

## PRÓBA TWARDOŚCI ROCKWELLA JAKO PROBLEM TEORII PLASTYCZNOŚCI

DAO-DUY-TIEN (HANOI)<sup>(1)</sup>

### 1. WSTĘP

Pomiar twardości Rockwella według skali  $C$  polega na pomiarze głębokości wciśnięcia w badany materiał diamentowego stożka o kącie wierzchołkowym równym  $120^\circ$  przy użyciu siły naciskającej równej 150 kg. Twardość określa się w stopniach skali  $R_c$  według wzoru

$$(1.1) \quad R_c = \frac{0,2-h}{0,2} \cdot 100,$$

gdzie  $h$  oznacza zagłębienie stożka mierzone w milimetrach. W zaleceniach technicznych, dotyczących przeprowadzania pomiaru twardości, podaje się minimalne wymiary badanego elementu. W przypadku zbyt małej grubości powstałoby bowiem pod naciskiem stożka lokalne wypchnięcie materiału po przeciwnej stronie, a przy zbyt małej szerokości element zostałby roztloczony na boki. W obu przypadkach nie można wnioskować na podstawie zagłębienia stożka o twardości materiału. Zagłębienie to jest bowiem wtedy wynikiem złożonego odkształcenia całego elementu. Sprawę dodatkowo komplikuje fakt, że te minimalne wymiary elementu należałoby uzależnić od twardości materiału.

Im większa twardość, tym mniejsze jest zagłębienie  $h$  i tym mniejsze mogą być wymiary badanego elementu. Podawane zalecenia, dotyczące tych wymiarów, oparte są na danych empirycznych i wieloletnim doświadczeniu. Brak jest opracowania teoretycznego tego dość istotnego problemu.

W niniejszej pracy przedstawiono próbę wyjaśnienia zjawisk zachodzących przy pomiarze twardości Rockwella według skali  $C$ , traktując pomiar twardości jako zagadnienie teorii plastyczności. Jako punkt wyjścia przyjęto rozwiązanie F. J. LOCKETTA [4], w którym zbadano lokalnie stan naprężenia oraz obraz deformacji w bezpośrednim otoczeniu naciskającego stożka. W rozwiązaniu tym zastosowano teorię osiowo-symetrycznego płynięcia ośrodka idealnie plastycznego, podaną częściowo przez A. ISZLIŃSKIEGO [11], a rozszerzoną i uzupełnioną przez R. T. SHIELDA [6]. Teoretyczne wyniki F. J. Locketta znalazły potwierdzenie doświadczalne w pracach [1] i [3]. Z rozwiązania Locketta nie wynikają żadne wnioski dotyczące

<sup>(1)</sup>Praca została wykonana w czasie stażu naukowego autora w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN w Warszawie.

niezbędnych wymiarów próbki przy pomiarach twardości. Oszacowanie tych wymiarów można jednak otrzymać przez przedłużenie rozwiązania w obszar sztywny. Przedłużenia takie podano poniżej, traktując zagadnienie nieco szerzej przez uwzględnienie również przypadków innych wartości kąta wierzchołkowego stożka.

Na podstawie tych przedłużeń podano wnioski praktyczne dotyczące wpływu wymiarów badanego elementu na pomiar twardości.

## 2. RÓWNANIA PODSTAWOWE

Teoria osiowo-symetrycznego płynięcia ośrodka idealnie plastycznego została podana przez R. T. SHIELDS [6]. Dla jasności podstawowe założenia tej teorii podano poniżej.

We współrzędnych walcowych  $r, \theta, z$ , z osią  $z$  pokrywającą się z osią symetrii, stan naprężenia określają cztery składowe  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$  i  $\tau_{rz}$ . Ruch ośrodka opisuje wektor prędkości płynięcia o składowych  $v_r$  i  $v_z$ . Wszystkie te wielkości zależą tylko od współrzędnych  $r$  i  $z$ . Składowe naprężenia  $\tau_{\theta z}$  i  $\tau_{\theta r}$  oraz składowa obwodowa prędkości  $v_\theta$  równają się zeru.

Stan naprężenia w dowolnym punkcie obszaru plastycznego jest reprezentowany w przestrzeni naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  przez odpowiedni punkt położony na tej krawędzi sześciokątnego graniastoslupa Treski, na którym

$$(2.1) \quad \sigma_1 = \sigma_3$$

oraz

$$(2.2) \quad \sigma_1 - \sigma_2 = 2k.$$

W oznaczeniach tych przyjęto, że  $\sigma_3 = \sigma_\theta$ . Dla takich stanów naprężenia muszą zachodzić nierówności:

$$\dot{\epsilon}_2 \leq 0, \quad \dot{\epsilon}_1 \geq 0, \quad \dot{\epsilon}_3 \geq 0.$$

Jest to zgodne z warunkiem, że radialna prędkość płynięcia  $v_r$  jest przy wtlaczaniu stożka dodatnia, a tym samym dodatnia musi być obwodowa prędkość odkształcenia, określona zależnością  $\dot{\epsilon}_\theta = v_r/r$ , przy czym z przyjętego sposobu oznaczeń wynika, że  $\dot{\epsilon}_\theta \equiv \dot{\epsilon}_3$ .

Równości (2.1) i (2.2) nakładają dwa niezależne warunki na cztery poszukiwane składowe naprężenia, a zatem stan naprężenia można opisać przez dwa niezależne parametry  $\theta$  i  $p$ , których znaczenie pokazuje rys. 1. Otrzymujemy w wyniku zależności

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \sigma_z &= p + k \sin 2\theta, & \tau_{rz} &= k \cos 2\theta, \\ \sigma_r &= p - k \sin 2\theta, & \sigma_\theta &= p - k. \end{aligned}$$

Podstawienie tych zależności do równań równowagi wewnętrznej prowadzi do hiperbolicznego układu dwóch quasi-liniowych równań różniczkowych z dwiema poszukiwanymi funkcjami  $\theta$  i  $p$  oraz dwiema zmiennymi niezależnymi  $r$  i  $z$ .

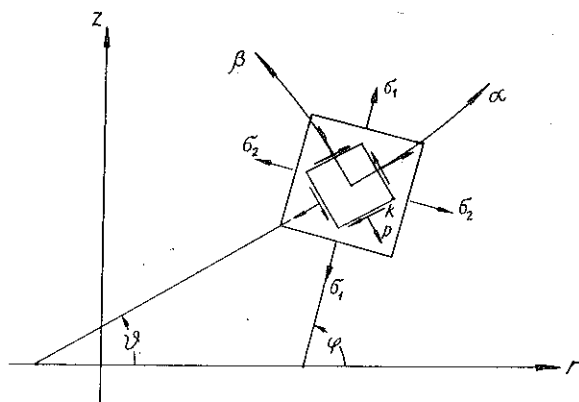
Równania charakterystyk tego układu mają następującą postać:

$$(2.4) \quad \frac{dz}{dr} = \operatorname{tg} \theta, \quad dp - 2k d\theta = \frac{k}{2r} (dz + dr)$$

dla pierwszej rodziny linii, nazywanej dalej rodziną linii  $\alpha$ , oraz

$$(2.5) \quad \frac{dz}{dr} = -\operatorname{ctg} \theta, \quad dp + 2k d\theta = -\frac{k}{2r} (dz - dr)$$

dla drugiej rodziny linii, określanej jako rodzina linii  $\beta$ .



Rys. 1

Wektor prędkości płynięcia, leżący zawsze w płaszczyźnie południkowej, najdogodniej jest określić przez składowe  $v_\alpha$  i  $v_\beta$ , skierowane odpowiednio wzdłuż linii  $\alpha$  i  $\beta$ . Przy założeniu warunku izotropii oraz nieściśliwości materiału przy plastycznym odkształceniu, składowe te muszą spełniać równania

$$(2.6) \quad \begin{aligned} dv_\alpha - v_\beta d\theta &= -(v_\alpha \operatorname{ctg} \theta - v_\beta) \frac{dz}{2r} \quad \text{wzdłuż linii } \alpha, \\ dv_\beta + v_\alpha d\theta &= (v_\alpha \operatorname{ctg} \theta - v_\beta) \frac{dr}{2r} \quad \text{wzdłuż linii } \beta. \end{aligned}$$

### 3. ROZWIĄZANIE DLA OBSZARU ODKSZTAŁCENIA

Jak wspomniano w p. 1, podstawą dla dalszych rozwiązań dotyczących minimalnych wymiarów badanego elementu jest rozwiązanie LOCKETTA [4], dotyczące wyłącznie obszaru deformacji plastycznej, a więc obszaru położonego powyżej charakterystyki *AEDC* na rys. 2. Rozwiązanie to oparto na założeniu, że tworząca *BC* powierzchni wypchniętego przez naciskający stożek materiału zachowuje w czasie całego procesu deformacji podobieństwo geometryczne. Ponadto zakłada się w tym rozwiązaniu, że na powierzchni kontaktu między stożkiem a badanym materiałem nie ma sił tarcia.



Nie wnikając tu w szczegóły techniki rozwiązywania, opisane w oryginalnej pracy LOCKETTA [4] oraz w monografii [7], podajemy tu tylko jako punkt wyjścia do dalszych rozwiązań tablicę 1 współrzędnych określających funkcję  $z=f(r)$  dla różnych wartości kąta wierzchołkowego stożka.

Tablica 1

	$r$	1,0	—	—	—	—	—	—	—	—	$r=r_0$	$r_0$
$z=f(r)$	$\delta=60^\circ$	0,00	0,031	0,055	0,075	0,091	0,105	0,117	0,126	0,133	0,137	1,51
	$\delta=70^\circ$	0,00	0,017	0,032	0,044	0,055	0,064	0,071	0,077	0,082	0,085	1,52
	$\delta=80^\circ$	0,00	0,0081	0,0150	0,0209	0,0260	0,0302	0,0338	0,0368	0,0392	0,0408	1,54

Kąty wachlarzy w punkcie  $B$  oraz wielkości sił naciskających obliczonych ze wzoru

$$(3.1) \quad P^* = 2\pi \int_0^1 \sigma_z r dr$$

zestawiono w tablicy 2.

Tablica 2

$\delta$	$60^\circ$	$70^\circ$	$80^\circ$
$\gamma$	$27^\circ 45'$	$52^\circ$	$71^\circ 45'$
$P^*/k\pi$	4,28	4,76	5,20

#### 4. PRZEDŁUŻENIE ROZWIĄZANIA W OBSZAR SZTYWNY

Przedstawione powyżej rozwiązanie Locketta nie jest kompletne i w podanej postaci może być traktowane tylko jako rozwiązanie kinematycznie dopuszczalne, dające górną ocenę siły potrzebnej dla wciskania stożka. Jak dalej pokażemy, można jednak bez trudności zbudować statycznie dopuszczalne przedłużenie w obszar sztywny poniżej charakterystyki AEDC, jeżeli tylko wymiary elementu, w który wciskamy stożek, są dostatecznie duże. Budowa przedłużenia oparta jest na założeniu, że część obszaru sztywnego poniżej obszaru znajduje się w stanie plastycznym, a część jest zupełnie wolna od naprężeń. Ogólne zasady budowy przedłużeń podano w pracy Y. F. W. BISHOPA [10].

Przedłużenie siatki linii poślizgu w obszarze odkształcenia ograniczonym skrajną charakterystyką AEDC (rys. 2) w obszar sztywny poniżej tej charakterystyki rozpoczynamy od rozwiązania zagadnienia mieszanego, określonego wyznaczonymi już wielkościami  $\theta$  i  $p$  wzdłuż linii AEDC, należącej do rodziny  $\beta$ . Dodatkowym warunkiem jest, że na osi symetrii  $z$  musi być  $\theta=3/4\pi$ .

Przy posługiwaniu się zależnościami (2.4) i (2.5) dla obliczenia punktów położonych w bezpośrednim sąsiedztwie osi  $z$ , gdzie  $r \rightarrow 0$ , powstaje w nich nieoznaczoność. Z tego względu dla tych punktów należy stosować zależności [por. (2.4) i (2.5)]

$$(4.1) \quad \begin{aligned} dp - 4k d\theta &= 0 \text{ wzdłuż linii rodziny } \alpha, \\ dp + 4k d\theta &= 0 \text{ wzdłuż linii rodziny } \beta, \end{aligned}$$

otrzymane jako granice, do których dążą ogólne zależności (2.4) i (2.5) przy  $r \rightarrow 0$ .

Tak określone zagadnienie mieszane pozwala wyznaczyć drogą obliczeń numerycznych stan naprężenia i postać siatki charakterystyk w całym obszarze  $AEDCLQ$ . Punkt  $A$  jest punktem osobliwym, w którym wartość kąta  $\theta$  zmienia się od  $\pi/4 + \delta$  w lewostronnym otoczeniu od strony trójkąta  $ABE$ , do  $3/4\pi$  w otoczeniu prawostronnym od strony obszaru  $A3LQ$ . Z punktu  $A$  wychodzi więc wachlarz charakterystyk rodziny  $\beta$ .

Jako następne należy rozwiązać zagadnienie odwrotne do zagadnienia brzegowego Cauchy'ego. Opiera się ono na założeniu, że pewna linia  $CG$ , której kształt wyznacza się w trakcie budowy przedłużenia, jest granicą oddzielającą obszar znajdujący się w stanie plastycznym od obszaru wolnego od naprężeń. Linia ta stanowi więc jakby hipotetyczny swobodny brzeg obszaru plastycznego. Punktem wyjścia są obliczone już wartości  $\theta$  i  $p$  wzdłuż charakterystyki  $CM$ . Dane te pozwalają wyznaczyć kształt hipotetycznego swobodnego brzegu na odcinku  $CK$ . Obliczenia dla wyznaczenia dalszej części  $KG$  tego brzegu są nieco bardziej złożone, ponieważ w polu naprężeń od punktu  $M$  rozpoczyna się linia nieciągłości  $ML$ . Punkt ten jest określony przez przecięcie się dwóch charakterystyk rodziny  $\alpha$  wychodzących odpowiednio z punktów  $C$  i  $S$ . Część pola naprężeń w otoczeniu linii nieciągłości budowano wykreślnie, postępując w sposób wskazany przez Z. MROZA [8]. W wyniku otrzymano przebieg linii granicznej na odcinku  $KG$ .

Ograniczenie przedłużenia pola naprężeń od dołu zbudowano prowadząc z punktu  $G$ , w którym styczna do brzegu  $CKG$  jest równoległa do osi  $z$ , linię nieciągłości naprężeń  $GLQ$  w taki sposób, aby poniżej panował wszędzie stan jednoosiowego ściskania lub rozciągania naprężeniami równoległymi do osi  $z$ . Sposób ten został podany w zastosowaniu do innych zagadnień przez J. F. W. BISHOPA [10].

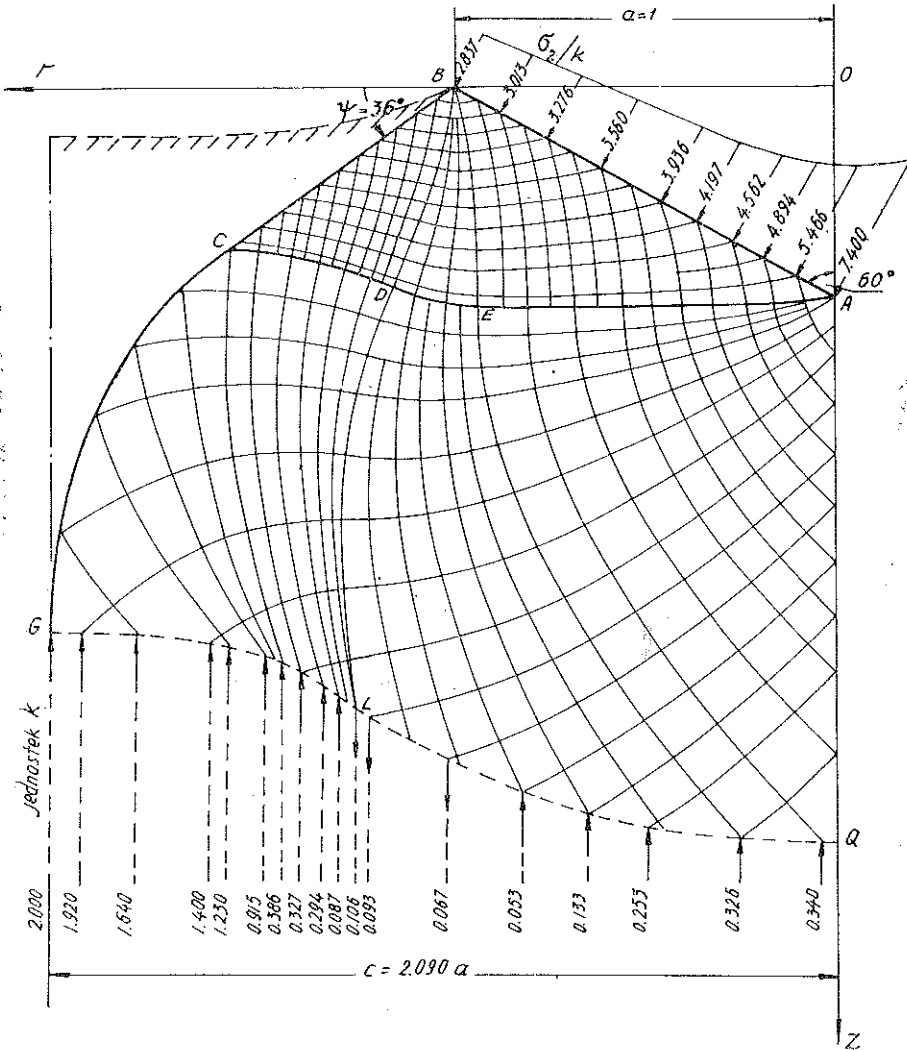
Konstrukcję tej linii przeprowadzono wykreślnie rozpoczynając od punktu  $G$  na podstawie wyznaczonych już wartości  $p$  i  $\theta$  w węzłach siatki charakterystyk. Na rys. 2 pokazano wyznaczone wielkości naprężeń poniżej linii nieciągłości  $GLQ$ . Na odcinku  $GL$  są one ściskające, a na odcinku  $LQ$  — rozciągające. W żadnym miejscu nie przekraczają one granicy plastyczności  $2k$ . Jeżeli element, w który wciskamy stożek, spoczywa na sztywnym podłożu, to naprężenia te są równoważone na powierzchni styku przez reakcję podłoża. Dla sprawdzenia dokładności konstrukcji przedłużenia pola naprężeń porównano wypadkową nacisków na linii styku stożka z materiałem  $AB$ , również pokazanych na rys. 2, z wypadkową oddziaływań normalnych na linii  $GLQ$ . Wyniki obliczeń wykazują, że różnica między obiema siłami nie przekroczyła w żadnym z obliczanych przypadków wielkości 5%.

##### 5. SZACOWANIE NOŚNOŚCI DLA PRÓBEK O MAŁYCH WYMIARACH

Jeżeli przy określonym zagłębieniu wciskanego stożka okaże się, że średnica próbki jest zbyt mała, aby przedłużenie pola naprężeń z rys. 2 zmieściło się całkowicie wewnątrz próbki, to kompletnego rozwiązania nie udaje się zbudować. Na podstawie ekstremalnych twierdzeń teorii plastyczności można jednak dla takiego przypad-

ku podać dolne i górne oszacowania siły potrzebnej dla wciśnięcia stożka na daną głębokość.

Z rys. 2 widoczne jest, że warunkiem dla zbudowania kompletnego rozwiązania jest, aby promień  $c$  badanej próbki nie był mniejszy niż  $c=2,448a$ , gdzie  $a$  jest promieniem zagłębienia wywołanego przez stożek. Dla  $c < 2,448a$  dolne oceny siły



Rys. 3

wciskającej wyznaczmy na podstawie statycznie dopuszczalnych pól naprężeń, typu przedstawionego dla szczególnego przypadku  $c=2,090a$  na rys. 3. Budowa tego pola jest zbliżona do budowy pola z rys. 2, ale jako punkt wyjścia do rozwiązania zagadnień brzegowych przyjmuje się istnienie hipotetycznej, prostoliniowej, wolnej

od naprężeń krawędzi  $BC$ , tworzącej z poziomem kąt  $\psi$ . Wartość tego kąta dobiera się tak, aby punkt  $G$  przedłużonego pola leżał na pobocznicy próbki<sup>(2)</sup>.

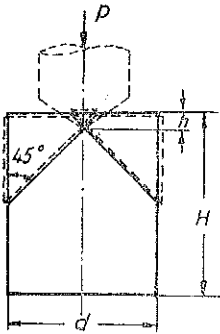
Z powyższego pola naprężeń wynika pewien fikcyjny rozkład nacisków normalnych na powierzchni styku stożka z materiałem próbki, pokazany na rys. 3 na linii tworzącej stożka  $AB$ . Obliczona na podstawie tego rozkładu nacisków ze wzoru (3.1) siła  $P^*$  stanowi dolną ocenę siły potrzebnej do wciśnięcia stożka na daną głębokość.

Tablica 3

$a$	$d=2c$			
	$\psi=36^\circ$	$\psi=44^\circ$	$\psi=52^\circ$	$\psi=60^\circ$
1	4,180	3,800	3,446	3,112
	$P^*/k\pi$			
	3,551	3,237	2,877	2,544

Na rys. 6 dolna linia reprezentuje tak wyznaczone oceny dla kąta  $\delta=60^\circ$ . Na osi rzędnych odłożono bezwymiarową wielkość

$$(5.1) \quad f = P^*/P_0,$$



Rys. 4

gdzie  $P_0 = 2k\pi a^2$ . Oś odciętych odpowiada stosunkowi  $c/a$ . Jak wykazano w poprzednim punkcie, dla  $c/a \geq 2,448$  można zbudować rozwiązania kompletne dające ścisłą wartość  $f=2,14$ .

Podaną na rys. 6 górną ocenę siły dla  $c/a < 1,65$  wyznaczono na podstawie kinematycznie dopuszczalnego mechanizmu zniszczenia przedstawionego na rys. 4. Mechanizm ten polega na ścięciu próbki wzdłuż płaszczyzn tworzących kąt  $45^\circ$  z osią próbki (por. rys. 4).

Dla  $1,65 < c/a < 2,448$  lepszą górną ocenę otrzymuje się z rozwiązania Locketta, które mimo niemożności zbudowania przedłużenia pola naprężeń w tym zakresie pozostaje jednak rozwiązaniem kinematycznie dopuszczalnym.

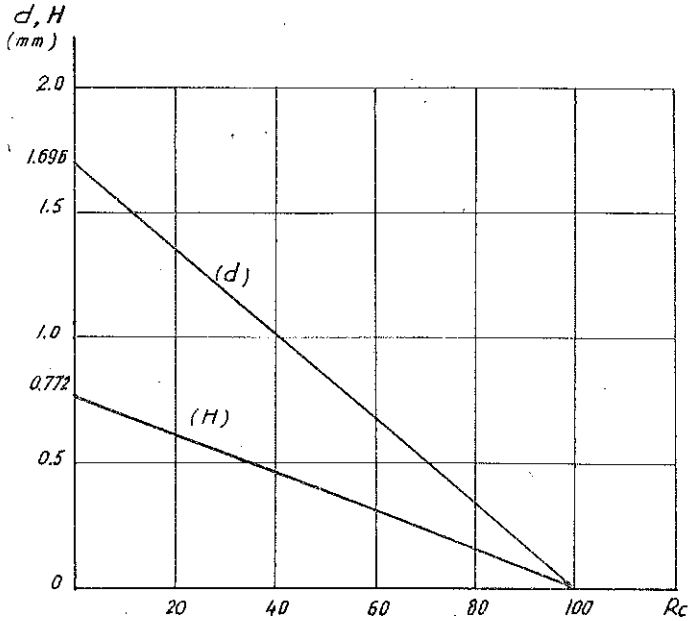
## 6. WNIOSKI PRAKTYCZNE DOTYCZĄCE PRÓBY ROCKWELLA

Z rozwiązania podanego na rys. 2 wynikają zależności między średnicą badanej próbki  $d$  oraz jest wysokością  $H$ , a promieniem wgłębienia  $a$ :

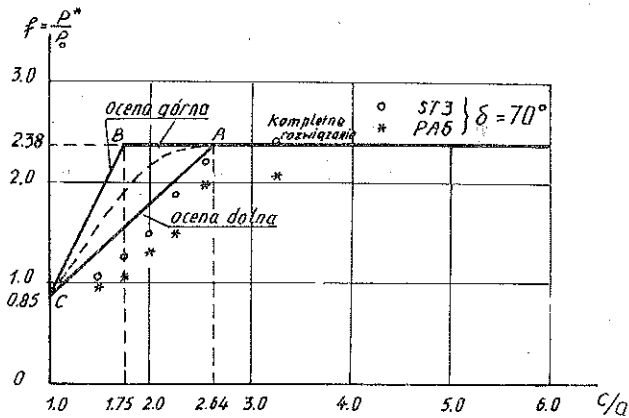
$$(6.1) \quad d = 4,896a, \quad H = 2,23a.$$

<sup>(2)</sup>W praktyce dogodniejsze jest postępowanie odwrotne. Budujemy szereg pól naprężeń dla różnych dowolnie obranych wartości kąta  $\psi$ ; wyznaczamy odpowiadające im promienie przedłużeń  $c$ , a następnie dla danej wartości promienia próbki wyznaczamy kąt  $\psi$  i ocenę nośności przez interpolację.





Rys. 5



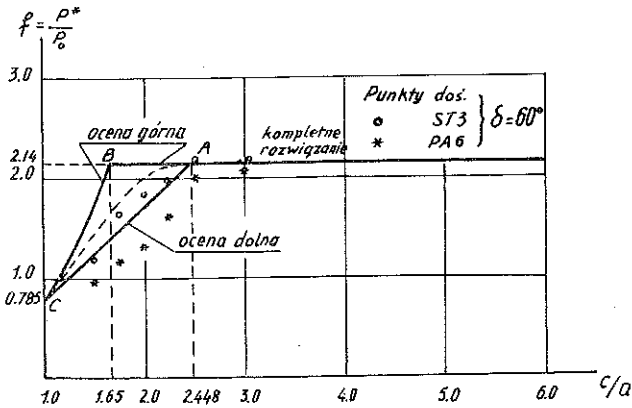
Rys. 6

Z drugiej strony wzór (1.1) można napisać w innej formie

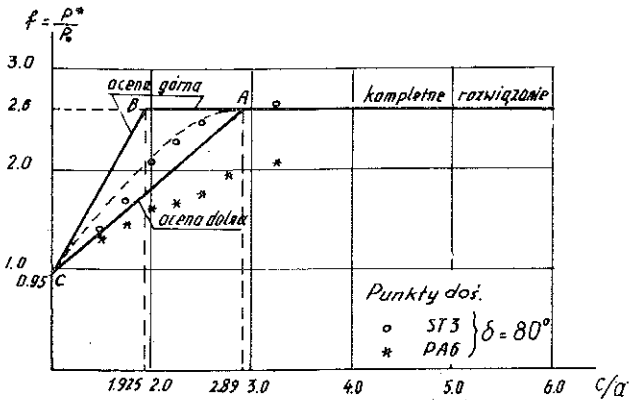
$$(6.2) \quad a = 0,2 \operatorname{tg} 60^\circ (1 - R_c/100).$$

Z równości (6.1) i wzoru (6.2) można określić teoretyczne związki pomiędzy twardością Rockwella a wymiarami, jakie co najmniej powinna mieć badana próbka, aby pomiar twardości był miarodajny. Związki te przedstawiono wykreślnie na rys. 5.

Widoczne jest, że pomiary dla materiałów twardych można przeprowadzać na małych próbkach. Materiały miękkie wymagają większych próbek.



Rys. 7



Rys. 8

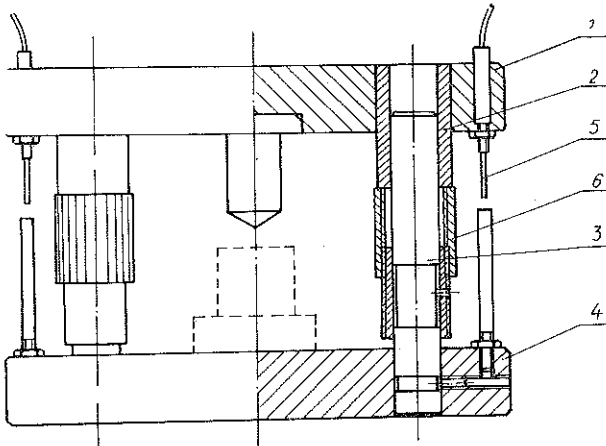
## 7. WERYFIKACJA DOŚWIADCZALNA

Doświadczenia miały na celu weryfikację podanych rozwiązań i oszacowań nośności dla próbek o średnicach małych, dla których powyżej (w p. 5) podano oszacowania teoretyczne. Badane próbki wykonane z dwóch materiałów stali ST3 i stopu aluminiowego PA6 podzielono na dwie grupy.

W pierwszej grupie próbki miały stałą wysokość większą od potrzebnej wartości teoretycznej  $H=2,23a$  dla stożka o kącie  $120^\circ$ ,  $H=2,64a$  dla stożka  $140^\circ$  i  $H=3,033a$  dla stożka  $160^\circ$ . Średnice poszczególnych próbek grupy były różne. W drugiej grupie próbki miały różne wysokości, ale stałą średnicę większą od teoretycznej wartości  $d=4,896a$  dla stożka o kącie  $120^\circ$ ,  $d=5,26a$  dla stożka  $140^\circ$  i  $d=5,78a$  dla stożka  $160^\circ$ . W pierwszej grupie zbadano 8 próbek o wysokości  $H=25$  mm i różnych średnicach od 12 mm do 32 mm. W drugiej grupie średnica równała się  $d=45$  mm, a wysokości  $H$  były różne od 4 mm do 28 mm.

Stożki naciskające wykonano ze stali NC10 i zahartowano do twardości 55-60HRC. Powierzchnię roboczą stożków wykonano w klasie gładkości V12

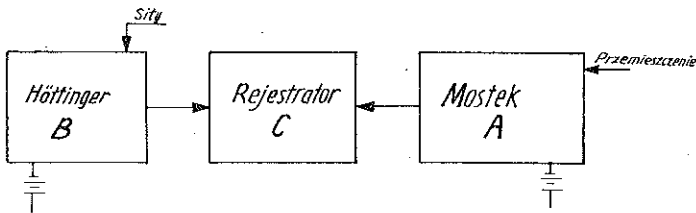
w celu zmniejszenia wpływu tarcia na powierzchni styku. Przyrząd do wciskania stożka pokazano na rys. 9. Stożek i dwa czujniki umieszczono na ruchomej płycie 1 prowadzonej w tulejach 2. Stożek został zamocowany nieruchomo w płycie głowicowej. Aby wyeliminować wpływ ewentualnych niedokładności wykonania



Rys. 9

przyrządu na wyniki doświadczeń stosowano do pomiaru przemieszczeń dwa czujniki 5 umieszczone obok tulejek prowadzących. Dzięki specjalnemu połączeniu elektronicznemu na rejestratorze otrzymuje się współrzędną przemieszczenia jako wielkość odpowiadającą głębokości  $h=0$ , przy której ustawiono pozycje zerowe na wzmacniaczu i rejestratorze  $x-y$ .

Obciążenie wszystkich próbek realizowano za pomocą uniwersalnej hydraulicznej maszyny wytrzymałościowej typu ZD-10.



Rys. 10

Na rys. 10 przedstawiono schemat ogólny stanowiska badawczego. Przemieszczenia rejestrowano za pomocą dwóch czujników indukcyjnych OT-14, połączonych przez statyczny wielokanałowy mostek tensometryczny typu N-101 A. Do rejestracji siły stosowano czujnik B połączony z dynamometrem na rejestrator za pośrednictwem wzmacniacza firmy Höttinger. Jako rejestrator C stosowano oscylograf katodowy PRO-12. Zastosowanie rejestratora powodowało konieczność sprowadzenia do

jednego poziomu zerowego wskazania dla dwóch czujników. Porównanie wyników obliczeń i doświadczeń przeprowadzono w tablicy 4 natomiast szacowanie nośności dla próbek o małych wymiarach podano na rysunkach 6, 7, 8.

Tablica 4

a (mm)	$\delta=60^\circ$			$\delta=70^\circ$			$\delta=80^\circ$		
	$d_{teor}$ (mm)	$d_{do\acute{s}}$ (mm)		$d_{teor}$ (mm)	$d_{do\acute{s}}$ (mm)		$d_{teor}$ (mm)	$d_{do\acute{s}}$ (mm)	
		PA 6	ST 3		PA 6	ST 3		PA 6	ST 3
2.5	12.24	15.3	14.7	13.15	14.0	14.0	14.46	—	—
3.0	14.97	17.2	17.4	15.78	16.5	17.0	17.36	19.0	19.30
4.0	19.60	21.3	21.5	20.04	21.8	21.5	23.15	24.0	24.70
5.0	—	—	—	—	—	—	29.00	30.0	30.20

a (mm)	$H_{teor}$ (mm)	$H_{do\acute{s}}$ (mm)		$H_{teor}$ (mm)	$H_{do\acute{s}}$ (mm)		$H_{teor}$ (mm)	$H_{do\acute{s}}$ (mm)	
		PA 6	ST 3		PA 6	ST 3		PA 6	ST 3
2.0	4.46	—	—	5.28	—	—	6.06	7.0	7.0
2.5	5.57	6.5	6.6	6.60	—	—	7.57	—	—
3.0	6.69	7.0	7.5	7.92	8.8	9.0	9.10	10.0	10.0
3.5	7.80	8.5	8.4	9.24	10.0	10.5	10.61	—	—
4.0	8.92	—	—	10.56	11.0	11.8	12.13	14.0	13.5
5.0	11.15	—	—	13.20	—	—	15.16	—	—

W większości wyników uzyskanych z doświadczeń różnice między wartościami teoretycznymi a doświadczalnymi wynoszą od 1%–12%. Te różnice mogą być spowodowane przez tarcie, jakie mimo smarowania występuje na powierzchni styku między stożkiem i materiałem próbki, a którego nie uwzględniono w rozwiązaniu teoretycznym, oraz przez wpływ wzmocnienia materiału.

Niektóre wyniki różnią się nawet o 20% do 25%. Na przykład przy wciskaniu stożka o kącie wierzchołkowym  $120^\circ$  w aluminium, przy promieniu wgłębienia  $a=2,5$  mm wartość  $d_{teor}=12,24$  mm, a wartość  $d_{do\acute{s}}=15,3$  mm. Tak więc wartość  $d_{do\acute{s}}$  jest większa od  $d_{teor}$  o 25%. Ale taka różnica występuje tylko w jednym przypadku. Ten błąd spowodowany jest nie tylko przyczynami omówionymi powyżej, ale — być może — również błędem pomiaru. Na rysunkach 6, 7, 8 podano wartości  $f=P^*/P_0$  uzyskane z doświadczeń dla PA6 i ST3 mających odpowiednio granicę płynięcia  $\sigma_{pl}^{(PA\ 6)}=35,4$  kg/mm<sup>2</sup> i  $\sigma_{pl}^{(ST\ 3)}=31,4$  kg/mm<sup>2</sup>.

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. G. ATKINS and D. TABOR, *Plastic indentation in metals with cones*, J. Mech. Phys. Solids, **13**, 149–164, 1965.
2. D. TABOR, *The hardness of metals*, 1951.
3. D. S. DUGDALE, *Cone indentation experiments*, J. Mech. Phys. Solids, **2**, 265–277, 1954.
4. F. J. LOCKETT, *Indentation of a rigid-plastic material by a conical indenter*, J. Mech. Phys. Solids, **11**, 345–355, 1963.

5. L. DIETRICH, J. MIASKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI, *Nośność granicza elementów konstrukcji*, Warszawa 1970.
6. R. T. SHIELD, *On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry*, Proc. Roy. Soc. 233A, N. 1193, 1955.
7. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki*, Warszawa 1967.
8. Z. MRÓZ, *Graphical solution of axially symmetric problems of plastic flow*, ZAMP, 18, 2, 1967.
9. K. BUNGARDT, *Handbuch der Werkstoffprüfung*, Berlin—Heidelberg, 416—420, 1955.
10. J. F. BISHOP, *On the complete solution to problems of deformation of a plastic-rigid material*, J. Mech. Phys. Solids, 2, 43—45, 1955.
11. А. Ю. ИШЛИНСКИЙ, *Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринелля*. Прик. Мат. Мех., 18, вз, Ленинград 1944.

Резюме

ИСПЫТАНИЕ ТВЕРДОСТИ ПО РОКВЕЛЛУ КАК ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Работа имеет целью определение минимальных размеров образца материала подвергнутого испытанию твердости по Роквеллу. Теоретическая задача сформулирована в рамках теории течения жестко-пластической несжимаемой среды описываемой законом течения ассоциированного с условием пластичности Треска, а также при предположении отсутствии трения между конусом и материалом образца. Результаты вычислений проверены экспериментально.

SUMMARY

ROCKWELL HARDNESS TEST AS A PROBLEM OF PLASTICITY THEORY

The paper is aimed at determination of minimal dimensions of a specimen subjected to the Rockwell hardness test. The problem is formulated within the framework of the theory of flow of rigid-perfectly plastic incompressible materials obeying the flow rule associated with the Tresca yield condition, and under the assumption of absence of friction between the cone and the specimen tested. Theoretical results are verified by means of experiments.

POLSKA AKADEMIA NAUK  
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

*Praca została złożona w Redakcji dnia 15 czerwca 1973 r.*