

REGULACJA STANU DEFORMACJI W PŁASKICH USTROJACH PRĘTOWYCH

JAN HOLNICKI-SZULC (WARSZAWA)

WSTĘP

W pracy rozpatrzono tarcze siatkowe utworzone z n ($n=2, 3$) rodzin smukłych prętów przyrządowych wykonanych z izotropowego, sprężystego materiału. Ograniczono się do rozpatrywania tarcz o tak gęstej i regularnej siatce prętów oraz na tyle łagodnie zmiennymi obciążeniami, że można uzyskać zadowalające wyniki posługując się ciągłym modelem ośrodka dyskretnego [6]. Założono, że przekroje poprzeczne prętów są symetryczne względem głównych osi bezwładności, leżących w płaszczyźnie parametryzowanej kartezjańskim układem współrzędnych x^k .

Stan napięcia i odkształcenia tak określonych ustrojów pod wpływem działania obciążeń zewnętrznych można określić posługując się modelem płaskiego, ciągłego ośrodka mikropolarnego.

W pracy rozpatrzono możliwość wprowadzenia do ustroju wstępnych odkształceń (dystorsji), wywołujących określony stan wstępnych napięć. Wprowadzenie wstępnych odkształceń do tarczy siatkowej umożliwia regulację pól sił wewnętrznych i deformacji, wywołanych określonym obciążeniem zewnętrznym i dostosowanie ich do własności mechanicznych i geometrycznych ustroju. Można także tą drogą zapobiegać skutkom niepożądanych zmian warunków pracy konstrukcji, jak np. zmienności obciążeń zewnętrznych, wpływu zmian temperatur, osiadania podpór.

W p. 1 pracy omówiono ogólne zależności określające wpływ dystorsji na stan deformacji ustroju siatkowego. Rozpatrzono przypadki tarcz siatkowych o węzłach przegubowych. W p. 2 pracy podano propozycję wykorzystania wprowadzonych do tarczy dystorsji do regulacji pól sił wewnętrznych i stanu deformacji ustroju. Sformułowano tam problem takiego doboru dystorsji, aby końcowy stan napięcia tarczy spełniał warunek minimum pewnego funkcjonału.

W p. 3 zilustrowano powyższe rozważania przykładem zagadnienia kołowo-symetrycznego.

1. STATYKA PRĘTOWYCH TARCZ SIATKOWYCH Z UWZGLĘDNIENIEM WPŁYWU DYSTORSJI

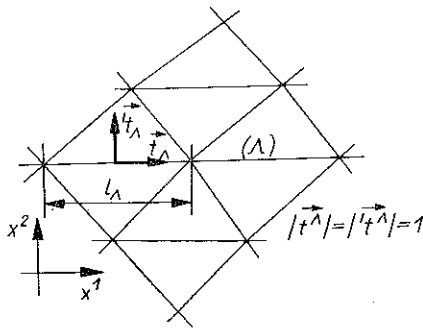
W rozważaniach posłużono się ciągłym modelem ośrodka dyskretnego, opracowanym w publikacji [6].

Stan deformacji ustroju można opisać funkcjami u^k, v , które w węzłach przyjmują wartości ich przemieszczeń i obrotów, a między nimi mogą być w przybliżeniu traktowane jako liniowe. Związki geometryczne przyjmują postać

$$(1.1) \quad \gamma_{kl} = u_{l,k} + \varepsilon_{lk} v, \quad \kappa_k = v_{,k}.$$

Stan napięcia ustroju można opisać polami tensorowymi $p^{kl} = \sum_A p_{(A)}^{kl}$, $m^k = \sum_A m_{(A)}^k$. Funkcje $p_{(A)}^{kl}, m_{(A)}^k$ przyjmują w połowie rozpiętości prętów wartości

$$(1.2) \quad \begin{aligned} p_{(A)}^{kl} &= t_{(A)}^k (t_{(A)}^l P_{(A)} + {}'t_{(A)}^l \tilde{P}_{(A)}) {}'l_{(A)}^{-1}, \\ m_{(A)}^k &= t_{(A)}^k \check{M}_{(A)} {}'l_{(A)}^{-1}, \end{aligned}$$



Rys. 1

a pomiędzy tymi punktami traktowane są w przybliżeniu jako liniowe. Wielkości $P_A, \tilde{P}_A, \check{M}_A$ i $'l_A$, występujące w związkach (1.2), opisują odpowiednio wartości siły normalnej, siły stycznej, momentu zginającego w płaszczyźnie tarczy, odległości prętów rodziny A w połowie rozpiętości pręta (rys. 1) (wektory $t_A^k, {}'t_A^k$ zaznaczono na rysunku).

Podstawowe związki opisujące statykę tarczy siatkowej przyjmą, zapisane w prostokątnym układzie kartezjańskim x^k , postać [6]:

równania równowagi

$$(1.3) \quad p^{kl}_{,k} + b^l = 0, \quad m^k_{,k} + \varepsilon_{kl} p^{kl} + h = 0;$$

warunki nierozdzielności

$$(1.4) \quad \varepsilon^{kl} \gamma_{km,t} + \kappa_m = 0, \quad \varepsilon^{kl} \kappa_{k,t} = 0;$$

związki fizyczne

$$(1.5) \quad p^{kl} = A^{klmn} \gamma_{mn}, \quad m^k = C^{kl} \kappa_l,$$

przy czym

$$(1.6) \quad \begin{aligned} A^{klmn} &= \sum_A A_{(A)}^{klmn} = \sum_A t_{(A)}^k t_{(A)}^m \left(\frac{E_{(A)} A_{(A)}}{{}'l_{(A)}} t_{(A)}^l t_{(A)}^n + \frac{12 E_{(A)} J_{(A)}''}{{}'l_{(A)}^2 t_{(A)}^2} {}'t_{(A)}^l {}'t_{(A)}^n \right), \\ C^{kl} &= \sum_A C_{(A)}^{kl} = \sum_A t_{(A)}^k t_{(A)}^l \frac{E_{(A)} J_{(A)}''}{{}'l_{(A)}}, \end{aligned}$$

gdzie ε_{kl} oznacza symbol Ricciego, b^l, h składowe siłowe i momentowe obciążeń zewnętrznych, E_A, A_A moduł Younga i przekrój poprzeczny pręta A , J'_A moment bezwładności przekroju pręta A względem osi prostopadłej do płaszczyzny tarczy. W związkach (1.6) przyjęto doskonałą sztywność węzłów.

Napięciowe warunki brzegowe przyjmą postać

$$(1.7) \quad p_{(n)}^l = p^{kl} n_k, \quad m_{(n)} = m^k n_k,$$

gdzie n_k oznacza składowe normalnej zewnętrznej do brzegu.

W dalszych rozważaniach rozpatrzono możliwość wprowadzenia do ustroju pewnego pola wstępnych odkształceń (dystorsji, por. [3, str. 474]).

Ponieważ rozważania prowadzone są w modelu ciągłym ośrodka dyskretnego, przeto ograniczono się do rozpatrywania takich pól dystorsji, które dają się opisać za pomocą pól tensorowych $\overset{\circ}{\gamma}_{kl}, \overset{\circ}{\kappa}_k$ i których składowe są funkcjami odpowiednio regularnymi. Zależność pomiędzy stanem napięcia ustroju, stanem odkształcenia oraz dystorsjami można wyrazić przez zmodyfikowane związki konstytutywne:

$$(1.8) \quad p^{kl} = A^{klmn} (\gamma_{mn} - \overset{\circ}{\gamma}_{mn}), \quad m^k = C^{km} (\kappa_m - \overset{\circ}{\kappa}_m),$$

co stanowi uogólnienie zależności podanych w pracy [3, str. 474] na ośrodek mikro-polarny.

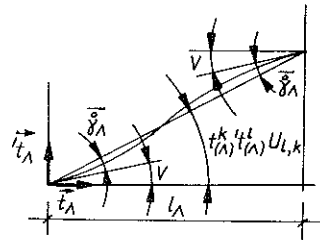
Wielkości

$$(1.9) \quad \overset{\circ}{\gamma}_A = t_{(A)}^k t_{(A)}^l \overset{\circ}{\gamma}_{kl}, \quad \bar{\overset{\circ}{\gamma}}_A = t_{(A)}^k t_{(A)}^l \overset{\circ}{\gamma}_{kl}, \quad \bar{\overset{\circ}{\kappa}}_A = t_{(A)}^k t_{(A)}^l \overset{\circ}{\kappa}_k$$

określają w połowie rozpiętość pręta A odpowiednio jego wstępne wydłużenie, różnicę pomiędzy kątem wstępnego obrotu cięciwy pręta A a średnią wartością kątów wstępnego obrotu węzłów ograniczających pręt A oraz różnicę kątów wstępnego obrotu węzłów ograniczających pręt A (rys. 2).

W przypadku rozpatrywania dystorsji wywołanych jedynie wydłużeniami prętów należy na pola $\overset{\circ}{\gamma}_{kl}, \overset{\circ}{\kappa}_k$ narzucić dodatkowo warunki ograniczające:

$$(1.10) \quad \begin{aligned} t_{(A)}^k t_{(A)}^l \overset{\circ}{\gamma}_{kl} &= 0, \\ \overset{\circ}{\kappa}_k &= 0. \end{aligned}$$



Rys. 2

Ograniczono zakres rozważań do pól dystorsji wywołanych wewnątrz ustroju, przyjmując założenie, że na brzegu rozpatrywanego obszaru zachodzą warunki

$$(1.11) \quad \left. \begin{aligned} \overset{\circ}{\gamma}_{kl} n^k &= 0 \\ \overset{\circ}{\kappa}_k n^k &= 0 \end{aligned} \right\} \text{na } A_p, \quad \left. \begin{aligned} \overset{\circ}{\gamma}_{kl} t^k &= 0 \\ \overset{\circ}{\kappa}_k t^k &= 0 \end{aligned} \right\} \text{na } A_u,$$

gdzie A_p oznacza część brzegu z danymi warunkami napięciowymi, A_u część brzegu z danymi warunkami kinematycznymi oraz t^k wektor jednostkowy, styczny do brzegu.

Układ związków opisujących statykę tarcz z uwzględnieniem dystorsji, wyrażony w odkształceniach, można uzyskać wstawiając związki fizyczne (1.8) do równań równowagi (1.3) oraz dopisując warunki nierozdzielności (1.4) i warunki brzegowe (1.7) i (1.11):

$$(1.12) \quad \begin{aligned} [A^{klmn}(\gamma_{mn} - \overset{\circ}{\gamma}_{mn})]_{,k} + b^l &= 0, \\ [C^{km}(\kappa_m - \overset{\circ}{\kappa}_m)]_{,k} + \varepsilon_{kl} A^{klmn}(\gamma_{mn} - \overset{\circ}{\gamma}_{mn}) + h &= 0 \end{aligned}$$

oraz

$$(1.13) \quad \varepsilon^{kl} \gamma_{km,l} + \kappa_m = 0, \quad \varepsilon^{kl} \kappa_{k,l} = 0$$

z warunkami brzegowymi

$$(1.14) \quad \begin{aligned} p_{(n)}^l &= A^{klmn}(\gamma_{mn} - \overset{\circ}{\gamma}_{mn}) n_k, \\ m_{(n)} &= C^{km}(\kappa_m - \overset{\circ}{\kappa}_m) n_k, \\ \overset{\circ}{\gamma}_{kl} n^k &= 0, \quad \overset{\circ}{\kappa}_k n^k = 0. \end{aligned}$$

Wstawiając zależności geometryczne (1.1) do równań równowagi (1.12) i warunków brzegowych (1.14), uzyskuje się układ związków wyrażony w przemieszczeniach u^k i obrotach v :

$$(1.15) \quad \begin{aligned} [A^{klmn}(u_{m,n} + \varepsilon_{mn} v)]_{,k} + b^l - (A^{klmn} \overset{\circ}{\gamma}_{mn})_{,k} &= 0, \\ (C^{km} v_{,m})_{,k} + \varepsilon_{kl} A^{klmn}(u_{m,n} + \varepsilon_{mn} v) + h - \varepsilon_{kl} A^{klmn} \overset{\circ}{\gamma}_{mn} - (C^{km} \overset{\circ}{\kappa}_m)_{,k} &= 0 \end{aligned}$$

z warunkami brzegowymi

$$(1.16) \quad \begin{aligned} p_{(n)}^l &= A^{klmn}(u_{m,n} + \varepsilon_{mn} v) n_k - A^{klmn} \overset{\circ}{\gamma}_{mn} n_k, \\ m_{(n)} &= C^{km} v_{,m} n_k - C^{km} \overset{\circ}{\kappa}_m n_k, \\ \overset{\circ}{\gamma}_{mn} n^m &= 0, \quad \overset{\circ}{\kappa}_m n^m = 0 \end{aligned}$$

na części brzegu A_p oraz

$$(1.17) \quad u_k^{(n)} = u_k, \quad v^{(n)} = v, \quad \overset{\circ}{\gamma}_{mn} t^m = 0, \quad \overset{\circ}{\kappa}_m t^m = 0$$

na części brzegu A_n .

Z postaci związków (1.15) – (1.17) widać, że wpływ dystorsji można traktować przez analogię jako dodatkowe obciążenie polem sił i momentów masowych w obszarze oraz sił i momentów powierzchniowych na brzegu. Można zatem zamiast poszukiwać rozwiązania z uwzględnieniem dystorsji $\overset{\circ}{\gamma}_{kl}$, $\overset{\circ}{\kappa}_k$ rozwiązać przez analogię zagadnienie, w którym nie występują dystorsje, natomiast wystąpią obciążenia masowe:

$$(1.18) \quad \begin{aligned} \overset{*}{b}^n &= b^n - (A^{klmn} \overset{\circ}{\gamma}_{mn})_{,k}, \\ \overset{*}{h} &= h - \varepsilon_{kl} A^{klmn} \overset{\circ}{\gamma}_{mn} - (C^{km} \overset{\circ}{\kappa}_m)_{,k} \end{aligned}$$

oraz powierzchniowe na części brzegu A_p , na której określono warunki brzegowe napięciowe:

$$(1.19) \quad \begin{aligned} \overset{*}{P}_{(n)}^n &= p_{(n)}^n + A^{klmn} \overset{\circ}{\gamma}_{mn} n_k, \\ \overset{*}{m}_{(n)} &= m_{(n)} + C^{km} \overset{\circ}{\kappa}_m n_k. \end{aligned}$$

Otrzymane pole przemieszczeń u_k, v , będzie w obu przypadkach identyczne (przyjmując te same warunki brzegowe przemieszczeniowe na części brzegu A_n). Jest to uogólnienie na ośrodek mikropolarny zasady podanej w pracy [3, str. 475], gdzie za punkt wyjścia przyjęto rozważania energetyczne.

Rozpatrzmy tarcze utworzone z trzech rodzin prętów, łączonych przegubowymi węzłami.

W omawianych tarczach pręty przenoszą jedynie siły osiowe, na skutek czego [6, str. 89] można przyjąć

$$(1.20) \quad A^{klmn} = \sum_A t_{(A)}^k t_{(A)}^l t_{(A)}^m t_{(A)}^n \frac{E_{(A)} A_{(A)}}{l_{(A)}}$$

oraz

$$(1.21) \quad C^{kl} = 0.$$

Ze związków (1.20) wynika, że $m^k = 0, p^{kl} = p^{lk}$. Jeżeli $h = 0$, to układ warunków (1.1) – (1.7) sprowadza się do układu równań klasycznej teorii sprężystości [6]; zatem ograniczając pole dystorsji do $\overset{\circ}{\gamma}_{kl} = \overset{\circ}{\gamma}_{lk}$ otrzymuje się:

równania równowagi

$$(1.22) \quad p^{kn}_{,k} + b^n = 0;$$

warunek nierozdzielności odkształceń

$$(1.23) \quad \gamma_{11,22} + \gamma_{22,11} = 2\gamma_{12,12};$$

związki fizyczne

$$(1.24) \quad p^{kl} = A^{klmn} (\gamma_{mn} - \overset{\circ}{\gamma}_{mn});$$

związki geometryczne

$$(1.25) \quad \gamma_{kl} = u_{(k,l)};$$

warunki brzegowe napięciowe

$$(1.26) \quad p^l_{(n)} = p^{kl} n_k.$$

Układy równań (1.11) – (1.14) oraz (1.15) – (1.17) sprowadzają się do równań (por. [3, str. 476])

w odkształceniach

$$(1.27) \quad [A^{klmn} (\gamma_{mn} - \overset{\circ}{\gamma}_{mn})]_{,k} + b^l = 0$$

oraz

$$(1.28) \quad \gamma_{11,22} + \gamma_{22,11} = 2\gamma_{12,12}$$

z warunkami brzegowymi

$$(1.29) \quad p^l_{(n)} = A^{klmn} (\gamma_{mn} - \overset{\circ}{\gamma}_{mn}) n_k, \quad \overset{\circ}{\gamma}_{kl} n^k = 0;$$

w przemieszczeniach

$$(1.30) \quad \left[A^{klmn} \left(\frac{u_{m,n} + u_{n,m}}{2} - \overset{\circ}{\gamma}_{mn} \right) \right]_{,k} + b^l = 0$$

z warunkami brzegowymi

$$(1.31) \quad \left. \begin{aligned} p_{(n)}^l &= A^{klmn} \left(\frac{u_{m,n} + u_{n,m}}{2} - \overset{\circ}{\gamma}_{mn} \right) n_k \\ \overset{\circ}{\gamma}_{kl} n^k &= 0, \end{aligned} \right\} \text{ na } A_p$$

oraz

$$(1.32) \quad \left. \begin{aligned} u_k &= u_k^{(n)} \\ \overset{\circ}{\gamma}_{kl} t^k &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ na } A_u.$$

Rozpatrzmy jeszcze szczególnie przypadek tarcz kratowych utworzonych z dwu rodzin prętów, łączonych przegubowymi węzłami. Niech trajektorie kierunków głównych pól tensorowych γ_{kl} i $\overset{\circ}{\gamma}_{kl}$ pokrywają się i wyznaczają ortogonalną siatkę prętów.

W omawianym tu przypadku należy zażądać, aby przemieszczeniowe warunki brzegowe zapewniły: 1) geometryczną niezmiennosc ustroju, 2) możliwość wprowadzenia do ustroju pola dystorsji wywołującego stan samonapięcia (np. unieruchomione węzły brzegowe).

Równania (1.27) – (1.32), napisane w układzie współrzędnych ξ^K związanych z rodzinami prętów, przyjmą postać (zastosowano różniczkowanie kowariantne): w odkształceniach

$$(1.33) \quad \left. \begin{aligned} [A^{KLMN} (\gamma_{MN} - \overset{\circ}{\gamma}_{MN})]_{|K} + b^L &= 0, \\ \gamma_{11|22} + \gamma_{22|11} &= 2\gamma_{12|12}, \\ A^{KLMN} (\gamma_{MN} - \overset{\circ}{\gamma}_{MN}) n_K &= p_{(n)}^L, \\ \overset{\circ}{\gamma}_{KL} n^K &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ na } A_p;$$

w przemieszczeniach

$$(1.34) \quad \left. \begin{aligned} [A^{KLMN} \left(\frac{u_{M|N} + u_{N|M}}{2} - \overset{\circ}{\gamma}_{MN} \right)]_{|K} + b^L &= 0, \\ A^{KLMN} \left(\frac{n_{M|N} + u_{N|M}}{2} - \overset{\circ}{\gamma}_{MN} \right) n_K &= p_{(n)}^L, \\ \overset{\circ}{\gamma}_{KL} n^K &= 0 \\ u_K &= u_K^{(n)} \\ \overset{\circ}{\gamma}_{KL} t^K &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ na } A_p,$$

Ze względu na szczególnie dobrany układ współrzędnych ξ^K , tensory γ_{KL} i $\overset{\circ}{\gamma}_{KL}$ występujące w powyższych równaniach mają jedynie po dwie niezależne składowe: γ_{11} , γ_{22} i $\overset{\circ}{\gamma}_{11}$, $\overset{\circ}{\gamma}_{22}$. Równanie (1.10) jest w rozpatrywanym przypadku spełnione tożsamościowo, co ogranicza pola dystorsji do takich, które można wywołać jedynie przez wydłużenia (skrócenia) prętów siatki.

2. O MOŻLIWOŚCI REGULACJI STANU DEFORMACJI PRĘTOWYCH TARCZ SIATKOWYCH

Jeżeli do ustroju wprowadzono określone dystorsje $\overset{\circ}{\gamma}_{kl}, \overset{\circ}{\kappa}_k$, to równania (1.12) i (1.13) stanowią układ sześciu równań ze względu na sześć niewiadomych γ_{kl}, κ_k , a związki (1.15) stanowią układ trzech równań względem trzech niewiadomych u_k, v .

Poniżej podjęto próbę sformułowania zagadnienia odmiennego, mianowicie regulacji stanu deformacji ustroju przez wprowadzenie odpowiednich dystorsji.

Celem zatem poszukiwań będzie znalezienie takich pól odkształceń wstępnych $\overset{\circ}{\gamma}_{kl}, \overset{\circ}{\kappa}_k$, aby końcowy stan odkształcenia obciążonego ustroju γ_{kl}, κ_k spełniał obok równań (1.12) i (1.13) następujący warunek regulacji:

$$(2.1) \quad \int_D \int f(\gamma_{kl}, \kappa_k, \overset{\circ}{\gamma}_{kl}, \overset{\circ}{\kappa}_k) d\omega = \min.$$

Dla sformułowania przykładów warunków regulacji celowe jest zdefiniowanie charakterystyk odkształcenia e_{Ak}, φ_A i napięcia p^{Ak}, m^A odniesionych do prętów poszczególnych rodzin A [1]:

$$(2.2) \quad e_{Al} \stackrel{df}{=} \gamma_{kl} t_A^k, \quad \varphi_A \stackrel{df}{=} \kappa_k t_A^k$$

oraz

$$(2.3) \quad p^{kl} = \sum_A p^{(A)l} t_{(A)}^k = \sum_A p^{(A)kl}, \quad m^k = \sum_A m^{(A)} t_{(A)}^k = \sum_A m^{(A)k}.$$

Warunek na minimum energii wewnętrznej ustroju ma postać

$$(2.4) \quad \int_D \int \frac{1}{2} (p^{Ak} e_{Ak} + m^A \varphi_A) d\omega = \min.$$

Prowadzi on po uwzględnieniu (1.8) do przyjęcia na f następującej funkcji:

$$(2.5) \quad f \equiv \frac{1}{2} A^{klmn} (\gamma_{kl} - \overset{\circ}{\gamma}_{kl}) \gamma_{mn} + \frac{1}{2} C^{kl} (\kappa_k - \overset{\circ}{\kappa}_k) \kappa_l.$$

Warunek na minimum odkształcalności ustroju sprowadza się do przyjęcia

$$(2.6) \quad f \equiv \delta^{A\Phi} (\delta^{kl} e_{Ak} e_{\Phi l} + \varphi_A \varphi_{\Phi}),$$

gdzie $\delta^{A\Phi}, \delta^{kl}$ to symbole Kroneckera.

Po podstawieniu (2.2) znajdziemy

$$(2.7) \quad f \equiv \delta^{A\Phi} t_A^l t_{\Phi}^j (\gamma_{kl} \gamma_{ij} \delta^{kl} + \kappa_i \kappa_j).$$

Analogicznie, warunek na minimum działania prowadzi do funkcji

$$(2.8) \quad f \equiv \delta^{A\Phi} t_A^l t_{\Phi}^j (\overset{\circ}{\gamma}_{kl} \overset{\circ}{\gamma}_{ij} \delta^{kl} + \overset{\circ}{\kappa}_i \overset{\circ}{\kappa}_j).$$

Warunek na minimum napięcia ustroju prowadzi do funkcji

$$(2.9) \quad f \equiv \delta_{A\Phi} (\delta_{kl} p^{Ak} p^{\Phi l} + m^A m^{\Phi});$$

korzystając ze związków (2.3), funkcję f można przedstawić inaczej:

$$(2.10) \quad f \equiv (\gamma_{kl} - \overset{\circ}{\gamma}_{kl}) (\gamma_{ij} - \overset{\circ}{\gamma}_{ij}) \delta^{A\Phi} \delta_{mn} A_A^{klpm} t_{Ap} A_\Phi^{ijrn} t_{\Phi r} + \\ + (\kappa_m - \overset{\circ}{\kappa}_m) (\kappa_n - \overset{\circ}{\kappa}_n) \delta^{A\Phi} C_A^{km} t_{Ak} C_\Phi^{ln} t_{\Phi l}.$$

W celu uzyskania rozwiązań technicznie dających się zrealizować należy zagwarantować, aby stany odkształcenia ustroju γ_{kl} , κ_k oraz dystorsji $\overset{\circ}{\gamma}_{kl}$, $\overset{\circ}{\kappa}_k$ nie przekraczały stanów dopuszczalnych.

W związku z tym narzucono następujące ograniczenia na wielkości $\underline{\gamma}_A$, $\bar{\gamma}_A$, $\bar{\kappa}_A$, $\overset{\circ}{\gamma}_A$, $\overset{\circ}{\bar{\gamma}}_A$, $\bar{\kappa}_A$, (1.9):

$$(2.11) \quad \begin{aligned} -\underline{\varepsilon}_A &\leq t_{(A)}^k t_{(A)}^l \gamma_{kl} \leq \bar{\varepsilon}_A, \\ -\underline{\delta}_A &\leq t_{(A)}^k t_{(A)}^l \gamma_{kl} \leq \bar{\delta}_A, \\ -\underline{\varphi}_A &\leq t_{(A)}^k l_{(A)} \kappa_k \leq \bar{\varphi}_A \end{aligned}$$

oraz

$$(2.12) \quad \begin{aligned} -\underline{\overset{\circ}{\varepsilon}}_A &\leq t_{(A)}^k t_{(A)}^l \overset{\circ}{\gamma}_{kl} \leq \bar{\overset{\circ}{\varepsilon}}_A, \\ -\underline{\overset{\circ}{\delta}}_A &\leq t_{(A)}^k t_{(A)}^l \overset{\circ}{\gamma}_{kl} \leq \bar{\overset{\circ}{\delta}}_A, \\ -\underline{\overset{\circ}{\varphi}}_A &\leq t_{(A)}^k l_{(A)} \overset{\circ}{\kappa}_k \leq \bar{\overset{\circ}{\varphi}}_A, \end{aligned}$$

przy czym wielkości $\underline{\varepsilon}_A$, ..., $\bar{\varphi}_A$ są nieujemne, określone dla danego materiału i sposobu połączeń prętów w węzłach.

Tak więc omawiany problem prowadzi do zagadnienia wariacyjnego poszukiwania minimum warunkowego funkcjonału (2.1) z więzami nieholonomicznymi w postaci równań (1.12) i (1.13) oraz ograniczeniami w postaci nierówności (2.11) i (2.12) ze względu na dwanaście funkcji niewiadomych: γ_{kl} , κ_k , $\overset{\circ}{\gamma}_{kl}$, $\overset{\circ}{\kappa}_k$ z warunkami brzegowymi (1.14).

Można zauważyć, że w przypadku gdy ograniczenia (2.11), (2.12) nie ingerują w rozwiązanie, warunek regulacji (2.1) i (2.8) prowadzi do przyjęcia $\overset{\circ}{\gamma}_{kl} \equiv 0$ oraz $\overset{\circ}{\kappa}_k = 0$.

Wyrażając w równaniach (1.12), (1.13), (2.1) i (2.11) odkształcenia γ_{kl} , κ_k przez przemieszczenia i obroty na podstawie związków geometrycznych (1.1), uzyskać można problem wariacyjny względem dziewięciu niewiadomych funkcji u_k , v , $\overset{\circ}{\gamma}_{kl}$ i $\overset{\circ}{\kappa}_k$.

Rozwiązanie tak sformułowanego problemu jest trudne. Rozważmy zadanie, w którym ograniczeń (2.11) i (2.12) nie uwzględniono i określmy warunki konieczne na ekstremum funkcjonału (2.1). Określenie warunków dostatecznych jest skomplikowane i nie będzie w tej pracy rozpatrywane.

Jeżeli znalezione rozwiązanie spełniające warunki konieczne ekstremum funkcjonału (2.1) daje wartość całki (2.1) mniejszą niż rozwiązanie zagadnienia (1.15), (1.16) i (1.17), w którym nie uwzględniono wpływu dystorsji (przyjęto $\overset{\circ}{\gamma}_{kl} = 0$, $\overset{\circ}{\kappa}_k = 0$), to wprowadzenie określonego pola dystorsji jest technicznie przydatne. Jeżeli tak określone rozwiązanie nie spełnia ograniczeń (2.11) i (2.12), to należy poszukiwać najlepszego [w sensie kryterium (2.1)], dopuszczalnego rozwiązania na brzegu

obszaru opisanego warunkami (2.11) i (2.12) takiego, które daje najmniejszą wartość całki (2.1).

Poszukując warunków koniecznych ekstremum warunkowego funkcjonału (2.1) (wyrażonego względem u_k i v) z więzami w postaci równań (1.15), wprowadzono funkcjonal zastępczy o funkcji podcałkowej

$$F = F(u_{k,l}; u_{k,lm}; v; v,l; v,kl; \overset{\circ}{\gamma}_{kl}; \overset{\circ}{\gamma}_{kl,m}; \overset{\circ}{\kappa}_k; \overset{\circ}{\kappa}_{k,l}; \lambda_l(x_l); \alpha(x_l))$$

takiej, że

$$(2.13) \quad F = f(u_{k,l}; v; v,l; \overset{\circ}{\gamma}_{kl}; \overset{\circ}{\kappa}_k) + \lambda_l \{ [A^{klmn}(u_{m,n} + \varepsilon_{mn} v)]_{,k} + b^l - (A^{klmn} \overset{\circ}{\gamma}_{mn})_{,k} \} + \\ + \alpha [(C^{kl} v_{,l})_{,k} + \varepsilon_{kl} A^{klmn}(u_{m,n} + \varepsilon_{mn} v) + h - A^{klmn} \overset{\circ}{\gamma}_{mn} - (C^{kl} \overset{\circ}{\kappa}_l)_{,k}] = 0.$$

Pierwsza wariacja funkcjonału $J = \iint_D F(z,kl; z,k; z) d\omega$, gdzie z może przybierać wartości jednej z poszukiwanych funkcji $u_k, v, \overset{\circ}{\gamma}_{kl}, \overset{\circ}{\kappa}_k, \lambda_l, \alpha$, ma postać

$$(2.14) \quad \delta J = \int_C \{ \delta z [(F_{,(z,1)}) dx_2 - F_{,(z,2)} dx_1 - F_{,(z,11)} dx_2 + F_{,(z,22)} dx_1 - \\ - (F_{,(z,21)})_{,2} dx_2 - (F_{,(z,12)})_{,1} dx_1] + \delta z_{,1} [F_{,(z,11)} dx_2 - F_{,(z,21)} dx_1] + \\ + \delta z_{,2} [-F_{,(z,22)} dx_1 + F_{,(z,12)} dx_2] \} ds + \\ + \int_D \delta z [F_{,z} - (F_{,(z,1)})_{,1} - (F_{,(z,2)})_{,2} + (F_{,(z,11)})_{,11} + (F_{,(z,22)})_{,22} + \\ + (F_{,(z,12)} + F_{,(z,21)})_{,12}] d\omega.$$

Przyjęto tu oznaczenie $F_{,(s)} \equiv \partial F / \partial s$.

Warunek konieczny osiągnięcia ekstremum warunkowego przez funkcjonal (2.1), $\delta J \equiv 0$, prowadzi w obszarze D do układu dwunastu równań różniczkowych Eulera z dwunastoma niewiadomymi funkcjami $u_k, v, \overset{\circ}{\gamma}_{kl}, \overset{\circ}{\kappa}_k, \lambda_k, \alpha$, powstałych z przyrównania do zera wyrażenia występującego pod całką we wzorze (2.14):

$$(2.15) \quad \begin{aligned} & -(F_{,(u_k,l)})_{,l} + (F_{,(u_k,lm)})_{,lm} = 0, \\ & F_{,v} - (F_{,(v,k)})_{,k} + (F_{,(v,kl)})_{,kl} = 0, \\ & F_{,(\overset{\circ}{\gamma}_{kl})} - (F_{,(\overset{\circ}{\gamma}_{kl,m})}_{,m}) = 0, \\ & F_{,(\overset{\circ}{\kappa}_k)} - (F_{,(\overset{\circ}{\kappa}_k,l)}_{,l}) = 0, \\ & F_{,(\lambda_l)} = 0, \quad F_{,\alpha} = 0. \end{aligned}$$

Jeśli poszukiwane funkcje nie miałyby narzuconych warunków brzegowych (ich wariacje na brzegu byłyby dowolne), to przyjęłyby one naturalne warunki graniczne, wynikające z przyrównania do zera wyrażenia pod całką krzywoliniową (2.14):

$$(2.16) \quad F_{,(z,1)} \frac{dx_2}{ds} - F_{,(z,2)} \frac{dx_1}{ds} - F_{,(z,11)} \frac{dx_2}{ds} + F_{,(z,22)} \frac{dx_1}{ds} - \\ - \left(F_{,(z,11)} \frac{dx_2}{ds} \right)_{,2} + \left(F_{,(z,12)} \frac{dx_1}{ds} \right)_{,1} = 0,$$

$$(2.16) \quad \begin{aligned} F_{,(z,11)} \frac{dx_2}{ds} - F_{,(z,21)} \frac{dx_1}{ds} &= 0, \\ -F_{,(z,22)} \frac{dx_1}{ds} + F_{,(z,12)} \frac{dx_2}{ds} &= 0, \end{aligned}$$

[c. d.]

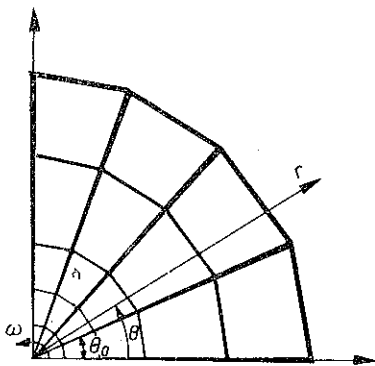
gdzie s oznacza styczną współrzędną brzegową oraz gdzie z należy zastąpić przez funkcje poszukiwane $u_k, v, \overset{\circ}{\gamma}_{kl}, \overset{\circ}{\kappa}_k$.

W przypadku, gdy na poszukiwane funkcje narzucone są warunki brzegowe (1.17), musi ich być sześć:

$$(2.17) \quad u_k - u_k^{(n)} = 0, \quad v - v^{(n)} = 0, \quad \overset{\circ}{\gamma}_{kl} t^k = 0, \quad \overset{\circ}{\kappa}_k t^k = 0$$

oraz sześć równań wynikających z warunków (2.16) następującej postaci:

$$(2.18) \quad \overset{\circ}{\gamma}_{kl,m} n^m = 0, \quad \overset{\circ}{\kappa}_{k,l} n^l = 0.$$



Rys. 3

3. PRZYKŁAD TARCZY KOŁOWOSYMETRYCZNEJ

Rozpatrzono przypadek kołowsymetrycznej tarczy złożonej z dwu rodzin prętów: obwodowych i radialnych (rys. 3), obciążonej kołowsymetrycznie. Ciężar własny tarczy pominięto.

Wprowadzając do ustroju pole dystorsji $\overset{\circ}{\gamma}_{kl}$ spełniające warunek kołowej symetrii, uzyskuje się pola tensorowe γ_{kl} i $\overset{\circ}{\gamma}_{kl}$, których trajektorie kierunków głównych pokrywają się z liniami biegunowego układu współrzędnych ξ^K (a jednocześnie z liniami siatki tarczy).

Układ równań opisujących pola odkształceń (1.33) sprowadzi się, po wypisaniu go we współrzędnych ξ^K i uwzględnieniu kołowej symetrii, do następującego:

$$(3.1) \quad r \left[\frac{E_r A_r}{l_\theta} (\gamma_r - \overset{\circ}{\gamma}_r) \right]_{,r} + \frac{E_r A_r}{l_\theta} (\gamma_r - \overset{\circ}{\gamma}_r) - \frac{E_\theta A_\theta}{l_r} (\gamma_\theta - \overset{\circ}{\gamma}_\theta) + b = 0,$$

$$(3.2) \quad r \gamma_{\theta,rr} + \gamma_{\theta,r} - \gamma_{r,r} = 0,$$

$$(3.3) \quad P_{(n)}^r = \frac{E_r A_r}{l_\theta} (\gamma_r - \overset{\circ}{\gamma}_r), \quad \overset{\circ}{\gamma}_r = 0 \quad \text{na } Ap.$$

Związki (3.1) – (3.3) można także uzyskać z równań (1.12) – (1.14), przyjmując na podstawie kołowej symetrii $\kappa_K \equiv \overset{\circ}{\kappa}_K \equiv 0$, $\gamma_{12} \equiv \gamma_{21} \equiv \overset{\circ}{\gamma}_{12} \equiv \overset{\circ}{\gamma}_{21} \equiv 0$. Zatem sposób połączeń prętów w węzłach (przegubowy lub sztywny) nie wpływa w tym przypadku na stan odkształcenia ustroju.

Równania (3.1) – (3.3) można wyrazić w przemieszczeniach radialnych oraz w składowych obwodowych i radialnych pola dystorsji:

równanie równowagi

$$(3.4) \quad r \left[\frac{E_r A_r}{l_\theta} (u_{,r} - \dot{\gamma}_r) \right]_{,r} + \frac{E_r A_r}{l_\theta} (u_{,r} - \dot{\gamma}_r) - \frac{E_\theta A_\theta}{l_r} \left(\frac{u}{r} - \dot{\gamma}_\theta \right) + b = 0;$$

warunki brzegowe

$$(3.5) \quad p_{(0)}^r = \frac{E_r A_r}{l_\theta} (u_{,r} - \dot{\gamma}_r), \quad \dot{\gamma}_r = 0.$$

Rozważmy przykład tarczy wirującej, której siatka prętów spełnia warunki geometryczne (rys. 3) i mechaniczne:

$$(3.6) \quad l_r \equiv l_\theta = r\theta_0, \quad E_r \equiv E_\theta = \text{const}, \quad A_r \equiv A_\theta = ar.$$

Przytoczenie tego przykładu, pomimo małego jego znaczenia praktycznego, uważam za celowe jako ilustrację ogólnej metody regulacji stanu deformacji. Rozwiązywanie innych przykładów prowadzi z reguły do konieczności stosowania numerycznych metod obliczeniowych.

Z ograniczeń (3.6) wynika, że

$$(3.7) \quad \frac{E_r A_r}{l_\theta} \equiv \frac{E_\theta A_\theta}{l_r} \equiv h = \text{const}, \quad \rho = \frac{A_r l_r + A_\theta l_\theta}{l_r l_\theta} = \text{const},$$

gdzie ρ jest funkcją gęstości rozmieszczenia materiału. Pomijając ciężar własny tarczy równaniu równowagi oraz warunkowi brzegowemu na obwodzie $r=r_1$ można nadać postać

$$(3.8) \quad r(u_{,r} - \dot{\gamma}_r)_{,r} + (u_{,r} - \dot{\gamma}_r) - \left(\frac{u}{r} - \dot{\gamma}_\theta \right) + \frac{\rho \omega^2 r}{h} = 0,$$

$$(3.9) \quad u_{,r} = 0, \quad \dot{\gamma}_r = 0, \quad \text{gdy} \quad r = r_1,$$

gdzie ω oznacza prędkość kątową obrotów tarczy oraz $\rho \omega^2 r$ masową siłę odśrodkową. Poszukujemy takiego pola dystorsji $\dot{\gamma}_r, \dot{\gamma}_\theta$, aby wirująca tarcza znajdowała się w stanie minimalnego napięcia, co odpowiada warunkowi regulacji (2.1) i (2.10), który przyjmie postać

$$(3.10) \quad \int_0^{r_1} \left[h^2 (u_{,r} - \dot{\gamma}_r)^2 + h^2 \left(\frac{u}{r} - \dot{\gamma}_\theta \right)^2 \right] dr = \min.$$

Przyjęto, że ograniczenia (2.11) i (2.12) nie ingerują w rozwiązanie zadania.

Poszukując minimum warunkowego funkcjonału (3.10) z więzami w postaci równania (3.8), należy wprowadzić funkcjonał zastępczy o funkcji podcałkowej (2.13):

$$(3.11) \quad F = h^2 (u_{,r} - \dot{\gamma}_r)^2 + h^2 \left(\frac{u}{r} - \dot{\gamma}_\theta \right)^2 + \lambda \left[r(u_{,r} - \dot{\gamma}_r)_{,r} + (u_{,r} - \dot{\gamma}_r) - \left(\frac{u}{r} - \dot{\gamma}_\theta \right) + \frac{\rho \omega^2 r}{h} \right],$$

z czterema niewiadomymi funkcjami: $u, \dot{\gamma}_r, \dot{\gamma}_\theta$ i λ .

Warunkiem koniecznym dla minimum warunkowego funkcjonału (3.10) jest spełnienie układu czterech równań Eulera (por. (2.15)):

$$(3.12) \quad F_{,u} - \frac{d}{dr} F_{,(u,r)} + \frac{d^2}{dr^2} F_{,(u,rr)} = 0, \quad F_{,\dot{\gamma}_r} - \frac{d}{dr} F_{,(\dot{\gamma}_r,r)} = 0, \quad F_{,\dot{\gamma}_\theta} = 0, \quad F_{,\lambda} = 0,$$

które przybierają postać

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \frac{2h^2}{r^2} u - \frac{2h^2}{r} \dot{\gamma}_\theta - \frac{\lambda}{r} - 2h^2 u'' + 2h^2 \dot{\gamma}_r' + \lambda' r &= 0, \\ 2h^2 u' - 2h^2 \dot{\gamma}_r - \lambda' r &= 0, \quad \frac{2h^2}{r} u - 2h^2 \dot{\gamma}_\theta - \lambda = 0, \\ r(u' - \dot{\gamma}_r)' + (u' - \dot{\gamma}_r) - \left(\frac{u}{r} - \dot{\gamma}_\theta \right) + \frac{\rho\omega^2 r}{h} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie $(\)' \equiv d/dr(\)$.

Widać, że trzy pierwsze równania nie są niezależne. Jeżeli trzecie równanie podzielimy przez r i odejmujemy od niego drugie zróżniczkowane względem r , to otrzymamy równanie pierwsze. Spełnienie równań drugiego i trzeciego gwarantuje zatem spełnienie równania pierwszego. Dysponujemy więc układem trzech niezależnych równań z czterema niewiadomymi: $u, \dot{\gamma}_r, \dot{\gamma}_\theta, \lambda$.

Rugując z równań (3.13)₂, (3.13)₃ funkcję λ i dopisując (3.13)₄, otrzymujemy układ dwóch równań z trzema niewiadomymi: $u, \dot{\gamma}_r, \dot{\gamma}_\theta$:

$$(3.14) \quad \frac{u}{r} - \dot{\gamma}_r + r\dot{\gamma}_\theta' = 0, \quad r(u' - \dot{\gamma}_r)' + (u' - \dot{\gamma}_r) - \left(\frac{u}{r} - \dot{\gamma}_\theta \right) + \frac{\rho\omega^2 r}{h} = 0.$$

Rugując z tych równań funkcję u , dochodzimy do równania:

$$(3.15) \quad r^2 \dot{\gamma}_r'' + 2r \dot{\gamma}_r' - \dot{\gamma}_r + r^3 \dot{\gamma}_\theta''' - 5r^2 \dot{\gamma}_\theta'' - 3r \dot{\gamma}_\theta' + \dot{\gamma}_\theta + \frac{\rho\omega^2 r}{h} = 0,$$

które muszą spełniać składowe dystorsji, aby spełniony był warunek konieczny dla ekstremum funkcjonału (3.10).

Rozpatrzmy dalej szczególny przypadek, gdy na składowe pola dystorsji narzucony jest następujący warunek:

$$(3.16) \quad \dot{\gamma}_\theta' = 0.$$

Równanie (3.15) przyjmie postać

$$(3.17) \quad r^2 \dot{\gamma}_r'' + 2r \dot{\gamma}_r' - \dot{\gamma}_r + C + \frac{\rho\omega^2 r}{h} = 0,$$

gdzie $C = \dot{\gamma}_\theta = \text{const}$ jest nieznaną wartością stałych dystorsji obwodowych.

Całka ogólna tego równania ma postać

$$(3.18) \quad \dot{\gamma}_r = D_1 r^{-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + D_2 r^{-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} + C - \frac{\rho\omega^2 r}{h}.$$

Stała D_2 musi znikać, gdyż w przeciwnym razie dystorsje osiągnęłyby przy $r=0$ wartości nieskończone.

Stałe C i D_1 określimy z warunków brzegowych (3.9), które po skorzystaniu z równania (3.14)₁ przyjmują postać

$$(3.19) \quad [r\dot{\gamma}'_r]_{r=r_1} = 0, \quad [\dot{\gamma}_r]_{r=r_1} = 0.$$

Wyznaczone stałe mają wartości

$$(3.20) \quad D_1 = \frac{2\rho\omega^2}{(\sqrt{5}-1)h} r_1^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}, \quad C = \frac{(\sqrt{5}-3)\rho\omega^2}{(\sqrt{5}-1)h} r_1.$$

Ostatecznie składowe dystorsji mają postać

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \dot{\gamma}_r &= \frac{2}{\sqrt{5}-1} \frac{\rho\omega^2}{h} r_1^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \left(r^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - r_1^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \right) - \frac{\rho\omega^2}{h} (r-r_1), \\ \dot{\gamma}_\theta &= \frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}-1} \frac{\rho\omega^2}{h} r_1. \end{aligned}$$

Korzystając z (3.14) można wyznaczyć funkcję przemieszczenia:

$$(3.22) \quad u = r\dot{\gamma}'_r = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \frac{\rho\omega^2}{h} r_1^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \left(r^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - r r_1^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \right) - \frac{\rho\omega^2}{h} (r^2 + r r_1).$$

Składowe stanu napięcia są następujące:

$$(3.23) \quad \begin{aligned} p^r &= h(u' - \dot{\gamma}'_r) = \rho\omega^2 \left(r_1^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} r^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - r \right), \\ p^\theta &= h \left(\frac{u}{r} - \dot{\gamma}_\theta \right) = \rho\omega^2 \left[\frac{2}{\sqrt{5}-1} r_1^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \left(r^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - r_1^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \right) - r + \frac{2}{\sqrt{5}-1} r_1 \right]. \end{aligned}$$

Dla porównania rozpatrzmy tarczę wirującą bez wprowadzonych dystorsji. Z równania równowagi (3.8)

$$(3.24) \quad r u'' + u' - \frac{u}{r} + \frac{\rho\omega^2}{h} r = 0$$

otrzymujemy całkę ogólną

$$(3.25) \quad u = C_1 r + C_2 \frac{1}{r} + \frac{\rho\omega^2}{3h} r^2.$$

Stała C_2 musi znikać, gdyż $[u]_{r=0} = 0$. Stałą C_1 wyznaczymy z warunku (3.9)₁, skąd wynika

$$(3.26) \quad C_1 = \frac{2\rho\omega^2}{3} r_1.$$

Ostatecznie otrzymuje się

$$u = \frac{2}{3} \frac{\rho \omega^2}{h} \left(r_1 r - \frac{r^2}{2} \right),$$

$$(3.27) \quad p^r = hu' = \frac{2}{3} \rho \omega^2 (r_1 - r),$$

$$p^\theta = h \frac{u'}{r} = \frac{2}{3} \rho \omega^2 \left(r_1 - \frac{r}{2} \right).$$

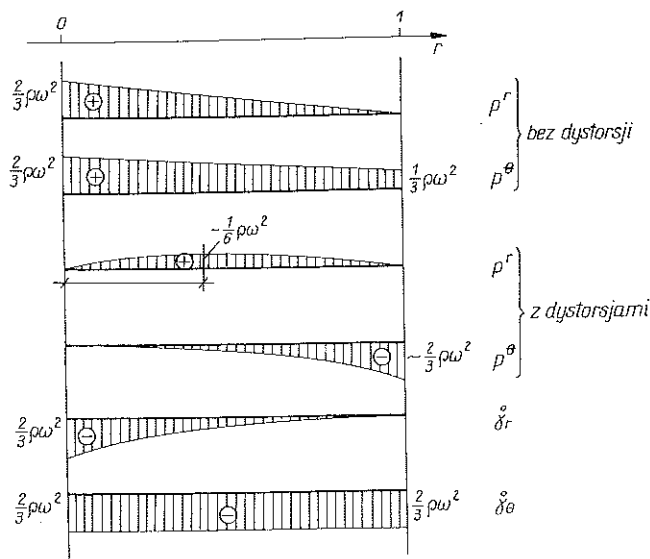
Zmienność funkcji dystorsji i napięcia tarczy w obu rozpatrywanych przypadkach naszkicowano przy założeniu $r_1 = 1$ na rys. 4.

Napięcie całkowite ustroju

$$(3.28) \quad \int_0^1 [(p^r)^2 + (p^\theta)^2] dr$$

wynosi: 1) bez wprowadzenia dystorsji około $0,85 \rho^2 \omega^4$, 2) po wprowadzeniu dystorsji około $0,65 \rho^2 \omega^4$.

Znalezione rozwiązanie spełnia warunek konieczny dla minimum funkcjonału (3.10) i daje rozwiązanie o mniejszym napięciu tarczy niż rozwiązanie bez wprowadzenia dystorsji.



Rys. 4

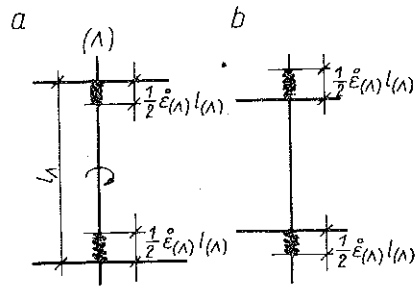
dzenia dystorsji. Wprowadzenie zatem do tarczy wirującej określonych wyżej skręceń prętów promieniowych (3.21)₁ i obwodowych (3.21)₂ jest uzasadnione.

Dogodne technologicznie możliwości wprowadzania dystorsji przez wydłużenia prętów dają wszystkie metody wykonywania ustrojów siatkowych, których montaż polega na skręcaniu typowych elementów: prętów i węzłów (np. «Mero-System»).

Zastosowanie w tych konstrukcjach gwintów przeciwnieobrotowych na końcach prętów pozwala w bardzo dogodny sposób wprowadzać do zmontowanej konstrukcji dowolne wydłużenia poszczególnych łączników przez odpowiednie ich obracanie wokół osi podłużnej.

W opisanym wyżej przykładzie wprowadzenie odpowiedniego pola dystorsji sprowadza się do takiego stopniowego, równomiernego obracania poszczególnych prętów wokół osi podłużnych, aby ich końce wysunęły się poza węzły o odcinki $\frac{1}{2} l_\theta \dot{\gamma}_\theta = \frac{1}{2} r \theta_0 \dot{\gamma}_\theta$ w przypadku prętów obwodowych oraz o odcinki $\frac{1}{2} l_r \dot{\gamma}_r = \frac{1}{2} r \theta_0 \dot{\gamma}_r$ w przypadku prętów promieniowych (rys. 5).

Otrzymany stan odkształcenia tarczy jest identyczny z takim, w którym skrócilibyśmy każdy z prętów o wyznaczoną wielkość $l_\theta \dot{\gamma}_\theta$ lub $l_r \dot{\gamma}_r$, a następnie tak je ponaciągali, aby tarcza została złożona w jedną całość, dając ciągły stan odkształcenia.



Rys. 5

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. DZIENISZEWSKI, *Optymalizacja prętowych ustrojów siatkowych*, Prace IPPT, 35/1971.
2. M. KLEIBER, *Statyka sprężystych powłok siatkowych*, Praca doktorska,
3. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, 1970.
4. W. NOWACKI, *Niesymetryczna teoria sprężystości*, PWN, IPPT PAN, 1971.
5. W. I. SMIRNOW, *Matematyka wyższa*, t. IV, PWN, Warszawa 1961.
6. Cz. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigiary powierzchniowe*, PWN, IPPT PAN, 1970.

Резюме

РЕГУЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИОННОГО СОСТОЯНИЯ В ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ

Целью работы является формулировка задачи введения в стержневые решетчатые диски вступительных деформаций (дисторсий), с которыми связано некоторое состояние вступительного напряжения.

Введение вступительных деформаций в систему может быть пригодным в задачах регулирования деформационного состояния системы подвергнутой действию некоторой внешней нагрузки.

В работе даются соотношения для плоской задачи теории упругости с учетом введенного поля дисторсий в сплошной модели решетчатых дисков. Затем сформулирована задача такого подбора поля дисторсий, чтобы напряженное состояние системы удовлетворяло некоторому условию регулирования, как например минимуму полного напряжения системы.

В заключение обсужден пример круглого-симметричной задачи.

SUMMARY

CONTROL OF THE STATE OF STRAIN IN PLANE ROD STRUCTURES

The aim of the paper is to formulate the problem of introducing initial strains (distortions) to plane rod structures, and to create a certain state of initial stresses. This may prove useful in the problems of regulation (control) of the state of strain of structures subject to external loading. The equations governing the plane elasticity problem of continuous lattice models with distortions are derived. Formulated is also the problem of a suitable selection of the distortion field leading to such final states of stress which satisfy a certain control condition — for instance, the minimum of total stressing of the system. A rotationally symmetric case is presented as an example.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 czerwca 1973 r.
