

DOŚWIADCZALNE STUDIUM KINEMATYKI  
OŚRODKA SYPKIEGO DLA PEWNYCH PROBLEMÓW BRZEGOWYCH

WOJCIECH SZCZEPIŃSKI i HENRYK WINEK (WARSZAWA)

## 1. UWAGI WSTĘPNE

Zagadnienia właściwego wyboru związków fizycznych między prędkościami odkształcenia a naprężeniami przy ruchu ośrodka sypkiego stały się dopiero od niedawna obiektem zainteresowań. Główną uwagę zwracano dotychczas na zagadnienia statyki ośrodka, co było związane z praktycznym wyznaczaniem nośności gruntu przy posadowieniu na nim budowli. Kinematyka ruchu wywołanego przekroczeniem obciążenia granicznego nie miała znaczenia praktycznego, ponieważ sam fakt powstania ruchu był już dla budowli niedopuszczalny. Jednakże w innej dziedzinie techniki, mianowicie w technologii procesów urabiania gruntów sposobami mechanicznymi, dokładne poznanie kinematyki ruchu ośrodka może mieć znaczenie praktyczne i prowadzić do ulepszenia przebiegu tych procesów i optymalnego ukształtowania narzędzi. Obecnie technika rozwiązywania zagadnień brzegowych została dzięki rozwojowi teorii plastyczności tak dalece opracowana, że możliwe jest przedstawienie szczegółowych rozwiązań dla szeregu procesów mechanicznego urabiania gruntów. Główną przeszkodą jest tu jednak niedostateczne jeszcze rozeznanie, jakie związki fizyczne między prędkościami odkształcenia a naprężeniami należy przyjąć w poszczególnych przypadkach. Istnieje kilka koncepcji budowy związków fizycznych wykazujących bardzo poważne różnice. Źródłowy przegląd różnych koncepcji zawierają prace [1, 2 i 3] i z tego względu ograniczymy się tu do krótkiego ich wymienienia.

Pierwszą próbą [4] było formalne przeniesienie z teorii plastyczności do mechaniki gruntów koncepcji tak zwanego stowarzyszonego prawa płynięcia w postaci

$$(1.1) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

w którym potencjał plastyczny  $F$  utożsamiano z warunkiem stanu granicznego Coulomba-Mohra. Ze związku tego wynika efekt ciągłego przyrostu objętości ośrodka w procesie odkształcenia, co szczególnie przy znaczniejszych odkształceniach jest sprzeczne z własnościami rzeczywistych ośrodków. Pewien przyrost objętości obserwuje się bowiem dla ośrodków w stanie zagęszczonym, ale po pewnym odkształceniu osiągają one graniczne rozluźnienie i dalej nie zwiększają swej obję-

tości. W teorii płaskiego płynięcia związki (1.1) prowadzą do pokrywania się charakterystyk dla naprężeń i dla prędkości.

Stwierdzony doświadczalnie nieznaczny tylko przyrost objętości w określonych warunkach i zachowanie stałej objętości przy zaawansowanym odkształceniu powodują, że w nowszych teoriach przyjmuje się jako jedną z zależności dla prędkości warunek nieściśliwości ośrodka. Przy zachowaniu tego warunku można w różny sposób sformułować pozostałe związki wiążące prędkości odkształcenia z naprężeniami. Przegląd proponowanych zależności zawierają prace [1, 2 i 3]. Ostatnio [1] wysuwana jest prosta koncepcja, zakładająca pokrycie się głównych kierunków tensorów naprężenia i prędkości odkształcenia oraz proporcjonalność składowych ich dewiatorowych części. Warunki te można wyrazić przez związki

$$(1.2) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right), \quad \dot{\varepsilon}_{ii} = 0.$$

Są one identyczne ze związkami Levy'ego-Misesa dla ośrodków idealnie plastycznych. Niektóre wyniki doświadczalne podane w pracy [1] wskazują, że koncepcja ta może być szczególnie przydatna przy analizie procesów urabiania ośrodków sypkich w stanie niezagęszczonym. W przypadku płaskiego płynięcia prowadzi ona do stosunkowo prostej metody wyznaczania prędkości cząstek i zasięgu obszaru ruchu. W przeciwieństwie do rozwiązań przy założeniu zależności (1.1) obecnie charakterystyki dla prędkości są ortogonalne i nie pokrywają się z charakterystykami dla naprężeń.

Jedną z metod eksperymentalnej weryfikacji proponowanych związków jest metoda pośrednia, polegająca na porównywaniu kinematyki ruchu, wynikającej z teoretycznych rozwiązań brzegowych dla różnych szczególnych procesów odkształcania, z rzeczywistą kinematyką obserwowaną na specjalnych stanowiskach badawczych. Dotychczas znane są tylko nieliczne tego rodzaju badania, mające mimo analizowania szczególnych procesów charakter badań podstawowych. Większość prac dotyczyła zagadnienia wciskania płaskiego stempla w grunt [2, 5, 6, 7 i 8], istotnego dla techniki fundamentowania. W pracach [2 i 8] porównywano rzeczywiste pole prędkości z polem teoretycznym otrzymanym na podstawie stowarzyszonego prawa płynięcia (1.1). Wyniki pokazują bardzo duże różnice obu pól. W niektórych miejscach obszaru odkształcania moduły wektorów prędkości teoretycznej są nawet czterdziestokrotnie większe od rzeczywistych. Fakt ten był m.in. przyczyną poszukiwań nowych koncepcji dla ustalenia zależności między tensorami prędkości odkształcenia i naprężenia.

Zagadnienie wciskania płaskiego stempla cechuje pewna odrębność od innych praktycznie ważnych przypadków odkształcania gruntów. Występuje w nim bowiem znaczne zagęszczanie ośrodka pod stemplem, powodujące w rezultacie niejednorodność własności. Stan graniczny i wypieranie ośrodka następuje po dość znacznym zagłębieniu stempla. Zjawiska te utrudniają interpretację wyników i porównanie ich z rozwiązaniami teoretycznymi, otrzymanymi dla modelu ciała sztywno-idealnie plastycznego. W celu zmniejszenia wpływu ubocznych czynników w pracy [1] ba-

dano proces wciskania klina o kącie wierzchołkowym  $60^\circ$  w ośrodek sypki. Otrzymano dobrą zgodność wyników doświadczalnych z teoretycznym polem prędkości obliczonym na podstawie zależności (1.2).

Niedostatecznie jest jeszcze wyjaśnione, w jakich rozmiarach stopień zagęszczenia ośrodka wpływa na postać związków między prędkościami odkształcenia a naprężeniami. Czynnikiem ten, jak się wydaje, może być powodem pewnych rozbieżności wniosków wynikających z różnych prac doświadczalnych. W cytowanych publikacjach podawano zwykle tylko ciężar właściwy badanego ośrodka, z czego trudno jest ocenić stopień jego zagęszczenia. Wydaje się, że celowe jest przeprowadzenie badań kinematyki dla tego samego procesu odkształcenia i tego samego ośrodka, ale przy skrajnie różnych stopniach zagęszczenia. Niektóre wyniki tego rodzaju badań dla ośrodka idealnie sypkiego przedstawiono poniżej dla różnych sposobów odkształcania, mających związek z praktycznymi procesami urabiania gruntów.

Głównym celem pracy było jednak opracowanie teorii dwóch typów badań eksperymentalnych, które mogą okazać się szczególnie przydatne przy sprawdzaniu praktycznej przydatności różnego rodzaju związków fizykalnych dla ośrodków sypkich.

## 2. PROCES SPIĘTRZANIA OŚRODKA SYPKIEGO

Rozpatrzmy pewien szczególny przypadek spiętrzenia ośrodka, występujący przy pracy niektórych maszyn do robót ziemnych, np. przy pracy łyżki ładowarki lub przy pracy osprzętem zgarniakowym. Spiętrzenie odbywa się przez ruch narzędzia równoległe do powierzchni ośrodka lub w kierunku niewiele odchylnym od tej powierzchni (rys. 1). Przyjmijmy, że powierzchnię ośrodka stanowi płaszczyzna nachylona pod kątem  $\alpha$  ( $\alpha < \rho$ ) do poziomu, a wektor prędkości ruchu narzędzia  $v_0$  tworzy kąt  $\beta \leq \beta_{gr}$  z równoległą do tej płaszczyzny.

Obszar stanu granicznego ma postać trójkąta  $ABC$  z wierzchołkiem na ostrzu narzędzia  $C$ . Stan naprężenia w nim nie może zależeć od współrzędnej  $x$ . Składowe naprężenia  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  wynikają wobec tego z warunków równowagi

$$(2.1) \quad \sigma_y = \gamma y \cos \alpha, \quad \tau_{xy} = \gamma y \sin \alpha,$$

gdzie  $\gamma$  jest ciężarem właściwym ośrodka. Składową  $\sigma_y$  wyznaczmy z warunku stanu granicznego

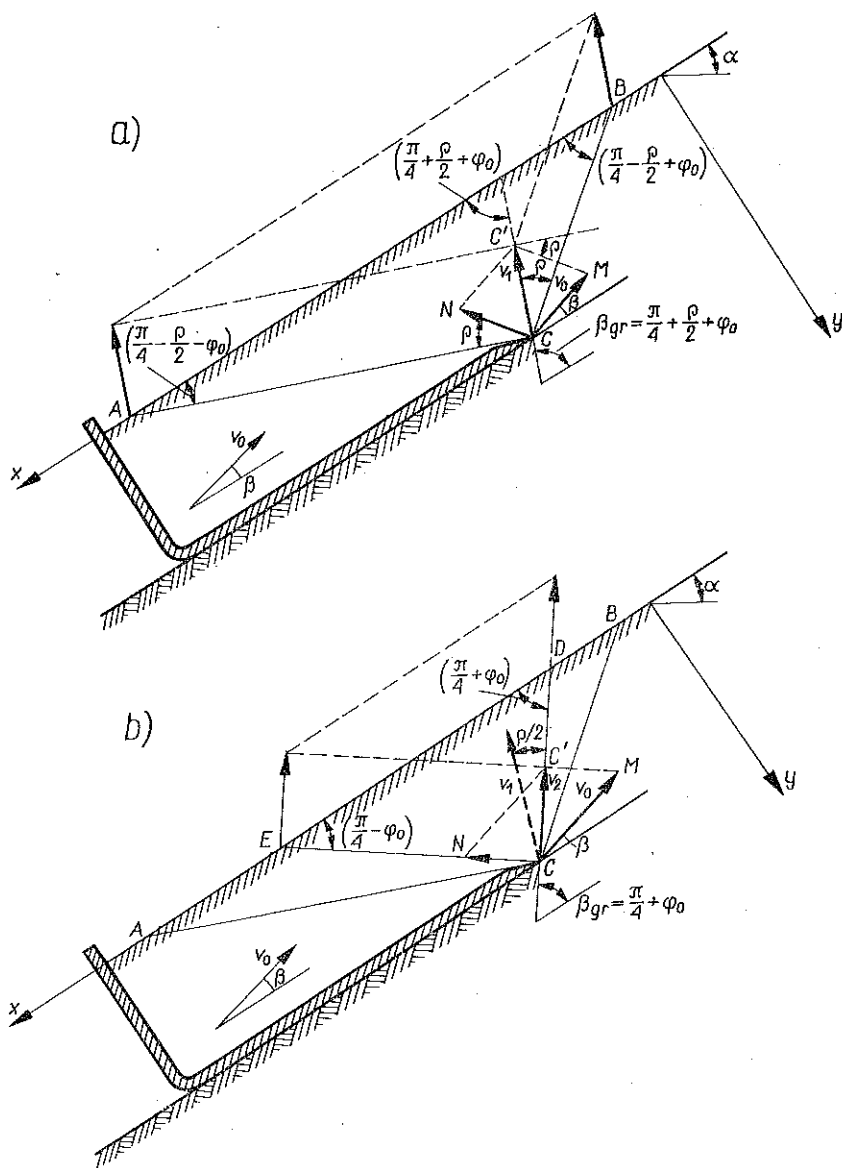
$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = (\sigma_x + \sigma_y)^2 \sin^2 \rho,$$

gdzie  $\rho$  jest kątem tarcia wewnętrznego ośrodka. Po podstawieniu wyrażień (2.1) otrzymujemy

$$(2.2) \quad \sigma_x = \gamma y \frac{(1 + \sin^2 \rho) \cos \alpha + 2 \sqrt{\sin^2 \rho - \sin^2 \alpha}}{1 - \sin^2 \rho}.$$

Kąt nachylenia kierunku większego z naprężeń głównych względem osi  $x$  jest zatem w całym polu stały

$$(2.3) \quad \varphi_0 = \frac{1}{2} \arctg \frac{(1 - \sin^2 \rho) \sin \alpha}{\cos \alpha \sin^2 \rho + \sqrt{\sin^2 \rho - \sin^2 \alpha}}.$$



Rys. 1

Charakterystyki dla naprężeń tworzą w trójkącie  $ABC$  siatkę prostych przecinających krawędź  $AB$  odpowiednio pod kątami

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} + \varphi_0 \quad \text{i} \quad \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} - \varphi_0.$$

Charakterystyki te będą również charakterystykami dla prędkości, jeżeli założyc prawo płynięcia (1.1). W takim przypadku cały materiał na prawo od  $BC$  będzie nieruchomy, a materiał położony na lewo od  $AC$  będzie się poruszał z prędkością  $v_0$ .

jak sztywna całość wraz z narzędziem. Trójkąt  $ABC$  będzie się poruszał jak sztywny blok z prędkością

$$(2.4) \quad v_1 = v_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2} - \varphi_0 + \beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \rho\right)}$$

w kierunku nachylnym pod kątem  $\rho$  do linii nieciągłości prędkości  $BC$ . Wynika to z ogólnej własności linii nieciągłości przy stowarzyszonym prawie płynięcia. Wektor nieciągłości prędkości wzdłuż takiej linii musi być do niej nachylony pod kątem tarcia wewnętrzznego  $\rho$  (por. np. [11]).

Sposób wyznaczania prędkości  $v_1$  pokazano na rys. 1a w punkcie  $C$ . Odcinek  $CM$  przedstawia prędkość  $v_0$ . Odcinek  $CC'$  reprezentuje wektor prędkości  $v_1$ , z jaką porusza się trójkąt  $ABC$ . Wektor ten jest nachylony pod kątem  $\rho$  do charakterystyki  $BC$ . Odcinek  $CN$  reprezentuje wektor nieciągłości prędkości wzdłuż linii  $AC$ ; jest on nachylony względem niej również pod kątem  $\rho$ .

Jeżeli przyjmiemy prawo płynięcia (1.2), to pole prędkości będzie zupełnie odmiennie (rys. 1b). Charakterystyki dla prędkości będą teraz nachylone pod kątami  $\pm \pi/4$  względem kierunków naprężeń głównych. Skrajne charakterystyki  $CD$  i  $CE$  pola prędkości będą przecinały swobodny brzeg  $AB$  odpowiednio pod kątami  $\pi/4 + \varphi_0$  i  $\pi/4 - \varphi_0$ . Będą one liniami nieciągłości prędkości. Cały trójkąt  $DCE$  będzie przesuwał się równoległe do  $CD$  z prędkością

$$(2.5) \quad v_2 = v_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi_0 - \beta\right).$$

Wektory nieciągłości prędkości na obu liniach  $CD$  i  $CE$  są skierowane wzdłuż tych linii i reprezentowane na rysunku 1b odpowiednio przez odcinki  $CC'$  i  $CN$ . Na obu rysunkach 1a i 1b podano wartości kąta granicznego  $\beta_{gr}$  nachylenia wektora prędkości  $v_0$ . Dla  $\beta > \beta_{gr}$  nieciągłość prędkości na linii  $AC$  (rys. 1a) lub  $EC$  (rys. 1b) miałyby zwrot zgodny ze zwrotem naprężenia stycznego, a więc występowałyby wówczas ujemna dysypacja mocy.

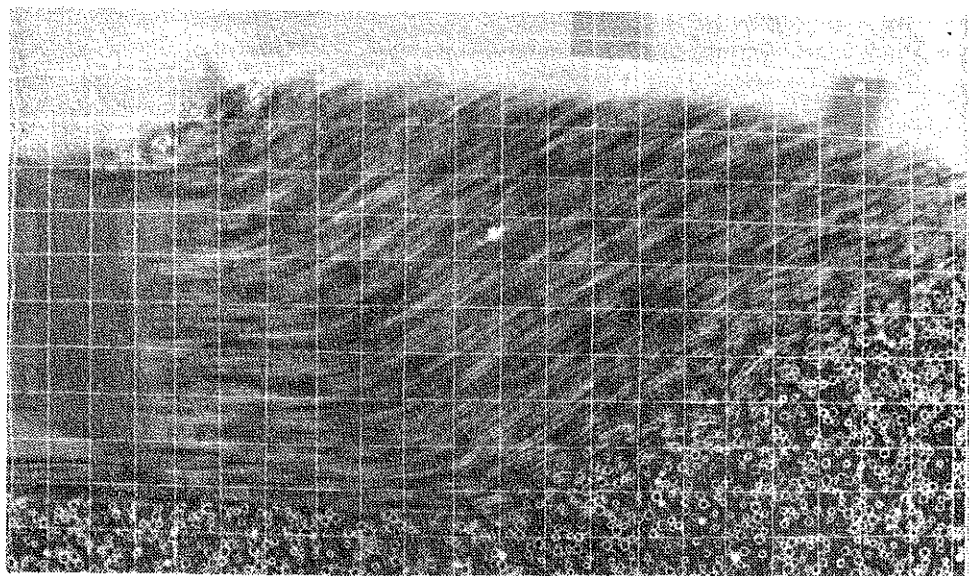
Przedstawiony sposób spiętrzania może być wykorzystywany przy badaniach doświadczalnych kinematyki ośrodka sypkiego. Przy założeniu obu podstawowych związków (1.1) lub (1.2) otrzymuje się znacznie różniące się teoretyczne pola prędkości. O większej przydatności jednej lub drugiej hipotezy można wnioskować przez porównanie rzeczywistego obszaru ruchu z rozwiązaniami teoretycznymi, bowiem w obu rozwiązaniach teoretycznych wyraźnie są różne następujące wielkości:

a) zasięg obszaru ruchu: w pierwszym przypadku obejmuje on trójkąt  $ACB$ , w drugim przypadku znacznie mniejszy trójkąt  $ECD$ ;

b) kierunki wektorów prędkości ruchu: kierunki wektorów  $v_1$  i  $v_2$  tworzą kąt równy  $\rho/2$ , a więc dla wielu ośrodków sypkich dostatecznie duży dla porównań doświadczalnych;

c) wielkości wektorów prędkości ruchu: ze wzorów (2.4) i (2.5) wynika, że różnice prędkości  $v_1$  i  $v_2$  wynikających z obu hipotez różnią się wyraźnie.

Badania doświadczalne wykonano dla dwóch ośrodków, mianowicie dla modelu ośrodka sypkiego, utworzonego ze szklanych wałeczków oraz dla suchego piasku. Na rys. 2 przedstawiono typową fotografię otrzymaną dla modelu ze szklanych wałeczków. Kąt tarcia wewnętrzznego  $\rho$  był dla niego równy  $17^\circ$ .



Rys. 2

Badania wykonano dla  $\alpha = \beta = 0^\circ$ . Widoczne jest, że linie nieciągłości prędkości nachylone są pod kątem  $\pi/4$  do swobodnej powierzchni. Wyraźnie widać również, że wypierany materiał przesuwa się równoległe do linii nieciągłości prędkości. Obydwa spostrzeżenia zgodne są z rozwiązaniem teoretycznym z rys. 1b (w naszym przypadku  $\varphi_0 = 0^\circ$ ).

Piasek użyty do badań miał kąt tarcia wewnętrznego  $\rho = 38^\circ$ . Wszystkie badania przeprowadzono na stanowisku, w którym piasek w stanie możliwie luźnym do uzyskania znajdował się między dwiema szklanymi szybami. Zbadano kinematykę ruchu ośrodka dla następujących wartości kątów  $\alpha$  i  $\beta$ :

Nr doświadczenia	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
$\alpha^\circ$	0	15	30	0	15	30	0	15	30
$\beta^\circ$	0	0	0	15	15	15	30	30	30

Typowy wynik badań przedstawia fotografia na rys. 3, otrzymana dla  $\alpha=30^\circ$  i  $\beta=15^\circ$ . Narysowane na niej dwie proste odpowiadają teoretycznym liniom nieciągłości prędkości  $CD$  i  $CE$  z rys. 1b. Widać, że zarówno zasięg obszaru ruchu jak



Rys. 3

i kierunek prędkości wypieranej części ośrodka są zgodne z rozwiązaniem teoretycznym, otrzymanym na podstawie związków (1.2). Tego samego rodzaju zgodność otrzymano i dla pozostałych wartości kątów  $\alpha$  i  $\beta$ .

### 3. NAPÓR PIONOWEJ ŚCIANY

Proces naporu pionowej ściany na ośrodek sypki był już stosowany do analizy kinematyki ośrodka. W pracy [12] badano wpływ wielkości współczynnika tarcia między ścianką a piaskiem o znacznym stopniu zagęszczenia na kształt linii nieciągłości prędkości. Nie przeprowadzono tam jednak teoretycznej analizy pola prędkości ani nie badano wpływu zagęszczenia ośrodka na kształt tej linii. Niżej podane rozwiązanie teoretyczne zbudowano dla ośrodka idealnie sypkiego o kącie tarcia wewnętrznego  $\rho=38^\circ$ , gęstości  $\gamma=1,64 \text{ G/cm}^3$  i dla wysokości ścianki napierającej  $h=8 \text{ cm}$ .

Stan naprężenia jest określony równaniami równowagi

$$(3.1) \quad \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} = 0, \quad \sigma_{y,y} + \tau_{xy,x} = \gamma$$

oraz warunkiem stanu granicznego Coulomba-Mohra

$$(3.2) \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = (\sigma_x + \sigma_y)^2 \sin^2 \rho.$$

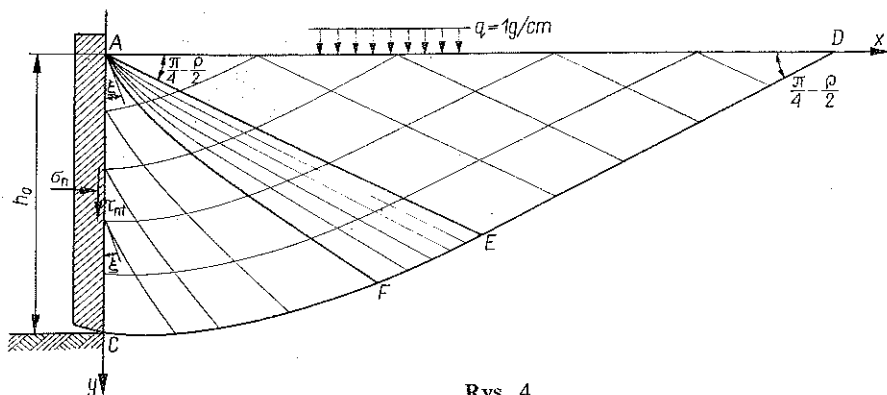
Układ ten ma dwie rodziny charakterystyk rzeczywistych określonych równaniami

$$(3.3) \quad dy = \operatorname{tg}(\varphi \pm \varepsilon) dx, \quad d\sigma \pm 2\sigma \operatorname{tg} \rho d\varphi = \gamma(dy \pm \operatorname{tg} \rho dx),$$

gdzie

$$\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}, \quad \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y),$$

a  $\varphi$  jest kątem, jaki tworzy kierunek większego naprężenia głównego  $\sigma_1$  z osią  $x$ . W powyższych równaniach przyjęto umowę, że naprężenia ściskające są dodatnie. Siatkę charakterystyk dla naprężeń przedstawia rys. 4. Obliczenia wykonano klasyczną metodą Massau. Dla ominięcia znanych trudności w określeniu warunków w punkcie osobliwym  $A$ , wynikających z braku spójności rozpatrywanego ośrodka, założono, że swobodna krawędź  $AD$  nie pokrywa się z powierzchnią piasku, ale leży poniżej niej na głębokości około 6 mm. Ta cienka warstwa tworzy rozłożone w sposób ciągły obciążenie  $q=1 \text{ G/cm}$ . Taki sposób postępowania w innym przypadku był już stosowany w pracy [1].



Rys. 4

W trójkącie  $ADE$  występuje elementarny stan naprężenia, odpowiadający parciu biernemu, a składowe naprężenia wynoszą:

$$(3.4) \quad \sigma_x = \frac{(g + \gamma y)(1 + \sin \rho)}{1 - \sin \rho}, \quad \sigma_y = \gamma y, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Siatkę charakterystyk w krzywoliniowym trójkącie  $AEF$  tworzy wachlarz linii zbiegających się w punkcie  $A$  oraz druga rodzina linii przecinających je pod stałym kątem równym  $2\varepsilon$ . Wielkość kąta  $\xi$ , pod którym styczna do skrajnej charakterystyki wachlarza  $AF$  przecina linię styku ze ścianą  $AC$ , zależy od współczynnika tarcia  $\mu$  między ścianą a ośrodkiem. Z zależności  $|\tau_{nt}| = \mu\sigma_n$  otrzymujemy równanie

$$(3.5) \quad \left| \sin \rho \sin \left( \frac{\pi}{2} + \rho - 2\xi \right) \right| = \mu \left[ 1 + \sin \rho \cos \left( \frac{\pi}{2} + \rho - 2\xi \right) \right],$$

z którego dla danego  $\mu$  można wyznaczyć kąt  $\xi$ . Stan naprężenia w trójkącie  $AFC$  określają warunki na charakterystyce  $AF$  oraz związek (3.5), który powinien być



spełniony na całej długości linii styku  $AC$ . W rozwiązaniu przyjęto wartość  $\mu=0,44$ , odpowiadającą współczynnikowi tarcia piasku po płycie użytej następnie w doświadczeniu.

Zbadajmy teraz kinematykę ruchu ośrodka przy założeniu stowarzyszonego prawa płynięcia (1.1) przyjmując, że ściana napierająca przesuwa się z prędkością  $v_0$ . Charakterystyki dla prędkości pokrywają się wówczas z charakterystykami dla naprężeń. Oznaczmy przez  $v_1$  i  $v_2$  rzuty prostopadłe wektora prędkości ruchu cząstki odpowiednio na kierunki charakterystyk pierwszej i drugiej rodziny. Równania prędkości odniesione do linii charakterystycznych będą miały postać [11] wzdłuż linii pierwszej rodziny

$$(3.6) \quad dv_1 - (v_1 \operatorname{tg} \rho + v_2 \sec \rho) d\varphi = 0;$$

wzdłuż linii drugiej rodziny

$$(3.6') \quad dv_2 + (v_1 \sec \rho + v_2 \operatorname{tg} \rho) d\varphi = 0.$$

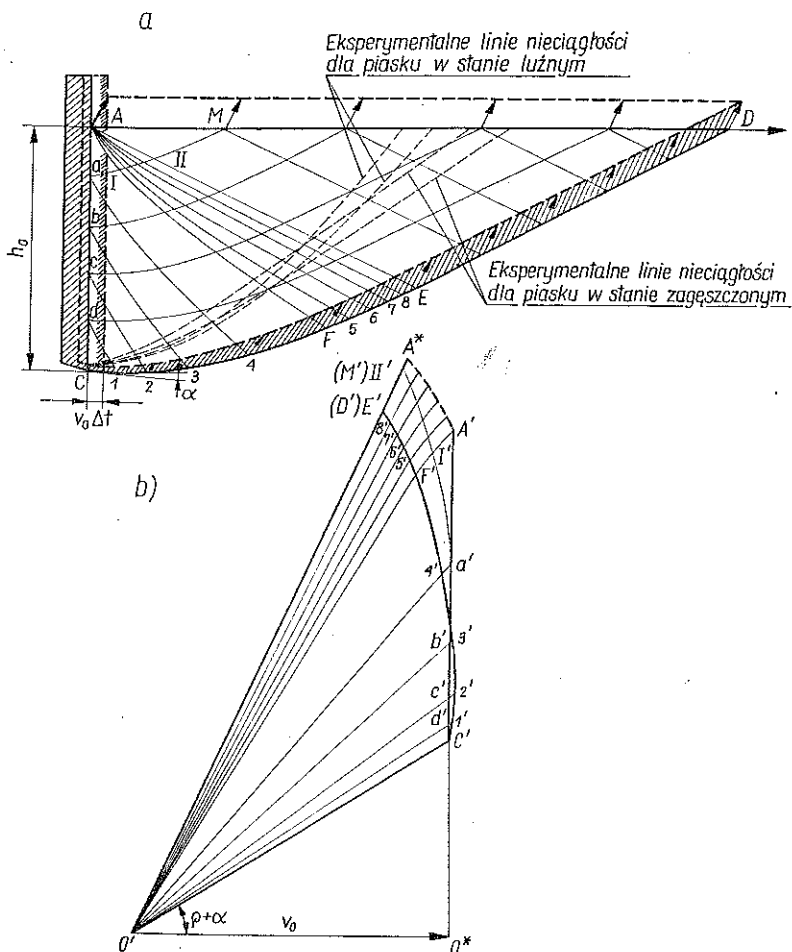
Charakterystyka  $CFED$  jest linią nieciągłości prędkości: poniżej niej materiał znajduje się w spoczynku. Zgodnie z ogólnymi własnościami takich linii wektor prędkości ruchu cząstek wzdłuż niej będzie odchylony o kąt  $\rho$ . Na całej długości tej linii będziemy więc mieli  $v_2=0$  i pierwsze z równań (3.6) można będzie scałkować. Po wyznaczeniu stałej całkowania z warunku zgodności ruchu ściany i ośrodka w punkcie  $C$  otrzymamy wzdłuż charakterystyki  $CFED$

$$v = \frac{v_0}{\cos(\rho + \alpha)} \exp [(\varphi - \varphi_c) \operatorname{tg} \rho];$$

$\alpha$  oznacza tu kąt nachylenia tej charakterystyki do poziomu w punkcie  $C$ . Wyznaczone na podstawie tego wzoru prędkości odłożono ze wspólnego bieguna  $O'$  jako wektory na planie prędkości (rys. 5b); końce ich tworzą łuk  $C'F'E'$ . Na planie tym wektory prędkości cząstek położonych przy ścianie muszą mieć poziomą składową równą  $v_0$ , a więc ich końce muszą leżeć na pionowej prostej  $C'A'$ . Prędkości cząstek, znajdujących się wewnątrz obszaru ruchu ośrodka, znajdujemy budując na planie prędkości siatkę linii ortogonalnych do siatki charakterystyk. Na rys. 5a pokazano prędkości ruchu cząstek położonych na linii nieciągłości  $CFED$  oraz na brzegu  $AD$ . Linia nieciągłości jest idealizacją pewnej cienkiej warstewki rozdzielającej obszar ruchu od nieruchomej części ośrodka. Warstewka ta musi mieć pewną skończoną grubość, nie dającą się jednak określić na drodze teoretycznej; na rys. 5a pokazano ją schematycznie w postaci zaciemnionego pasma.

Przy założeniu prawa płynięcia w postaci związków (1.2) charakterystyki dla prędkości są określone równaniami

$$(3.7) \quad \begin{aligned} dy &= \operatorname{tg} \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) dx, & dv_1 + v_2 d\varphi &= 0, \\ dy &= \operatorname{tg} \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) dx, & dv_2 - v_1 d\varphi &= 0. \end{aligned}$$

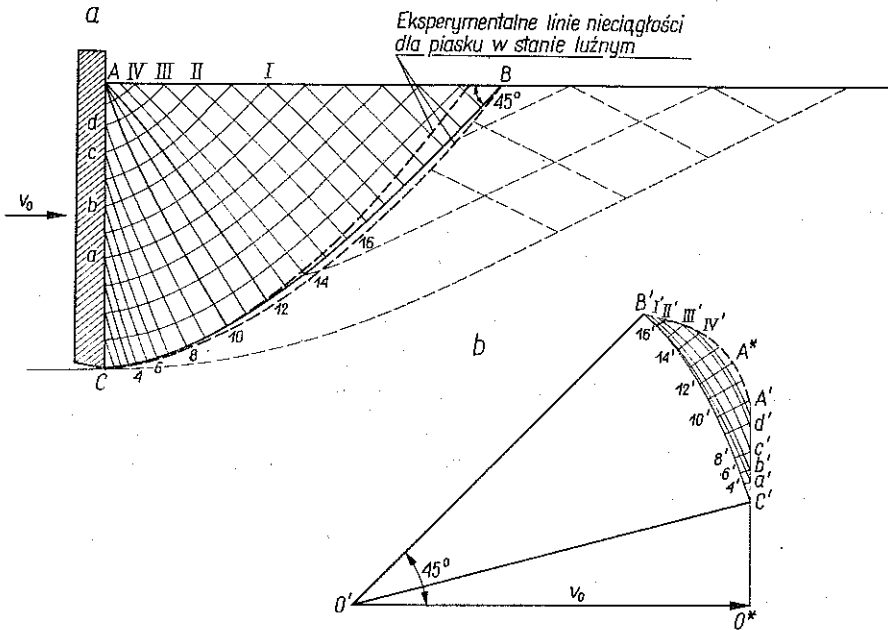


Rys. 5

Linie te nazywamy charakterystykami pierwszej i drugiej rodziny. Są one ortogonalne i w każdym punkcie nachylone pod kątem  $\pi/4$  względem kierunku większego naprężenia głównego. Własność ta pozwala w prosty sposób wykreślić siatkę charakterystyk dla prędkości na podstawie siatki dla naprężeń. Na rys. 6a pokazano otrzymaną w sposób wykreślny siatkę charakterystyk dla prędkości.

Na rys. 6b pokazano plan prędkości. Linia nieciągłości prędkości  $BC$  odwzorowuje się teraz na nim w postaci łuku koła  $B'C'$  zatoczonego z bieguna  $O'$ . Długość promienia  $O'C'$  otrzymujemy z warunku w punkcie  $C$ , w którym prędkość ruchu ośrodka musi mieć poziomą składową równą prędkości ruchu ścianki napierającej  $v_0$ . Z drugiej strony prędkość ta musi być skierowana stycznie do  $CB$ . Prędkości wszystkich punktów ośrodka, przylegających do ściany  $AB$ , muszą mieć składową poziomą równą  $v_0$ , a więc ich odwzorowania na planie prędkości będą leżały na pionowej prostej  $C'A'$ . Ta własność wraz z wyznaczonym już łukiem  $C'B'$  pozwala jednoznacznie określić odwzorowania wszystkich punktów ośrodka przez wykreśle-

nie na planie prędkości siatki linii ortogonalnych do siatki charakterystyk. Punkt osobliwy  $A$  odwzorowuje się w postaci odcinka  $A'A^*$ . Orientacyjne położenie odcinka  $A' - IV'$  zaznaczono na planie prędkości linią przerywaną, ponieważ (ze względu na zagęszczenie siatki charakterystyk w otoczeniu punktu  $A$ ) trudno jest ustalić jego dokładny przebieg.



Rys. 6

Jak widać pola prędkości dla obu praw płynięcia (1.1) i (1.2) różnią się znacznie. Rozpatrywany proces może zatem służyć dla ich pośredniej weryfikacji doświadczalnej. W obu rozwiązaniach różne są następujące wielkości:

- zasięg obszaru ruchu ośrodka,
- kierunki wektorów prędkości ruchu na linii nieciągłości: w pierwszym rozwiązaniu odchylone od niej pod kątem  $\rho$ , a w drugim rozwiązaniu skierowane równoległe;
- wielkości wektorów prędkości ruchu wynikające z planów prędkości zbudowanych dla tej samej prędkości  $v_0$ .

Badania doświadczalne wykonano dla suchego piasku w stanie możliwie zagęszczonym i w stanie możliwie luźnym. W obydwu stanach różne są zarówno ciężar właściwy jak i kąt tarcia wewnętrzny, ale różnice te nie są duże i minimalnie wpłynęłyby na postać rozwiązań teoretycznych. Z tego względu wyniki doświadczalne porównano z powyższymi rozwiązaniami teoretycznymi, otrzymanymi dla pośrednich wartości  $\gamma$  i  $\rho$ .

Na rys. 5a liniami przerywanymi zaznaczono otrzymane doświadczalnie granice obszaru ruchu dla piasku w obu stanach zagęszczenia, a na rys. 6a tylko granice dla

piasku luźnego. W tym ostatnim przypadku mamy dobrą zgodność zasięgu obszaru ruchu z rozwiązaniem otrzymanym na podstawie prawa płynięcia (1.2).

W przypadku piasku zagęszczonego granica obszaru ruchu zajmuje położenie pośrednie pomiędzy obydwoma rozwiązaniami teoretycznymi. Jednakże dla obu stanów zagęszczenia wektory prędkości ruchu cząstek są w otoczeniu linii nieciągłości skierowane do niej równolegle, co jest sprzeczne z teoretycznym wnioskiem o odchyleniu tych wektorów o kąt  $\rho$ , wynikającym z prawa płynięcia (1.1). Taki sam obraz ruchu dla piasku zagęszczonego otrzymano w pracy [12].

#### 4. UWAGI KOŃCOWE

Z punktu widzenia zastosowań teorii ośrodków sypkich do analizy procesów urabiania gruntów obie omówione metody badań eksperymentalnych dla pośredniego sprawdzania praw płynięcia są dogodniejsze od metod wciskania klina lub płaskiego stempla. Nie powstają bowiem przy ich stosowaniu obszary silnego zagęszczania ośrodka wywołanego dużymi ciśnieniami, występującymi pod stemplem. Przy stosowaniu metody spiętrzania podanej w p. 2 rozwiązanie teoretyczne jest szczególnie proste, co ułatwia opracowanie wyników doświadczalnych.

Otrzymane wyniki badań doświadczalnych wskazują, że stan zagęszczenia ośrodka sypkiego wyraźnie wpływa na kinematykę ruchu. Dla ośrodka sypkiego w stanie luźnym otrzymano dobrą zgodność rzeczywistych obrazów ruchu z rozwiązaniami teoretycznymi, wynikającymi z przyjęcia związków (1.2). Dla ośrodka w stanie zagęszczonym kinematyka badanego ośrodka różni się od rozwiązań teoretycznych dla obu praw płynięcia (1.1) i (1.2). Nie stwierdza się odchylenia wektora prędkości ruchu od linii nieciągłości prędkości.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. DRESCHER, K. KWASZCZYŃSKA i Z. MRÓZ, *Statics and kinematics of the granular medium in the case of wedge indentation*, Arch. Mech. Stos., **19**, 1, 99–113, 1967.
2. A. DRESCHER, A. BUJAK, *Kinematyka ośrodka sypkiego na przykładzie wciskania płaskiego stempla*, Rozpr. Inżyn., **14**, 2, 313–325, 1966.
3. A. J. M. SPENCER, *A theory of the kinematics of ideal soils under plane strain conditions*, J. Mech. Phys. Solids, **12**, 337–351, 1964.
4. D. C. DRUCKER, W. PRAGER, *Soil mechanics and plastic analysis or limit design*, Quart. Appl. Math., **10**, 157–165, 1952.
5. W. SYLWESTROWICZ, *Experimental investigation of the behaviour of soil under a punch or footing*, J. Mech. Phys. Sol., **1**, 258–264, 1953.
6. E. SPENCER, *The movement of soil beneath model foundations*, Civil Eng. Publ. Works, Rew. June-July, 1964.
7. W. BOJANOWSKI, T. JESKE, *Powierzchnia poślizgu i charakterystyki plastycznego pola naprężenia*, Arch. Inż. Łądowej, **9**, 3, 247–262, 1963.
8. P. STUTZ, *Ecoulement plastique d'un materiau de Coulomb a dilatation non standardisée. Application au problème de poinçon*, Compte Rendus Acad. Sci., **259**, 1964.
9. W. W. SOKOŁOWSKI, *Statyka ośrodków sypkich* (polskie tłumaczenie), PWN, 1967.

10. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej*, PWN, 1967.
11. R. T. SHIELD, *Mixed boundary value problems in soil mechanics*, Quart. Appl. Math., **11**, 61-75, 1953.
12. W. BOJANOWSKI, B. ROSSIŃSKI, *Wpływ współczynnika tarcia gruntu sypkiego o ściankę oporową na kształt powierzchni poślizgu przy odporze gruntu*, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Nr. 90, Budownictwo, z. 2, 1967.

## Резюме

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ КИНЕМАТИКИ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ  
ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Целью работы является экспериментальная проверка разных законов текучести для сыпучих сред. Проверка проводится на нескольких особых процессах деформаций в условиях плоского деформированного состояния, для которых можно построить относительно простые теоретические поля скорости, вытекающие из разных концепции зависимостей между напряжениями и скоростями деформации. В качестве среды употреблялся сухой песок, а также модель сыпучей среды, состоящей из стеклянных прутков разных диаметров. Получено надлежащее согласование действительных полей скорости для рыхлых сред с решениями вытекающими из закона текучести (1.2), предполагая несжимаемость и изотропию среды. Сетки характеристик для напряжений и скорости являются в этом случае различными. Для песка в загущенном состоянии эта согласованность была несколько хуже.

## SUMMARY

EXPERIMENTAL STUDY OF KINEMATICS OF GRANULAR MEDIA FOR CERTAIN  
BOUNDARY VALUE PROBLEM

The aim of the paper is the experimental verification of various flow rules for granular media. The verification is performed in the case of several particular deformation processes under the plane strain conditions in which relatively simple theoretical velocity fields can be constructed following from various concepts of relations between the stresses and the strain rates. Dry sand has been used as the medium as also a model consisting of tiny glass rods of various diameters. The results reveal a good agreement (for loose media) with the theoretical solutions obtained with the use of flow rule (1.2) assuming the medium to be incompressible and isotropic. The characteristics networks for stresses and velocities are different in that case. In the case of compacted sand the agreement of results is not so good.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

*Praca została złożona w Redakcji dnia 2 czerwca 1971 r.*