = \tilde{R}_k^{(1)} e^{-ir_1 \alpha}, \quad \tilde{R}_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{s=1}^{n-1} R_s^{(1)} \sin \frac{ks\pi}{n},$$

dostajemy

$$\begin{aligned} w_{r,s}^{(1)} &= \frac{\mu_x}{\pi \sqrt{2n}} \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{R}_k^{(1)} \sin \frac{ks\pi}{n} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha (r+r_1)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha, \\ X_{r,s}^{(1)} &= \frac{\mu}{\pi} \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{R}_k^{(1)} \lambda_k \sin \frac{ks\pi}{n} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha (r+r_1)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha, \\ M_{r,s}^{x(1)} &= \frac{a_x}{6\pi} \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{R}_k^{(1)} \sin \frac{ks\pi}{n} \int_0^\pi \frac{1 - \cos \alpha + c(\alpha)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} \cos \alpha (r+r_1) d\alpha, \\ M_{r,s}^{y(1)} &= \frac{\mu a_y}{6\pi} \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{R}_k^{(1)} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n} + \lambda_k\right) \sin \frac{ks\pi}{n} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha (r+r_1)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} d\alpha, \end{aligned}$$

$$r=0, 1, 2, \dots, \infty; \quad s=0, 1, 2, \dots, n.$$

Rozwiązanie $w_{r,s}^{(2)}$ będzie analogiczne do (7.4). Należy tylko na miejsce $\tilde{R}_k^{(1)}$ wstawić $\tilde{R}_k^{(2)}$ i napisać r_2 zamiast r_1 .

Warunki (7.3) prowadzą do układu równań

$$\begin{aligned} d_k^{(11)} \tilde{R}_k^{(1)} + d_k^{(12)} \tilde{R}_k^{(2)} + d_k^{(10)} P \sqrt{\frac{2}{n}} \sin \frac{kq\pi}{n} &= 0, \\ d_k^{(21)} \tilde{R}_k^{(1)} + d_k^{(22)} \tilde{R}_k^{(2)} + d_k^{(20)} P \sqrt{\frac{2}{n}} \sin \frac{kq\pi}{n} &= 0, \end{aligned}$$

w którym

$$\begin{aligned} d_k^{(11)} &= \int_0^\pi \frac{1 - \cos \alpha + c(\alpha)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} \cos \alpha r_1 d\alpha, \\ d_k^{(12)} &= \int_0^\pi \frac{1 - \cos \alpha + c(\alpha)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} \cos \alpha r_2 d\alpha, \\ d_k^{(21)} &= \int_0^\pi \frac{1 - \cos \alpha + c(\alpha)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} \cos \alpha (r_1 - 1) d\alpha, \\ d_k^{(22)} &= \int_0^\pi \frac{1 - \cos \alpha + c(\alpha)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} \cos \alpha (r_2 - 1) d\alpha, \end{aligned}$$

(7.6)
[c.d.]

$$d_k^{(10)} = \int_0^\pi \frac{1 - \cos \alpha + c(\alpha)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} \cos \alpha p \, d\alpha,$$

$$d_k^{(20)} = \int_0^\pi \frac{1 - \cos \alpha + c(\alpha)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} \cos \alpha (p+1) \, d\alpha.$$

Najbardziej wygodnie jest przyjąć $r_1 = 1$, $r_2 = 2$.

Niech na półpasmo działają siły rozłożone równomiernie: $P_{r,s} = P = \text{const}$, $r = 0, 1, 2, \dots, \infty$; $s = 1, 2, \dots, n-1$. W tym przypadku otrzymuje się

$$(7.7) \quad \tilde{R}_k^{(1)} = \begin{cases} -\frac{P}{\sqrt{2n}} \frac{d_k}{D_k} \text{ctg} \frac{k\pi}{2n} \int_0^\pi \frac{1 - \cos \alpha + c(\alpha)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} (\cos 2\alpha + \cos \alpha) \, d\alpha, & k = 1, 3, \dots, \\ 0, & k = 2, 4, \dots \end{cases}$$

oraz

$$(7.8) \quad \tilde{R}_k^{(2)} = \begin{cases} \frac{P}{\sqrt{2n}} \frac{d_k}{D_k} \text{ctg} \frac{k\pi}{2n} \int_0^\pi \frac{1 - \cos \alpha + c(\alpha)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} (1 + \cos \alpha) \, d\alpha, & k = 1, 3, \dots, \\ 0, & k = 2, 4, \dots \end{cases}$$

We wzorach (7.7) i (7.8) wprowadzono oznaczenia:

$$d_k = \int_0^\pi \frac{1 - \cos \alpha + c(\alpha)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} \, d\alpha,$$

$$D_k = \left(\int_0^\pi \frac{1 - \cos \alpha + c(\alpha)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} \cos \alpha \, d\alpha \right)^2 - d_k \int_0^\pi \frac{1 - \cos \alpha + c(\alpha)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} \cos 2\alpha \, d\alpha.$$

Rozwiązanie $w_{r,s}^{(0)}$ określone jest wzorami (4.23–4.25). Dodając poszczególne rozwiązania otrzymujemy następujący wzór na ugięcia półpasma:

$$(7.9) \quad w_{r,s} = \frac{P\mu_x}{2n\pi} \sum_{k=1, 3, \dots}^{k \leq n-1} \text{ctg} \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{ks\pi}{n} \left[\frac{\pi}{\mu\lambda_k} + \int_0^\pi \frac{\cos \alpha r + \text{ctg} \frac{\alpha}{2} \sin \alpha r}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} \, d\alpha - \right. \\ \left. - \frac{d_k}{D_k} \int_0^\pi \frac{1 - \cos \alpha + c(\alpha)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} (\cos 2\alpha + \cos \alpha) \, d\alpha \int_0^\pi \frac{\cos \alpha (r+1)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} \, d\alpha + \right. \\ \left. + \frac{d_k}{D_k} \int_0^\pi \frac{1 - \cos \alpha + c(\alpha)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} (1 + \cos \alpha) \, d\alpha \int_0^\pi \frac{\cos \alpha (r+2)}{\mu\lambda_k + c(\alpha)} \, d\alpha \right],$$

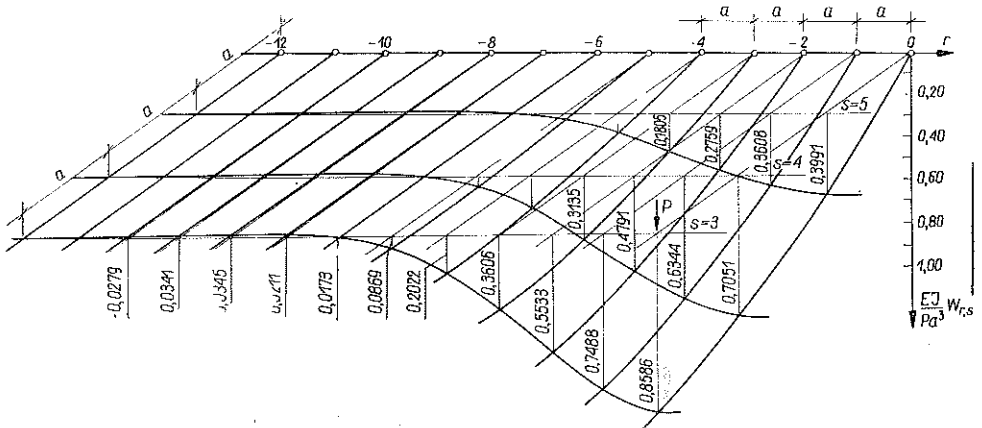
$$r = 0, 1, 2, \dots, \infty, \quad s = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Proste rachunki sprawdzające wskazują, że otrzymane rozwiązanie spełnia dane warunki brzegowe.

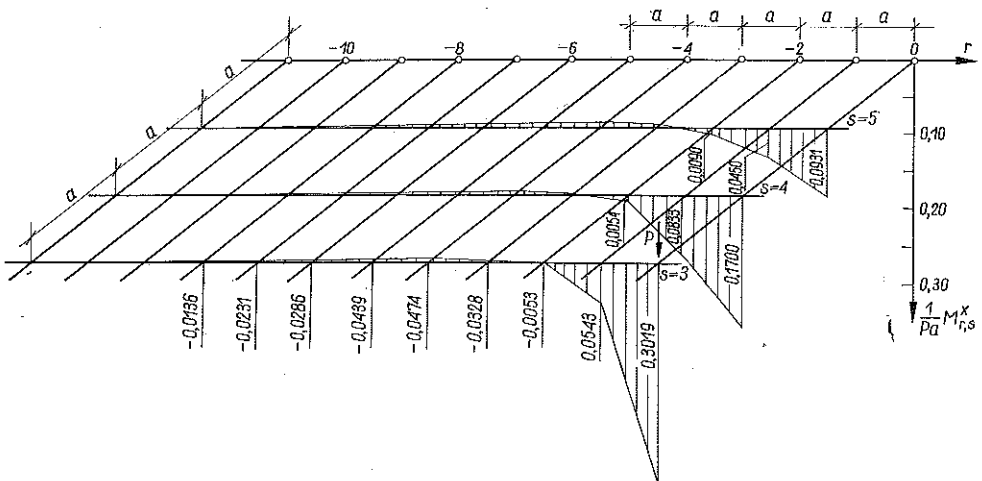
8. PRZYKŁADY LICZBOWE

8.1. Pasma rusztowe obciążone siłą skupioną

Do obliczeń przyjęto następujące dane wyjściowe: $n=6$ (5 podłużnic), $a_x = a_y = a$, $J_x = J_y = J$ czyli $\mu=1$. Pasma rusztowe obciążone jest siłą P w węźle (0, 3). Ugięcia, siły wzajemnych oddziaływań belek w węzłach i momenty zginające obliczamy za pomocą wzorów (4.9) i (4.10) przyjmując $P''=0$ i uwzględniając, że dla $n=6$ i $q=3$ sumowanie przebiega tylko po wskaźnikach $k=1, 3, 5$. Występujące we wzorach całki obliczono metodą numeryczną stosując wzór Simpsona. Przyjęto krok równy $\pi/72$, co zapewniło dostateczną dokładność wyników. Obliczone wartości ugięć, sił wzajemnych oddziaływań belek w węzłach i momentów zginających zestawiono w tablicy 1. Na rysunku 7 przedstawiono siatkę ugięć pasma rusztowego (ze względu na symetrię względem obu osi układu współrzędnych ograniczono się tylko do



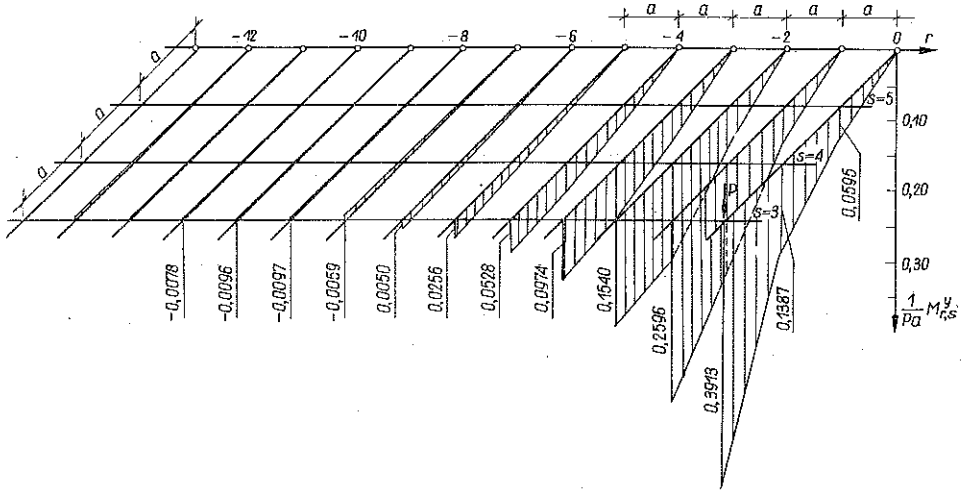
Rys. 7



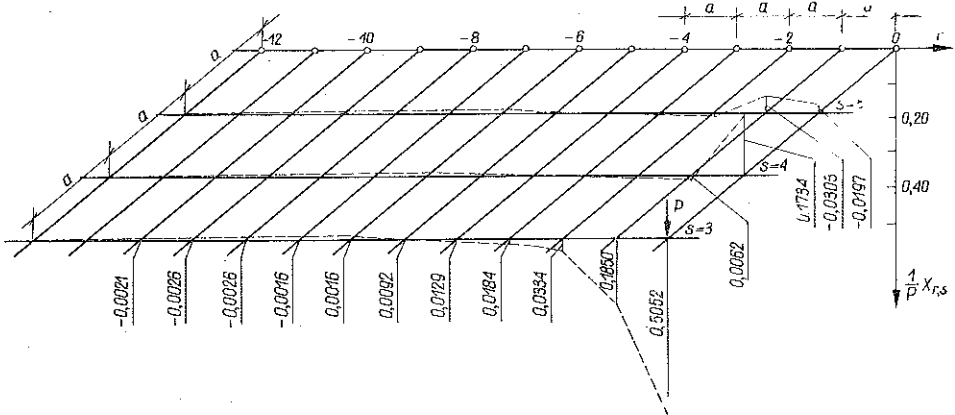
Rys. 8

Tablica 1

	r=0	r=1	r=2	r=3	r=4	r=5	r=6	r=7	r=8	r=9	r=10	r=12	r=18
	$\frac{EI}{Pa^3} w_{r,s}$												
s=3	0,8586	0,7488	0,5533	0,3606	0,2022	0,0869	0,0173	-0,0211	-0,0345	-0,0341	-0,0279	-0,0070	0,0023
s=2,4	0,7051	0,6344	0,4791	0,3135	0,1755	0,0766	0,0149	-0,0182	-0,0299	-0,0295	-0,0242	-0,0060	0,0020
s=1,5	0,3991	0,3608	0,2759	0,1805	0,1016	0,0443	0,0086	-0,0105	-0,0172	-0,0170	-0,0139	-0,0035	0,0012
	$\frac{1}{P} X_{r,s}$												
s=3	0,5052	0,1850	0,0334	0,0184	0,0129	0,0092	0,0016	-0,0016	-0,0026	-0,0026	-0,0021	-0,0005	0,0002
s=2,4	-0,1734	-0,0062	0,0463	0,0243	0,0128	0,0039	0,0012	-0,0014	-0,0023	-0,0022	-0,0018	-0,0005	0,0002
s=1,5	-0,0197	-0,0303	0,0105	0,0210	0,0106	0,0041	0,0010	-0,0007	-0,0012	-0,0014	-0,0010	-0,0003	0,0001
	$\frac{1}{Pa} M_{r,s}^2$												
s=3	0,3913	0,2596	0,1540	0,0974	0,0528	0,0256	0,0050	-0,0059	-0,0097	-0,0096	-0,0078	-0,0020	0,0006
s=2,4	0,1387	0,1671	0,1371	0,0881	0,0467	0,0166	0,0042	-0,0051	-0,0084	-0,0083	-0,0068	-0,0017	0,0006
s=1,5	0,0595	0,0684	0,0738	0,0553	0,0285	0,0126	0,0022	-0,0029	-0,0048	-0,0048	-0,0039	-0,0010	0,0003
	$\frac{1}{Pa} M_{r,s}^3$												
s=3	0,3019	0,0545	-0,0053	-0,0328	-0,0474	-0,0439	-0,0286	-0,0231	-0,0136				
s=2,4	0,1700	0,0833	0,0054	-0,0303	-0,0417	-0,0383	-0,0248	-0,0200	-0,0117				
s=1,5	0,0931	0,0450	0,0090	-0,0179	-0,0247	-0,0255	-0,0143	-0,0115	-0,0068				



Rys. 9



Rys. 10

jednej ćwiartki pasma). Wykresy momentów zginających dane są na rys. 8 i 9, natomiast na rys. 10 przedstawiono rozkład sił wzajemnych oddziaływań belek w węzłach rusztu.

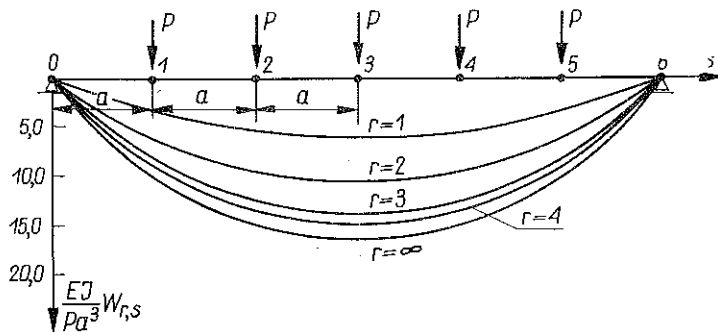
8.2. Półpasma rusztowe, podparte przegubowo na brzegu $x=0$, obciążone równomiernie siłami skupionymi, działającymi w węzłach

Przyjęto tak jak w poprzednim przykładzie $n=6$, $a_x=a_y=a$, $I_x=I_y=I$. Całkę występującą we wzorze (5.8) obliczono następująco. Przedział całkowania podzielono na dwa podprzedziały: $(0, \varepsilon)$ i (ε, π) . W przedziale $(0, \varepsilon)$ funkcje trygonometryczne zastąpiono pierwszymi wyrazami rozwinięć w szeregi (w iloczynach odrzucono potęgi wyższe niż 4) i obliczono całkę przez kwadratury. W przedziale (ε, π) całkę obliczono metodą Simpsona. Przyjęto $\varepsilon=\pi/180$.

Tablica 2

	$\frac{EI}{Pa^3} w_{r,s}$				
	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=\infty$
$s=1, s=5$	2,8836	5,3021	7,0103	8,0659	8,3333
$s=2, s=4$	4,9946	9,1835	12,1423	13,9706	14,3333
$s=3$	5,7672	10,6042	14,0207	16,1318	16,5000

Obliczono ugięcia poprzecznic dla $r=1, 2, 3, 4$ oraz dla $r=\infty$. Poprzecznicza $r=\infty$ jest zginana jak belka wolnopodparta. Wyniki obliczeń zestawiono w tablicy 2. Wykresy ugięć poprzecznic dane są na rys. 11.



Rys. 11

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. I. BABUŠKA, *The Fourier transform in the theory of difference equations and its applications*, Arch. Mech. Stos., **11**, 4, 1959.
2. F. BLEICH, E. MELAN, *Die gewöhnlichen und partiellen Differenzgleichungen der Baustatik*, Berlin 1927.
3. D. L. DEAN, *Lamella beams and grids*, J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, **90**, 2, 1964.
4. G. M. FICHTENHOLZ, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, **2**, PWN, Warszawa 1964.
5. W. GUTKOWSKI, J. BAUER, *On the analysis of polar lattice plates*, Int. J. Mech. Sci., **12**, 1970.
6. Б. Н. КУТУКОВ, *Некоторые задачи статического и динамического расчета регулярных систем*, Расчет пространственных конструкций, вып. IV, Москва 1958.
7. S. L. LEE, M. MAKINO, *Analysis of corner — supported grillages*, Mém. Assoc. Int. Ponts et Charpentes, **20**, 1960.
8. E. MACIĄG, *Wymuszone drgania harmoniczne belek i rusztów płaskich z masami skupionymi*, Arch. Inżyn. Łąd., **12**, 4, 1966.
9. W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, **2**, PWN, Warszawa 1960.
10. W. NOWACKI, *Application of difference equations in the theory of plates (I)*, Arch. Mech. Stos., **13**, 4, 1961.
11. И. М. РЫЖИК, И. С. ГРАДШТЕЙН, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Гос. Издат. Техничко-Теорет. Лит., Москва—Ленинград 1951.

12. R. ŚWITKA, *Drgania i funkcje własne regularnych układów dyskretnych*. Prace Pozn. Tow. Przyj. Nauk [w druku].
13. E. VITÁSEK, *The n-dimensional Fourier transform in the theory of difference equations*, Arch. Mech. Stos., **12**, 2, 1960.
14. T. WAH, *Analysis of laterally loaded gridworks*, J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, **90**, 2, 1964.
15. T. WAH, *Natural frequencies of uniform grillages*, Trans. ASME, **30**, 4, 1963.
16. S. WOJNOVSKI—KRIEGER, *Beitrag zur Theorie der durchlaufenden Platte*, Ing. Arch., **11**, 1938.

Резюме

ИЗГИБ РОСТВЕРКА В ВИДЕ ПОЛОСЫ И ПОЛУПОЛОСЫ

В работе обсуждается ростверк с регулярной сеткой имеющий форму бесконечной полосы и полуполосы. Изгиб ростверка описывается с помощью системы двух разностных уравнений с частными разностями, в которых в качестве неизвестной появляются перемещения узлов ростверка и силы взаимодействия балок ростверка в узлах. Получено решение применяя конечное, дискретное собственное преобразование и дискретное преобразование Фурье. Получается решение для бесконечной полосы, поперечные балки, которых оперты шарнирно и для полуполосы, поперечный край который оперт шарнирно, защелчен или свободный.

Учитывается разного рода нагрузки ростверка. В заключении даны числовые примеры иллюстрированные диаграммами.

SUMMARY

BENDING OF GRIDWORK STRIPS AND SEMI-STRIPS

In the paper considered is a regular grid having the form of a strip or a semi-strip. The problem of bending of a grid is described by a system of two partial difference equations for two unknowns: the deflections of the grid nodes and the interactions between the beams at the nodes. The solution is obtained by means of the finite, discrete eigentransformation and a discrete Fourier transformation. The solutions are derived for an infinite strip with hinged transversal beams, and for a semi-strip with the transversal edge being hinged, built-in or free.

Various kinds of loadings are taken into consideration; the method applied is illustrated by numerical examples and graphs.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 lipca 1971 r.