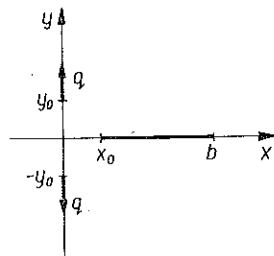


NIESYMETRYCZNE ROZCIĄGANIE TARCZY OSŁABIONEJ SZCZELINĄ

MAREK MATCZYŃSKI (WARSZAWA)

WSTĘP

Opierając się w dużej mierze na wynikach pracy [1] zajmiemy się zagadnieniem pokrewnym, polegającym na rozciąganiu nieograniczonej płaszczyzny dwiema siłami skupionymi, działającymi wzdłuż prostej prostopadłej do płaszczyzny szczeliny o długości $b - x_0$, przy czym oś działania sił oddalona jest od lewego końca szczeliny o odległość x_0 (rys. 1). Przy takim obciążeniu współczynniki intensywności nieskończonej koncentracji naprężeń w obu końcach szczeliny nie są sobie równe. Zgodnie ze znaną hipotezą kruchego zniszczenia materiałów sprężystych, opracowaną przez GRIFFITHA, po przekroczeniu pewnej wartości granicznej określonej przez siły spójności w materiale szczelina rozpocznie rozprzestrzeniać się w kierunku większej koncentracji naprężenia, a więc w naszym przypadku w kierunku ujemnym osi x . Prawy koniec szczeliny (rys. 1) pozostanie natomiast nieruchomy aż do momentu, gdy współczynniki intensywności w obu końcach szczeliny wyrównają się.



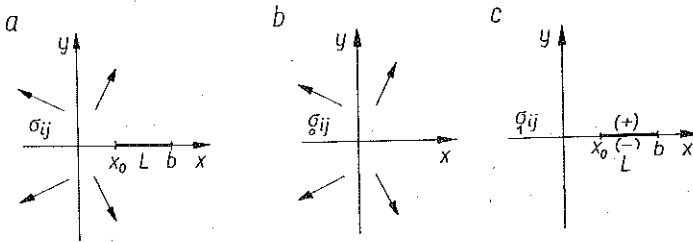
Rys. 1

W celu określenia tego momentu należy przeprowadzić szczegółową analizę zmienności współczynników intensywności w obu końcach szczeliny w procesie przemieszczania się lewego końca szczeliny przy założeniu, że jej prawy koniec pozostaje nieruchomy. Tej analizie poświęcona jest niniejsza praca.

1. ROZWIĄZANIE OGÓLNE

Rozważać będziemy statyczne zagadnienie rozkładu przemieszczeń i naprężeń w nieograniczonym, jednorodnym ośrodku sprężystym z prostoliniową szczeliną L o skończonej długości (rys. 2a). Zakładamy, że brzegi szczeliny wolne są od naprężeń, sama zaś szczelina znajduje się w polu działania dowolnych sił zaczepionych w punktach nie leżących na jej brzegach, przy czym przyjmiemy oczywiście, że układ obciążeń znajduje się w równowadze. Następnie zakładamy, że szczelina L znajduje się w płaskim stanie odkształcenia oraz że wektor przemieszczenia na brzegach szczeliny jest funkcją nieciągłą jedynie w kierunku normalnym do powierzchni szczeliny.

Wykorzystując zasadę superpozycji możemy nasze zagadnienie, polegające na znalezieniu rozkładu przemieszczeń u i v oraz naprężeń σ_{ij} wokół szczeliny sprowadzić do dwóch zagadnień, przy czym pierwsze z nich dotyczy będzie zagadnienia rozkładu przemieszczeń u_0 i v_0 oraz naprężeń σ_{0ij} w ośrodku bez szczeliny (rys. 2b), drugie zaś zagadnienie rozkładu przemieszczeń u_1 i v_1 oraz naprężeń σ_{1ij} w ośrodku ze szczeliną, na której brzegach dane są odpowiednie naprężenia.



Rys. 2

W dalszym ciągu pracy zajmować się będziemy tym ostatnim problemem, tzn. wyznaczmy pole przemieszczeń u_1 i v_1 oraz naprężeń σ_{1ij} wywołane przez samą szczelinę (rys. 2c).

Zgodnie z naszym wcześniejszym założeniem żądamy, aby na odcinku L zachodziły następujące zależności:

$$[u]_1 = 0, \quad [v]_1 \neq 0,$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenie:

$$[g] = g^+(x) - g^-(x), \quad \text{przy czym } g^\pm(x) = \lim_{y \rightarrow \pm 0} g(x, y) \quad \text{dla } x \in L.$$

Dodatkowo zakładamy będziemy, że składowe stanu naprężenia σ_{1ij} znikają w nieskończoności i że wymuszające pole sił σ_0 jest tego rodzaju, że $\sigma_0(x, y) = 0$ dla $|x| < \infty$ i $y = 0$.

Tak postawione zagadnienie odpowiada warunkom zagadnienia rozpatrywanego w pracy [1]. Wykorzystując wobec tego przytoczone tam rozumowanie możemy przedstawić wartości graniczne składowych stanu przemieszczenia u_1 i v_1 oraz składowych stanu naprężenia σ_{1ij} za pomocą na razie nie znanych funkcji $\rho(x)$ ($i=1, 2$) w następującej postaci:

$$(1.1) \quad u_1^\pm(x) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \int_L^1 \rho(x) \ln \frac{b}{|x-\xi|} d\xi - \int_L^2 \frac{\rho(x)}{x-\xi} d\xi \right] \quad \text{dla } |x| < \infty,$$

$$v_1^\pm(x) = \pm \frac{1-2\nu}{4\mu(1-\nu)} \begin{cases} \rho(x), & \text{jeśli } x \in L, \\ 0, & \text{jeśli } x \notin L; \end{cases}$$

$$\sigma_{1xx}^{\pm}(x) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[(3-2\nu) \int_L^1 \frac{\rho^1(\xi)}{x-\xi} d\xi + (1+2\nu) \int_L^2 \frac{\rho^2(\xi)}{x-\xi} d\xi - (1+2\nu)b(x) \right]$$

dla $|x| < \infty$;

$$(1.1) \quad \sigma_{1yy}^{\pm}(x) = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \left[\int_L^1 \frac{\rho^1(\xi)}{x-\xi} d\xi - \int_L^2 \frac{\rho^2(\xi)}{x-\xi} d\xi + b(x) \right] \quad \text{dla } |x| < \infty,$$

[c.d.]

$$\sigma_{1xy}^{\pm}(x) = \mp \frac{1}{2(1-\nu)} \begin{cases} (1-\nu)\rho^1(x) + \nu\rho^2(x), & \text{jeśli } x \in L, \\ 0, & \text{jeśli } x \notin L, \end{cases}$$

gdzie

$$b(x) = \frac{\rho^2(b)}{x-b} - \frac{\rho^2(x_0)}{x-x_0}, \quad \rho'(x) = \frac{d\rho}{dx}$$

oraz gdzie μ oznacza stałą Lamégo oraz ν współczynnik Poissona. Zgodnie z naszymi wcześniejszymi założeniami warunki brzegowe zagadnienia (rys. 2c) przyjmują postać

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{1yy}^{\pm}(x) &= -\sigma_{0yy}^{\pm}(x) = f(x), & \text{jeśli } x \in L, & \quad \sigma_{1j}(\infty) = 0, \\ \sigma_{1xy}^{\pm}(x) &= 0, & \text{jeśli } x \in L. \end{aligned}$$

Z zależności (1.1)₂ i warunków, aby

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} v^{\pm}(x_0 - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} v^{\pm}(x_0 + \varepsilon), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} v^{\pm}(b - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} v^{\pm}(b + \varepsilon),$$

wynika, że $v^{\pm}(x_0) = v^{\pm}(b) = \rho^2(x_0) = \rho^2(b) = 0$ i wobec tego wykorzystując związki (1.1) i (1.2) poszukiwanie funkcji $\rho(x)$ sprowadza się do rozwiązania silnie osobliwego równania całkowego postaci

$$(1.3) \quad \frac{1}{\pi} \int_L^1 \frac{\rho^1(\xi)}{\xi-x} d\xi = -\frac{4\nu(1-\nu)}{1-2\nu} f(x), \quad \text{jeśli } x \in L,$$

gdzie

$$\rho^1(x) = -\frac{\nu}{1-\nu} \rho^2(x), \quad x \in L.$$

Rozwiązując [2] równanie (1.3), a następnie wykorzystując wzór

$$\frac{1}{\pi} \int_{x_0}^b \frac{1}{\sqrt{(\xi-x_0)(b-\xi)}} \frac{d\xi}{\xi-x} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)(x-b)}}, & \text{jeśli } x > b, \\ 0, & \text{jeśli } x_0 < x < b; \\ \frac{1}{\sqrt{(x_0-x)(b-x)}}, & \text{jeśli } x < x_0 \end{cases}$$

i spełniając warunki równowagi na szczelinie otrzymamy ostatecznie, że

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \rho(x) &= \frac{4\nu(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{F(x)}{\sqrt{(x-x_0)(b-x)}}, & x \in L, \\ \rho(x) &= -\frac{4(1-\nu)^2}{1-2\nu} \int_{x_0}^x \frac{F(\xi)}{\sqrt{(\xi-x_0)(b-\xi)}} d\xi, & x \in L, \end{aligned}$$

gdzie

$$(1.5) \quad F(x) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\sqrt{(\xi-x_0)(b-\xi)}}{\xi-x} f(\xi) d\xi.$$

Po wykorzystaniu otrzymanych zależności, wartości graniczne składowych stanu przemieszczenia u_1^\pm i v_1^\pm oraz składowych stanu naprężenia σ_{1ij}^\pm będą następujące:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} u_1^\pm(x) &= \frac{1-2\nu}{2\mu} \int \sigma_{1yy}^\pm(x) dx, & |x| < \infty, \\ v_1^\pm(x) &= \pm \frac{1-2\nu}{4\mu(1-\nu)} \begin{cases} \rho(x), & \text{jeśli } x \in L, \\ 0, & \text{jeśli } x \notin L, \end{cases} \\ \sigma_{1xx}^\pm(x) = \sigma_{1yy}^\pm(x) &= \begin{cases} \frac{F(x)}{\sqrt{(x-x_0)(x-b)}}, & \text{jeśli } x > b, \\ f(x), & \text{jeśli } x \in L, \\ -\frac{F(x)}{\sqrt{(x_0-x)(b-x_0)}}, & \text{jeśli } x < x_0, \end{cases} \\ \sigma_{1xy}^\pm(x) &= 0, & \text{jeśli } |x| < \infty, \end{aligned}$$

a stan przemieszczeń u i v oraz naprężeń σ_{1ij} w otoczeniu szczeliny określony będzie za pomocą następujących wzorów

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \frac{A}{2\mu} [(1-2\nu)\varphi_{,x} + \nu\psi_{,x}], \\ v_1(x, y) &= -\frac{A}{2\mu} [2(1-\nu)\psi - \nu\psi_{,y}], \\ \sigma_{1xx}(x, y) &= -A(\psi_{,y} + \nu\psi_{,yy}), \\ \sigma_{1yy}(x, y) &= -A(\psi_{,y} - \nu\psi_{,yy}), \\ \sigma_{1xy}(x, y) &= A\nu\psi_{,xy}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\varphi(x, y) = \int_L^2 \rho(\xi) \ln \frac{b}{r} d\xi, \quad \psi(x, y) = \varphi_{,y}, \quad A = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)^2}, \quad r^2 = (x-\xi)^2 + y^2.$$

2. SZCZELINA W POLU DWÓCH SIŁ SKUPIONYCH

W tej części pracy zajmiemy się poszukiwaniem rozwiązania opisującego rozkład naprężenia rozciągającego na przedłużeniu wolnej od obciążeń szczeliny w przypadku, gdy szczelina znajduje się w polu działania konkretnego pola sił wymuszonych σ (rys. 1). Jeżeli wzdłuż osi y przyjętego przez nas układu współrzędnych działają zaczepione w punktach $(0, \pm y_0)$ dwie przeciwnie skierowane siły skupione o intensywności q , to stan przemieszczeń u i v oraz naprężeń σ_{ij} dla $|x| < \infty$ i $y=0$ opisany będzie następującymi wzorami:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u_0^\pm(x) &= -\frac{qy_0}{4\pi(1-\nu)} \frac{x}{r_0^2}, & v_0^\pm(x) &= 0, \\ \sigma_{xx}^\pm(x) &= -\frac{qy_0}{2\pi(1-\nu)} \left(\frac{1-2\nu}{r_0^2} - \frac{2x^2}{r_0^4} \right), \\ \sigma_{yy}^\pm(x) &= \frac{qy_0}{2\pi(1-\nu)} \left(\frac{1-2\nu}{r_0^2} + \frac{2y_0^2}{r^2} \right), & \sigma_{xy}^\pm(x) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie $r_0^2 = x^2 + y_0^2$.

Z otrzymanych formuł i na mocy (1.2)₁ i (1.5) wynika, że

$$(2.2) \quad f(x) = -\frac{qy_0}{2\pi(1-\nu)} \left(\frac{1-2\nu}{r_0^2} + \frac{2y_0^2}{r_0^4} \right)$$

oraz

$$(2.3) \quad F(x) = -\frac{qy_0}{2\pi(1-\nu)} [(1-2\nu)I_1(x) + 2y_0^2 I_2(x)],$$

gdzie

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\sqrt{(\xi-x_0)(b-\xi)}}{(\xi^2+y_0^2)^n} \frac{d\xi}{\xi-x}, \quad n=1, 2,$$

przy czym całki $I_n(x)$ dla $x \in L$ są całkami osobliwymi. Po wykonaniu całkowania przy pomocy metod teorii funkcji zmiennej zespolonej [3] otrzymamy

$$(2.4) \quad I_n(x) = \begin{cases} L_n(x) + \frac{\sqrt{(x-x_0)(x-b)}}{(x^2+y_0^2)^n}, & \text{jeśli } x > b > 0, \\ L_n(x), & \text{jeśli } x \in L, \\ L_n(x) - \frac{\sqrt{(x_0-x)(b-x)}}{(x^2+y_0^2)^n}, & \text{jeśli } x < x_0, \end{cases}$$

gdzie

$$(2.5) \quad L_1(x) = \frac{\sqrt{A+y_0^2-x_0b}}{y_0\sqrt{2}(x^2+y_0^2)} \left(\frac{A-y_0^2+x_0b}{b+x_0} - x \right),$$

$$(2.5) \quad L_2(x) = \frac{\sqrt{\Delta + y_0^2 - x_0 b}}{4y_0^3 \sqrt{2\Delta(x^2 + y_0^2)}} \left[\frac{y_0^2(2\Delta - 2y_0^2 - b^2 - x_0^2)}{b + x_0} + \right. \\ \left. + \frac{4y_0^2 \Delta}{x^2 + y_0^2} \left(\frac{\Delta - y_0^2 + bx_0}{b + x_0} - x \right) - x(\Delta - y_0^2 - bx_0) \right], \\ \Delta = \sqrt{(x_0^2 + y_0^2)(b^2 + y_0^2)}.$$

Następnie na podstawie wzorów (2.2), (2.3), (2.4) i (2.5) otrzymamy

$$(2.6) \quad F(x) = \begin{cases} F_1(x) + \sqrt{(x-x_0)(x-b)}f(x), & \text{jeśli } x > b > 0, \\ F_1(x), & \text{jeśli } x \in L, \\ F_1(x) - \sqrt{(x_0-x)(b-x)}f(x), & \text{jeśli } x < x_0, \end{cases}$$

gdzie

$$(2.7) \quad F_1(x) = -\frac{qy_0}{2\pi(1-\nu)} [(1-2\nu)L_1(x) + 2y_0^2 L_2(x)].$$

Funkcje $L_i(x)$ określone są przez wzory (2.5).

Wykorzystując wzory (1.6)₂ i (2.6) oraz dodając do siebie rozwiązania określające rozkład naprężenia $\sigma_{yy}^\pm(x)$ dla ośrodka bez szczeliny i rozkład naprężenia $\sigma_{yy}^\pm(x)$ dla ośrodka ze szczeliną, znajdziemy wartość graniczną naprężenia $\sigma_{yy}^\pm(x)$ na brzegu szczeliny jak i na jej przedłużeniu w naszym zagadnieniu wyjściowym (rys. 1):

$$(2.8) \quad \sigma_{yy}^\pm(x) = \begin{cases} \frac{F_1(x)}{\sqrt{(x-x_0)(x-b)}}, & \text{jeśli } x > b > 0, \\ 0, & \text{jeśli } x \in L, \\ -\frac{F_1(x)}{\sqrt{(x_0-x)(b-x)}}, & \text{jeśli } x < x_0, \end{cases}$$

gdzie funkcja $F_1(x)$ określona jest za pomocą wzoru (2.7).

Obliczając granice funkcji (2.8), gdy $x \rightarrow x_0$ lub $x \rightarrow b$, otrzymamy następującą formułę:

$$(2.9) \quad \sigma_{yy}^\pm(x) = \begin{cases} \frac{K_{x_0}}{\sqrt{x_0 - x}}, & \text{jeśli } x \rightarrow x_0, \\ \frac{K_b}{\sqrt{x - b}}, & \text{jeśli } x \rightarrow b, \end{cases}$$

przy czym współczynniki intensywności naprężenia σ_{yy} w końcach szczeliny określone będą w sposób następujący:

$$(2.10) \quad K_{x_0} = \frac{q}{2\pi\sqrt{2b}} X(x_0, y_0, b), \quad K_b = \frac{q}{2\pi\sqrt{2b}} Y(x_0, y_0, b),$$

gdzie

$$(2.11) \quad X(x_0, y_0, b) = \frac{\sqrt{b(\Delta + y_0^2 - bx_0)}}{2(1-\nu)\Delta\sqrt{b-x_0}} \left[\frac{2(1-2\nu)(b^2 + y_0^2 - \Delta)}{b+x_0} + \frac{2y_0^2(b^2 + y_0^2 - \Delta) - x_0\Delta(b+x_0)}{(b+x_0)(x_0^2 + y_0^2)} + b \right],$$

$$Y(x_0, y_0, b) = \frac{\sqrt{b(\Delta + y_0^2 - bx_0)}}{2(1-\nu)\Delta\sqrt{b-x_0}} \left[\frac{2(1-2\nu)(\Delta - x_0^2 - y_0^2)}{b+x_0} + \frac{2y_0^2(\Delta - x_0^2 - y_0^2) + b\Delta(b+x_0)}{(b+x_0)(b^2 + y_0^2)} - x_0 \right].$$

W celu zbadania zmienności współczynników intensywności (2.9) naprężenia σ_{yy} w końcach szczeliny, wystarczy oczywiście zbadać funkcję (2.11). Wprowadzając w tym celu zmienne bezwymiarowe $\vartheta = x_0/b$ i $\varepsilon = y_0/b$ wyrażenia (2.11) przekształcimy do postaci

$$(2.12) \quad X^*(\vartheta, \varepsilon) = \frac{\sqrt{\Delta^* + \varepsilon^2 - \vartheta}}{2(1-\nu)\Delta^*\sqrt{1-\vartheta}} \left[\frac{2(1-2\nu)(1 + \varepsilon^2 - \Delta^*)}{\vartheta + 1} + \frac{2\varepsilon^2(1 + \varepsilon^2 - \Delta^*) - \vartheta\Delta^*(\vartheta + 1)}{(\vartheta + 1)(\vartheta^2 + \varepsilon^2)} + 1 \right],$$

$$Y^*(\vartheta, \varepsilon) = \frac{\sqrt{\Delta^* + \varepsilon^2 - \vartheta}}{2(1-\nu)\Delta^*\sqrt{1-\vartheta}} \left[\frac{2(1-2\nu)(\Delta^* - \vartheta^2 - \varepsilon^2)}{\vartheta + 1} + \frac{2\varepsilon^2(\Delta^* - \vartheta^2 - \varepsilon^2) + \Delta^*(\vartheta + 1)}{(\vartheta + 1)(1 + \varepsilon^2)} - \vartheta \right],$$

gdzie $\Delta^* = \sqrt{(1 + \varepsilon^2)(\vartheta^2 + \varepsilon^2)}$. Przyjmując w tych wyrażeniach $\vartheta = -1$ i wykorzystując (2.10), otrzymamy wzory na współczynniki intensywności naprężenia σ_{yy} w końcach szczeliny położonej symetrycznie względem punktów zaczepienia sił skupionych q , przy czym wzory te są identyczne z uzyskanymi w pracy [1] i mają następującą postać:

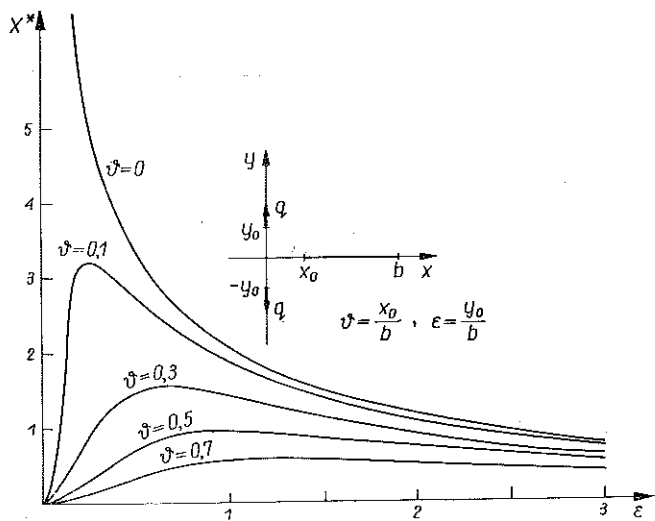
$$(2.13) \quad X^*(-1, \varepsilon) = Y^*(-1, \varepsilon) = \frac{1}{(1-\nu)\sqrt{1+\varepsilon^2}} \left(3 - 2\nu - \frac{1}{1+\varepsilon^2} \right).$$

Jeżeli siły skupione q działają na brzegu szczeliny o skończonej długości, tzn. gdy $-\infty < \vartheta < 0$, $0 < b < \infty$, $\varepsilon = 0$, to wzory (2.12) przyjmą postać następującą:

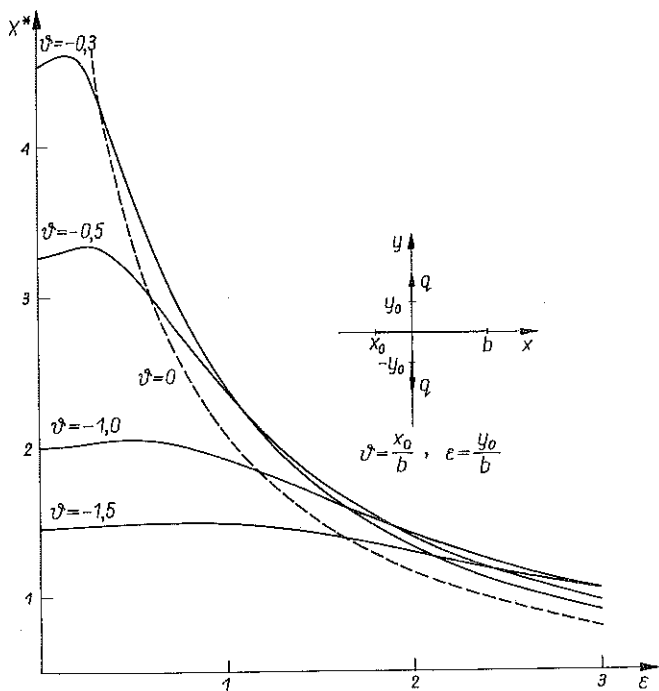
$$X^*(\vartheta, 0) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{|\vartheta|(1+|\vartheta|)}}, \quad Y^*(\vartheta, 0) = |\vartheta| X^*(\vartheta, 0)$$

i w przypadku, gdy szczelina położona jest symetrycznie względem punktów zaczepienia sił skupionych q , tzn. w przypadku $\vartheta = -1$, $\varepsilon = 0$, otrzymamy

$$X^*(-1, 0) = Y^*(-1, 0) = 2.$$

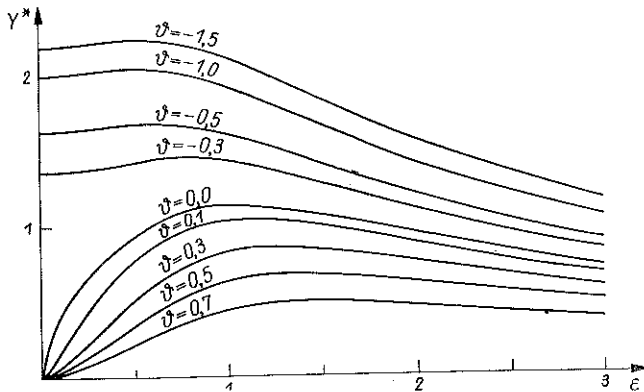


Rys. 3



Rys. 4

Wykres funkcji (2.12) dla różnych wartości ε przy ustalonych wartościach ϑ dla $\nu=0,3$ podany został na rys. 3, 4 i 5.

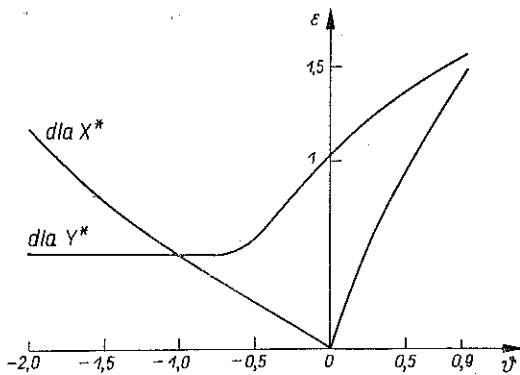


Rys. 5

Ze wzorów (2.13) wynika, że jeśli szczelina położona jest symetrycznie względem punktów zaczepienia sił skupionych q , to funkcje X^* i Y^* osiągają wartości maksymalne ze względu na ε , gdy

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2\nu}{3-2\nu}}$$

Na rys. 6 przedstawiono dla różnych wartości ϑ i dla $\nu=0,3$ wykresy określające odległość punktów zaczepienia sił skupionych q , dla których funkcje X^* i Y^* określone przez formuły (2.12) osiągają wartości maksymalne.



Rys. 6

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. MATCZYŃSKI, *The static problem of a crack in an elastic medium*, Arch. Mech. Stos., **22**, 4, 1970.
2. Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, Москва 1962.
3. Н. И. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Москва 1966.

Резюме

НЕСИМЕТРИЧЕСКОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ПЛАСТИНКИ ОСЛАБЛЕННОЙ ЩЕЛЬЮ

Используя результаты, полученные в работе [1], определяются коэффициенты интенсивности бесконечной концентрации напряжений на концах щели, при предположении, что щель находится в поле действия равных и противоположно направленных сил, действующих в доль прямой перпендикулярной и плоскости щели (рис. 1). В заключение, приводятся диаграммы коэффициентов интенсивности, растягивающей напряжения в концах щели, в зависимости от расстояния точек приложения сосредоточенных сил от одного из концов щели.

SUMMARY

ASYMMETRIC LOADING OF A PLANE CONTAINING A CRACK

On the basis of the results of paper [1] the present paper determines the stress intensity factors at the tips of the crack under the assumption that the plane containing the crack is subject to the action of two equal and opposite forces directed along a line perpendicular to the crack.

The graphs are given representing the stress intensity factors at the tips of the crack as functions of the distance of the points of application of the forces from one of the tips of the crack.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 maja 1971 r.