

O WARUNKACH KONIECZNYCH I DOSTATECZNYCH OPTIMALIZACJI SPRĘŻYSTYCH PŁYT SIATKOWYCH NA MINIMUM ODKSZTAŁCALNOŚCI

JACEK GIERLIŃSKI (WARSZAWA)

1. WSTĘP

Przedstawiona praca składa się z dwóch części. Celem pierwszej części pracy, obejmującej p. 2 i 3, jest rozwiązanie zagadnienia optymalizacji płyt siatkowych obciążonych poprzecznie na minimum odkształcalności. Założono przy tym, że materiał konstrukcyjny jest idealnie sprężysty. W rozważaniach pracy oparto się na teorii ustrojów siatkowych, opracowanej przez Cz. WOŹNIAKA, a przedstawionej m.in. w pracy [11] i monografii [12].

Problem optymalizacji ustrojów siatkowych na minimum energii odkształceń sprężystych przy stałej objętości rozpatrzony został w pracach W. DZIENISZEWSKIEGO [1 i 2]. Sformułowano go jako klasyczne zagadnienie wariacyjne poszukiwania minimum. Rozważono zbiór konstrukcji o różnych rozmieszczeniach materiałów i różnych konfiguracjach siatek prętowych, kształtowanych wzdłuż dwóch rodzin linii. Przedstawione w pracy [2] warunki konieczne i dostateczne optymalności wyprowadzono przy założeniu proporcjonalności intensywności sztywności prętów na odkształcenia do intensywności pól powierzchni przekrojów poprzecznych tych prętów.

Omówione w niniejszej pracy rozwiązanie zagadnienia optymalizacji jest przypadkiem szczególnym rozwiązania podanego w pracy [2]. Pomijając wymienione wyżej założenie w przedstawionych rozważaniach otrzymano wzmiankowany warunek proporcjonalności jako warunek dostateczny.

Druga część pracy, zawierająca p. 4, 5 i 6, dotyczy płyt nieodkształcalnych postaciowo. W tej części przedstawiono szczegółową analizę warunków optymalności w odniesieniu do tego szczególnego przypadku płyt. Analizy tej dokonano na przykładzie płyt skonstruowanych z prętów o prostokątnych przekrojach poprzecznych.

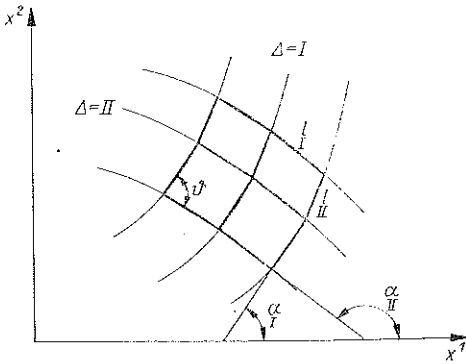
Na zakończenie rozważań przytoczono przykład obliczeń.

2. ZAŁOŻENIA I PODSTAWOWE ZWIĄZKI

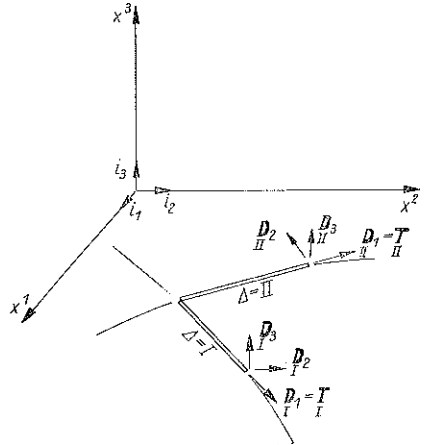
Przedmiotem rozważań pracy są płaskie prętowe ustroje siatkowe w płytowym stanie naprężenia i odkształcenia. Siatki tych ustrojów, gęste i regularne, skonstruowane są z prętów pryzmatycznych o długościach $l(x^{\alpha})$. Pręty siatek są ułożone

stycznie do dwóch jednoparametrowych rodzin linii $\Delta=I, II$, przecinających się pod kątem $\vartheta(x^\alpha)$. Osie prętów są pochylone względem osi x^1 pod kątem $\alpha(x^\alpha)$ (rys. 1).

Kierunki główne, opisujące cechy geometryczne siatki prętowej, oznaczono za pomocą trzech wektorów ortonormalnych $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3$. Kierunki osi wzdłużnych prętów $\Delta, \mathbf{D}_1 = \mathbf{T}$ oraz kierunki \mathbf{D}_2 , leżą w płaszczyźnie płyty $x^1 0' x^2$. Natomiast kierunki \mathbf{D}_3 są prostopadłe do tej płaszczyzny (rys. 2).



Rys. 1



Rys. 2

W związku z przyjętym położeniem kierunków głównych można je wyrazić za pomocą wzorów

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_1 &= \mathbf{T} = \cos \alpha \mathbf{i}_1 + \sin \alpha \mathbf{i}_2, \\
 \mathbf{D}_2 &= -\sin \alpha \mathbf{i}_1 + \cos \alpha \mathbf{i}_3, \\
 \mathbf{D}_3 &= \mathbf{i}_3.
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Własności mechaniczne płyty siatkowej opisują następujące sztywności prętów Δ :
sztywność skrętna

$$\bar{S}^{11} = G I^{11};
 \tag{2.2}$$

sztywność giętna

$$\bar{S}^{22} = E I^{22};
 \tag{2.3}$$

sztywność poprzeczna

$$\bar{R}^{33} = \frac{12 E I^{22}}{I^2 + 24(1+\nu)\kappa I^{22}/A}.
 \tag{2.4}$$

Występujące w powyższych wyrażeniach symbole oznaczają:

- I^{11} geometryczną sztywność skręcania pręta Δ ,
- I^{22} główny moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta Δ ,
- A pole przekroju poprzecznego pręta Δ ,
- E moduł Younga,
- G moduł odkształcenia postaciowego,
- ν współczynnik Poissona oraz
- κ współczynnik liczbowy charakteryzujący kształt przekroju poprzecznego (por. np. [5]).

Dzieląc sztywności \bar{S}^{11} , \bar{S}^{22} i \bar{R}^{33} przez długości odpowiednich prętów siatki I ($\Sigma = I, II, \Sigma \neq \Delta$) określono gęstości poszczególnych rodzajów sztywności pręta Δ za pomocą symboli S^{11} , S^{22} i R^{33} . Podobnie określono gęstości rozmieszczenia materiałów $\mathcal{A} = A/l$ w ustroju.

Płytowe stany napięć określają następujące wektory gęstości sił wewnętrznych:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} P^3 &= P^3 D^3_3, \\ M^A &= M^A D^A_\alpha, \quad A = 1, 2, \quad \alpha = 1, 2 \end{aligned}$$

zaczepione w przekrojach środkowych prętów Δ .

Stany odkształcenia ustroju określają: wektor odkształceń postaciowych e_3 pręta Δ oraz wektor odkształceń skrętnych i giętnych φ_A węzłów siatki.

Składowe stanu napięcia i odkształcenia są związane przez związki fizyczne (por. np. [1])

$$(2.6) \quad \begin{aligned} P^3 &= R^{33} e_3, \\ M^A &= S^{AB} \varphi_B \quad \text{przy } S^{AB} = 0 \text{ dla } A \neq B. \end{aligned}$$

Składowe stanu odkształcenia możemy wyrazić przez przesunięcia $w = w_3(x^\alpha)$ i obroty $u_\beta(x^\alpha)$ węzłów siatek prętowych w następujący sposób (por. np. [1]):

$$(2.7) \quad e_3 = T^\alpha(w_{,\alpha} + \varepsilon_{\alpha,\beta} u_\beta), \quad \varphi_A = D^A_\alpha T^\beta u_{\alpha,\beta}.$$

Po wprowadzeniu wyrażeń na składowe $\gamma_{\alpha 3} = \gamma_\alpha$ i $\kappa_{\alpha\beta} = \kappa_{\beta,\alpha}$ tensorów odkształcenia płaskich ośrodków

$$(2.8) \quad \gamma_\alpha = w_{,\alpha} + \varepsilon_{\alpha,\beta} u_\beta, \quad \kappa_{\alpha\beta} = u_{\beta,\alpha}$$

do związków geometrycznych (2.7) otrzymujemy

$$(2.9) \quad e_3 = T^\alpha \gamma_\alpha, \quad \varphi_A = D^A_\alpha T^\beta \kappa_{\beta\alpha}.$$

Wynikają stąd też następujące wzory:

$$(2.10) \quad e_3 = T^{\alpha}_{\Delta} \gamma_{\alpha}, \quad \varphi_{\alpha} = T^{\beta}_{\Delta} \kappa_{\beta\alpha}.$$

Równania równowagi płaskiego ustroju siatkowego, wyprowadzone w pracy [11], mają postać

$$(2.11) \quad p^{\alpha}_{,\alpha} + f = 0, \quad m^{\alpha\beta}_{,\alpha} + \varepsilon^{\beta}_{\alpha} p^{\alpha} + h^{\beta} = 0$$

w obszarze Ω płyty. Warunki brzegowe są następujące:

$$(2.12) \quad p^{\alpha} n_{\alpha} = \tilde{p}, \quad m^{\beta\alpha} n_{\alpha} = \tilde{m}^{\beta}$$

na brzegu Γ o normalnej zewnętrznej n_{α} .

Występujące w równaniach (2.11) wielkości $p^{\alpha\beta} = p^{\alpha}$ i $m^{\alpha\beta}$ są odpowiednio składowymi tensora naprężeń i składowymi tensora naprężeń momentowych w płycie siatkowej. Są one określone przez gęstości sił wewnętrznych pręta:

$$(2.13) \quad p^{\alpha} = \sum_{\Delta} T^{\alpha}_{\Delta} P^{\beta}, \quad m^{\alpha\beta} = \sum_{\Delta} T^{\alpha}_{\Delta} D^{\beta}_{\Delta} M^{\Delta}.$$

Wielkości $f^3 = f$ i h^{β} są obciążeniem siłowym, normalnym do płaszczyzny płyty, oraz obciążeniem momentowym o wektorach leżących w płaszczyźnie Ω płyty równoległych do osi x^{β} .

Uwzględniając wzory (2.9) i (2.13) można związki fizyczne (2.6) zapisać następująco:

$$(2.14) \quad p^{\alpha} = A^{\alpha\beta} \gamma_{\beta} = \sum_{\Delta} T^{\alpha}_{\Delta} T^{\beta}_{\Delta} R^{33} \gamma_{\beta},$$

$$m^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\nu\mu} \kappa_{\nu\mu} = \sum_{\Delta} T^{\alpha}_{\Delta} T^{\nu}_{\Delta} D^{\beta}_{\Delta} D^{\mu}_{\Delta} S^{AB} \kappa_{\nu\mu}.$$

Wymienione w jednej z alternatywnych postaci związki fizyczne, geometryczne oraz równania równowagi, wyprowadzone m.in. w pracach [1, 2, 11 i 12], opisują płytowy stan deformacji płaskich ustrojów siatkowych.

3. RÓWNANIA I WARUNKI MAKSYMALNEJ SZTYWNOŚCI

W punkcie tym wyprowadzono równania i warunki, jakie musi spełniać płyta optymalna spośród płyt tak samo podpartych i obciążonych. Przez płytę optymalną rozumiemy tutaj taką płytę siatkową, która w klasie płyt wykonanych z tych samych materiałów o stałych własnościach w obrębie poszczególnych rodzin prętów odznacza się maksymalną sztywnością odkształceniową przy niezmienionej objętości materiałów. Ma to miejsce w przypadku, gdy energia odkształceń sprężystych, którą po uwzględnieniu wzorów (2.9), (2.13) i (2.14) zapiszemy w postaci

$$(3.1) \quad U = \frac{1}{2} \sum_{\Delta} \int_{\Omega} (P^{\beta} e_{\beta} + M^{\Delta} \varphi_{\Delta}) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (A^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} + C^{\alpha\beta\nu\mu} \kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\nu\mu}) d\Omega,$$

osiąga minimum.

Płyty siatkowe, wśród których poszukiwać będziemy płyty optymalnej, różnić się mogą własnościami struktury prętowej. Wpływ struktury siatek prętowych na energię odkształceń sprężystych określono przez różnicę energii

$$\Delta U = \overset{\circ}{U} - U,$$

nagromadzonych w ustroju dowolnym spośród optymalizowanych i w ustroju optymalnym [1]. Kółeczkiem oznaczono wielkości odnoszące się do ustroju dowolnego, a symbol przyrostu oznacza różnicę odpowiednich wielkości tych ustrojów.

Przeprowadzając obliczenia analogiczne do przedstawionych w pracy [1] różnicę ΔU możemy określić następująco:

$$(3.2) \quad \Delta U = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta A^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} + \Delta C^{\alpha\beta\nu\mu} \kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\nu\mu}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (Q)^2 d\Omega.$$

gdzie

$$(3.3) \quad (Q)^2 = -\Delta A^{\alpha\beta} \Delta \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} - \Delta C^{\alpha\beta\nu\mu} \Delta \kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\nu\mu} > 0.$$

Z równości (3.2) i (3.3) wnioskujemy, że jeżeli $\Delta A^{\alpha\beta} = 0$ i $\Delta C^{\alpha\beta\nu\mu} = 0$, to $\Delta U = 0$.

Różnice $\Delta A^{\alpha\beta}$ i $\Delta C^{\alpha\beta\nu\mu}$ spowodowane są różnym rozmieszczeniem materiałów $\overset{\circ}{A} \neq A$ oraz odmiennymi kierunkami $\overset{\circ}{D}_A \neq D_A$ w ustrojach optymalnych i dowolnym. Różnice te na podstawie związków (2.14) możemy przedstawić w postaci

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \Delta A^{\alpha\beta} &= \sum_{\Delta} [\Delta R^{33} T^{\alpha} T^{\beta} + \Delta R^{33} \Delta (T^{\alpha} T^{\beta}) + R^{33} \Delta (T^{\alpha} T^{\beta})], \\ \Delta C^{\alpha\beta\nu\mu} &= \sum_{\Delta} [\Delta S^{AB} T^{\alpha} D_A^{\beta} T^{\nu} D_B^{\mu} + \Delta S^{AB} \Delta (T^{\alpha} D_A^{\beta} T^{\nu} D_B^{\mu}) + S^{AB} \Delta (T^{\alpha} D_A^{\beta} T^{\nu} D_B^{\mu})]. \end{aligned}$$

W dalszych rozważaniach rozpatrywać będziemy ustroje, które skonstruowane są z prętów o określonych jednakowych kształtach przekrojów poprzecznych. Zbiór parametrów określających kształt przekroju poprzecznego i długość segmentu Δ oznaczmy przez $\{\overset{\circ}{a}^{(1)}, \overset{\circ}{a}^{(2)}, \dots, \overset{\circ}{a}^{(n)}\}$. Przyjmiemy, że różnica $\Delta \mathcal{A} = \overset{\circ}{\mathcal{A}} - \mathcal{A}$ wynika z nierówności $\overset{\circ}{a}^{(k)} \neq a^{(k)}$, $(k) \in \{(1), (2), \dots, (n)\}$. Powyższe założenie możemy przedstawić w postaci Δ

$$[\overset{\circ}{\mathcal{A}}]_{\Delta a=0} = \mathcal{A},$$

skąd również mamy

$$[\overset{\circ}{R}^{33}]_{\Delta \mathcal{A}=0} = R^{33}, \quad [\overset{\circ}{S}^{AB}]_{\Delta \mathcal{A}=0} = S^{AB}.$$

Rozwijając $\overset{\circ}{R}^{33}$ i $\overset{\circ}{S}^{AB}$ w szeregi Taylora względem zmiennej $\Delta \mathcal{A}$, po uwzględnieniu powyższych równości i wprowadzając oznaczenie

$$(3.5) \quad \frac{d^N}{d(\mathcal{A})^N} (\) = (\)^N,$$

znajdujemy

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \Delta R^{33} &= \Delta \mathcal{A} (R^{33})' + \frac{1}{2} (\Delta \mathcal{A})^2 (R^{33})'' + \dots, \\ \Delta S^{AB} &= \Delta \mathcal{A} (S^{AB})' + \frac{1}{2} (\Delta \mathcal{A})^2 (S^{AB})'' + \dots \end{aligned}$$

Występujące we wzorach (3.3) różnice $\Delta (T^\alpha T^\beta)$, $\Delta (T^\alpha D_A^\beta T^\nu D_B^\mu)$, wynikające z odmiennych kierunków $\mathring{\mathbf{D}}_A \neq \mathbf{D}_B$, wyrazimy jako funkcje kątów λ , zawartych pomiędzy kierunkami $\mathring{\mathbf{D}}_A$ i \mathbf{D}_A . Rozwijając iloczyny $\mathring{T}^\alpha \mathring{T}^\beta$ i $\mathring{T}^\alpha \mathring{D}_A^\beta \mathring{T}^\nu \mathring{D}_B^\mu$ w szeregi Taylora względem zmiennych λ , po uwzględnieniu pierwszych dwóch wyrazów, otrzymujemy

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \Delta (T^\alpha T^\beta) &= \lambda [d(\mathring{T}^\alpha \mathring{T}^\beta)]_{\lambda=0} + \frac{1}{2} (\lambda)^2 [d^2(\mathring{T}^\alpha \mathring{T}^\beta)]_{\lambda=0} + \dots, \\ \Delta (T^\alpha D_A^\beta T^\nu D_B^\mu) &= \lambda [d(\mathring{T}^\alpha \mathring{D}_A^\beta \mathring{T}^\nu \mathring{D}_B^\mu)]_{\lambda=0} + \frac{1}{2} (\lambda)^2 [d^2(\mathring{T}^\alpha \mathring{D}_A^\beta \mathring{T}^\nu \mathring{D}_B^\mu)]_{\lambda=0} + \dots \end{aligned}$$

We wzorach tych wprowadzono oznaczenia

$$[d^n(\)]_{\lambda=0} = \left[\frac{d^n(\)}{d(\lambda)^n} \right]_{\lambda=0}.$$

Różnicę ΔU możemy przedstawić teraz w postaci sumy

$$\Delta U = \delta U + \delta^2 U,$$

w której wariacje δU i $\delta^2 U$, po uwzględnieniu (3.2), (3.4), (3.6) i (3.7), wyrażają się wzorami

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \delta U &= -\frac{1}{2} \Sigma \int_{\Omega} \Delta \mathcal{A} [(R^{33})' (e_3)^2 + (S^{AB})' \varphi_A \varphi_B] d\Omega - \\ &\quad - \frac{1}{2} \Sigma \int_{\Omega} \lambda \{ [d(\mathring{T}^\alpha \mathring{T}^\beta)]_{\lambda=0} R^{33} \gamma_\alpha \gamma_\beta + [d(\mathring{T}^\alpha \mathring{D}_A^\beta \mathring{T}^\nu \mathring{D}_B^\mu)]_{\lambda=0} S^{AB} \kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\nu\mu} \} d\Omega, \\ \delta^2 U &= -\frac{1}{4} \Sigma \int_{\Omega} (\Delta \mathcal{A})^2 [(R^{33})'' (e_3)^2 + (S^{AB})'' \varphi_A \varphi_B] d\Omega - \\ &\quad - \frac{1}{4} \Sigma \int_{\Omega} (\lambda)^2 \{ R^{33} [d^2(\mathring{T}^\alpha \mathring{T}^\beta)]_{\lambda=0} \gamma_\alpha \gamma_\beta + S^{AB} [d^2(\mathring{T}^\alpha \mathring{D}_A^\beta \times \\ &\quad \times \mathring{T}^\nu \mathring{D}_B^\mu)]_{\lambda=0} \kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\nu\mu} \} d\Omega - \frac{1}{2} \Sigma \int_{\Omega} \Delta \mathcal{A} \lambda \{ (R^{33})' [d(\mathring{T}^\alpha \mathring{T}^\beta)]_{\lambda=0} \times \\ &\quad \times \gamma_\alpha \gamma_\beta + (S^{AB})' [d(\mathring{T}^\alpha \mathring{D}_A^\beta \mathring{T}^\nu \mathring{D}_B^\mu)]_{\lambda=0} \kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\nu\mu} \} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (Q)^2 d\Omega. \end{aligned}$$

Uwzględniając zależności pomiędzy $\overset{\circ}{\mathbf{D}}_A$ i \mathbf{D}_A wyrażone za pomocą funkcji kąta λ [1] oraz dokonując przekształceń rachunkowych, wariacje δU i $\delta^2 U$ przedstawimy w postaci wygodniejszej dla dalszych rozważań:

$$(3.9) \quad \delta U = -\frac{1}{2} \sum_A \int_{\Omega} \Delta \mathcal{A} [(R^{33})' (e_3)^2 + (S^{AB})' \varphi_A \varphi_B] d\Omega - \\ - \sum_A \int_{\Omega} \lambda [-P^3 D_A^\alpha \gamma_\alpha + M^A (\varphi_B \varepsilon_{,A}^B - D_A^\beta D_{2A}^\alpha \kappa_{\alpha\beta})] d\Omega,$$

$$(3.10) \quad \delta^2 U = -\frac{1}{4} \sum_A \int_{\Omega} (\Delta \mathcal{A})^2 [(R^{33})'' (e_3)^2 + (S^{AB})'' \varphi_A \varphi_B] d\Omega - \\ - \frac{1}{2} \sum_A \int_{\Omega} (\lambda)^2 [R^{33} (\gamma_{23})^2 + \sum_{A=1}^2 S^{AA} (\varphi_B \varepsilon_{,A}^B - \kappa_{2A})^2] d\Omega + \\ + \frac{1}{2} \sum_A \int_{\Omega} (\lambda)^2 [P^3 e_3 + 2M^A (\varphi_A + \kappa_{2B} \varepsilon_{,A}^B)] d\Omega - \\ - \sum_A \int_{\Omega} \Delta \mathcal{A} \lambda [(R^{33})' e_3 \gamma_{23} + (S^{AB})' \varphi_B (\varphi_C \varepsilon_{,A}^C + \kappa_{2A})] d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (Q)^2 d\Omega.$$

W powyższych związkach wprowadzono oznaczenie:

$$(3.11) \quad \kappa_{AB} = D_A^\alpha D_B^\beta \kappa_{\alpha\beta}, \quad \gamma_{23} = D_2^\alpha \gamma_\alpha.$$

Energia U odkształceń sprężystych osiąga wartość minimalną, jeżeli, zgodnie z podstawowym lematem rachunku wariacyjnego [3], wariacje δU i $\delta^2 U$ określone wzorami (3.10) i (3.11), spełniają następujące warunki:

$$(3.12) \quad \delta U = 0, \quad \delta^2 U > 0$$

przy dowolnych wartościach funkcji $\Delta \mathcal{A}$ i kątów λ . Pierwszy z tych warunków jest warunkiem koniecznym, a drugi dostatecznym.

Warunki (3.12) powinny być spełnione przy założeniu, że objętość poszczególnych rodzin prętów płyty siatkowej

$$v = \int_{\Omega} \mathcal{A} d\Omega$$

jest stała. Z założenia tego wynika, że

$$\Delta v = \overset{\circ}{v} - v = \int_{\Omega} \Delta \mathcal{A} d\Omega = 0.$$

Ponieważ warunki (3.12) muszą być spełnione przy dowolnych wartościach parametrów optymalizacji $\Delta \mathcal{A}$ i λ , przeto uwzględniając powyższą równość na podsta-

wie wzorów (3.10) i (3.11) wnioskujemy, że warunek (3.12)₁ jest spełniony, jeżeli zachodzą następujące równości:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} (R^{33})'_{\Delta} (e_3)_{\Delta}^2 + \sum_{A=1}^2 (S^{AA})'_{\Delta} (\varphi_A)_{\Delta}^2 = C = \text{const}, \\ M^A \varphi_B \varepsilon_{\cdot A}^B - D_2^{\alpha} (P^3 \gamma_{\alpha} + M^{\beta} \kappa_{\alpha\beta}) = 0. \end{aligned}$$

Natomiast warunek dostateczny (3.12)₂ jest spełniony, jeżeli prawdziwa jest nierówność

$$(3.14) \quad \begin{aligned} -\frac{1}{4} \sum_{\Delta} \int_{\Omega} (\Delta \mathcal{A})^2 [(R^{33})''_{\Delta} (e_3)_{\Delta}^2 + (S^{11})''_{\Delta} (\varphi_1)_{\Delta}^2 + (S^{22})''_{\Delta} (\varphi_2)_{\Delta}^2] d\Omega - \\ - \frac{1}{2} \sum_{\Delta} \int_{\Omega} (\lambda)_{\Delta}^2 [R^{33}(\gamma_{23})_{\Delta}^2 + \sum_{A=1}^2 S^{AA} (\varphi_B \varepsilon_{\cdot A}^B - \kappa_{2A})_{\Delta}^2 - P^3 (e_3)_{\Delta}^2 - \\ - 2M^A (\varphi_A + \kappa_{2B} \varepsilon_{\cdot A}^B)_{\Delta}] d\Omega - \sum_{\Delta} \int_{\Omega} \Delta \mathcal{A} \lambda [(R^{33})'_{\Delta} e_3 \gamma_{23} + \\ + (S^{AB})'_{\Delta} \varphi_B (\varphi_C \varepsilon_{\cdot A}^C + \kappa_{2A})_{\Delta}] d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (Q)^2 d\Omega > 0. \end{aligned}$$

Równanie (3.13)₂ można, po uwzględnieniu równości

$$(3.15) \quad D_2^{\alpha} = \varepsilon_{\beta}^{\alpha} T^{\beta},$$

wynikającej z definicji (2.1), przekształcić do postaci

$$M^A \varepsilon_{\cdot A}^B \varphi_B + T^{\nu} \varepsilon_{\nu}^{\alpha} (P^3 \gamma_{\alpha} + M^{\beta} \kappa_{\alpha\beta}) = 0.$$

Mnożąc następnie powyższą równość przez $\varepsilon_{\rho\delta} T^{\rho} T^{\delta}$ znajdujemy, po wykonaniu odpowiednich przekształceń przy wykorzystaniu wzorów (2.1), (2.5) i (2.9), inną postać warunków koniecznych:

$$(3.16) \quad \begin{aligned} P^3 (\cos \mathcal{D} e_3 - e_3)_{\text{I}} + M^I [\sin \mathcal{D} (\varphi_2 - \varphi_2)_{\text{II}} - \cos \mathcal{D} (\varphi_1 - \varphi_1)_{\text{I}}] - \\ - M^2 [\sin \mathcal{D} (\varphi_1 - \varphi_1)_{\text{II}} + \cos \mathcal{D} (\varphi_2 - \varphi_2)_{\text{I}}] = 0, \\ P^3 (\cos \mathcal{D} e_3 - e_3)_{\text{II}} + M^I [\sin \mathcal{D} (\varphi_2 - \varphi_2)_{\text{II}} + \cos \mathcal{D} (\varphi_1 - \varphi_1)_{\text{I}}] + \\ + M^2 [-\sin \mathcal{D} (\varphi_1 - \varphi_1)_{\text{II}} + \cos \mathcal{D} (\varphi_2 - \varphi_2)_{\text{I}}] = 0. \end{aligned}$$

Równania (3.13)₁, (3.10) i (3.14) są ogólnym rozwiązaniem problemu optymalizacji na minimum odkształcalności płyt siatkowych.

4. WARUNKI OPTIMALNOŚCI W PRZYPADKU SZCZEGÓLNYM PŁYT NIEODKSZTAŁCALNYCH POSTACIOWO

W dalszych rozważaniach niniejszej pracy pominiemy wpływ sił poprzecznych na odkształcenia prętów płyty. Uwzględnienie tego wpływu stanowi obszerne zagadnienie i będzie przedmiotem dalszych prac autora.

Przyjmując więzy kinematyczne $e_3=0$, eliminujemy z wyprowadzonych w p. 3 warunków optymalności wyrazy zawierające siły poprzeczne. Założenie to, stanowiące hipotezę Love'a-Kirchhoffa, spełnione jest przez przyjęcie $R^{33} \rightarrow \infty$ [1 i 11].

Z warunku $e_3=0$, na podstawie związków (2.8)₁ i (2.9)₁ znajdziemy

$$(4.1) \quad \gamma_\alpha = w_{,\alpha} + \varepsilon_{\alpha\beta}^\beta u_\beta = 0,$$

a stąd

$$(4.2) \quad u_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}^\beta w_{,\beta}.$$

Podstawiając (4.2) do (2.8)₂ znajdujemy

$$(4.3) \quad \kappa_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\gamma}^\gamma w_{,\alpha\gamma},$$

skąd również wynikają związki

$$(4.4) \quad \varepsilon_{\alpha\gamma}^\gamma \kappa_{\beta\gamma} = \varepsilon_{\beta\gamma}^\gamma \kappa_{\alpha\gamma}.$$

Wprowadzając równość (4.3) do związków fizycznych (2.13)₂ i dalej do równań równowagi (2.11)₂ otrzymujemy równanie analogiczne do równania płyty anizotropowej (por. np. [7]). Mnożąc obie strony równości (4.4) przez $T^\alpha T^\beta$ mamy

$$\left(T^\alpha \varepsilon_{\alpha\gamma}^\gamma \right) T^\beta \kappa_{\beta\gamma} = \left(T^\beta \varepsilon_{\beta\gamma}^\gamma \right) T^\alpha \kappa_{\alpha\gamma},$$

a po uwzględnieniu (3.25) znajdziemy

$$(4.5) \quad D_2^\gamma T^\beta \kappa_{\beta\gamma} = D_2^\gamma T^\alpha \kappa_{\alpha\gamma}.$$

Uwzględniając wzory (2.10), z (4.5) otrzymujemy zależność

$$(4.6) \quad \mathbf{D}_2 \varphi_A \mathbf{D}^A = \mathbf{D}_2 \varphi_A \mathbf{D}^A.$$

Ze wzorów (2.1) wynikają następujące zależności

$$\mathbf{D}_2 \mathbf{D}_2 = \cos \vartheta, \quad \mathbf{D}_2 \mathbf{T} = -\mathbf{T} \mathbf{D}_2 = \sin \vartheta,$$

po wykorzystaniu których (i po przekształceniach) z (4.6), znajdujemy

$$(4.7) \quad \cos \vartheta (\varphi_2 - \varphi_2) = \sin \vartheta (\varphi_I + \varphi_I).$$

Warunki optymalności (3.22)₁, (3.23) i (3.25) po uwzględnieniu $e_3=0$ oraz związków (4.7) przyjmują uproszczoną postać. Warunki konieczne (3.22)₁ i (3.25) można zapisać w postaci następującej:

$$(4.8) \quad (S^{11})' (\varphi_1)^2 + (S^{22})' (\varphi_2)^2 = C = \text{const}$$

oraz

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \varphi_I \{G I^{II} [\sin \vartheta (\varphi_2 - \varphi_2) - \cos \vartheta (\varphi_I - \varphi_I)] + 2E I^{22} \varphi_2 \sin \vartheta\} &= 0, \\ \varphi_I \{G I^{II} [\sin \vartheta (\varphi_2 - \varphi_2) + \cos \vartheta (\varphi_I - \varphi_I)] - 2E I^{22} \varphi_2 \sin \vartheta\} &= 0. \end{aligned}$$

Warunek dostateczny ma postać nierówności:

$$(4.10) \quad -\frac{1}{4} \sum_A \int_{\Omega} (\Delta \mathcal{L})^2 [(S^{11})'' (\varphi_I)^2 + (S^{22})'' (\varphi_2)^2] d\Omega - \\ - \frac{1}{2} \sum_A \int_{\Omega} (\lambda)^2 \left[\sum_{A=I}^2 S^{AA} (\varphi_B \varepsilon_{A,B}^B - \kappa_{2A})^2 - 2M^A (\varphi_A + \varepsilon_{A,B}^B \kappa_{2B}) \right] d\Omega - \\ - \sum_A \int_{\Omega} \Delta \mathcal{L} \lambda (S^{AB})' \varphi_B (\varphi_C \varepsilon_{A,C}^C + \kappa_{2A}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (Q^2) d\Omega > 0.$$

Prosta postać warunków koniecznych (4.9) pozwala wnioskować natychmiast o możliwości ich rozwiązania. Warunek (4.9)₁ jest spełniony, gdy

$$(4.11) \quad \varphi_I = 0$$

lub

$$(4.12) \quad G I^{II} [\sin \vartheta (\varphi_2 - \varphi_2) - \cos \vartheta (\varphi_I - \varphi_I)] + 2E I^{22} \varphi_2 \sin \vartheta = 0,$$

a warunek (4.9)₂ jest spełniony, gdy

$$(4.13) \quad \varphi_{II} = 0$$

lub

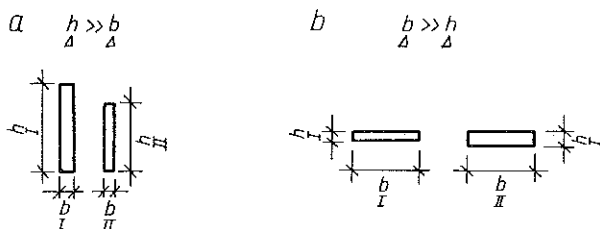
$$(4.14) \quad G I^{II} [\sin \vartheta (\varphi_2 - \varphi_2) - \cos \vartheta (\varphi_I - \varphi_I)] - 2E I^{22} \varphi_2 \sin \vartheta = 0.$$

Ponieważ warunki (4.9)₁ i (4.9)₂ muszą być spełnione równocześnie, przeto możliwe są następujące kombinacje powyższych równości: (4.11) i (4.13) lub (4.11) i (4.14), lub (4.12) i (4.14). Z zestawionych tutaj par równości należy wybrać tę, której rozwiązanie spełnia warunek dostateczny.

5. ANALIZA WARUNKÓW OPTIMALNOŚCI W PRZYPADKU PŁYT NIEODKSZTAŁCALNYCH POSTACIOWO

Rozpatrzmy z kolei warunki optymalności dotyczące przypadku szczególnego płyt nieodkształcalnych postaciowo, wyprowadzone w poprzednim punkcie. Analizy tych warunków dokonamy na przykładzie płyt siatkowych, których pręty mają prostokątny przekrój poprzeczny. Uwzględnimy przy tym kolejno następujące proporcje między wymiarami tego przekroju (rys. 3):

Jak już wspomniano parametrami optymalizacji są kąty α i funkcje gęstości rozmieszczenia materiałów \mathcal{A} . Przy czym $\Delta \mathcal{A}$ jest funkcją jednej zmiennej (tzn. b, h lub l). W pierwszej kolejności przyjmiemy jako parametr optymalizacji szerokość przekroju b .



Rys. 3

5.1. Przypadek $h \gg b$

Gdy wysokość przekroju jest znacznie większa od szerokości, wyrażenia na charakterystyki mechaniczne pręta przedstawimy w postaci [5]

$$(5.1) \quad S^{11} = \frac{1}{3} G (b)^3 h \frac{1}{l}, \quad S^{22} = \frac{1}{12} E b (h)^3 \frac{1}{l}.$$

W poprzednim punkcie podano trzy przypadki, w których można określić warunki konieczne. Należy sprawdzić, które z nich spełniają warunki dostateczne (4.10). Wstawiając do warunku (4.1) pochodne funkcji określające sztywności obliczone według wzoru (3.5)

$$\begin{aligned} (S^{11})' &= G (b)^2, & (S^{22})' &= \frac{1}{12} E (h)^2, \\ (S^{11})'' &> 0, & (S^{22})'' &= 0, \end{aligned}$$

warunek ten możemy zapisać w postaci następujących nierówności:

$$\begin{aligned} &-(S^{11})'' (\varphi_1)^2 \geq 0, \\ (5.2)_1 \quad &(\varphi_1 - \kappa_{22}) \left[\frac{1}{3} G (b)^2 \varphi_1 - \frac{1}{24} E (h)^2 (\varphi_1 - \kappa_{22}) \right] + \\ &+ (\varphi_2 + \kappa_{21}) \left[\frac{1}{12} E (h)^2 \varphi_2 - \frac{1}{6} G (b)^2 (\varphi_2 + \kappa_{21}) \right] \geq 0, \\ &-G (b)^2 \varphi_1 (\varphi_2 + \kappa_{21}) + \frac{1}{12} E (h)^2 \varphi_2 (-\varphi_1 + \kappa_{22}) \geq 0. \end{aligned}$$

Pierwsza z tych nierówności może być spełniona jedynie wtedy, gdy $\varphi_1 = 0$. Wniosek ten pokrywa się z równościami (4.11) i (4.13). Uwzględniając tę równość w warunku koniecznym (4.8), otrzymamy

$$(5.3) \quad \frac{1}{12} E_{\Delta} (h_{\Delta})^2 (\varphi_2_{\Delta})^2 = C = \text{const.}$$

Oznaczając przez

$$(\hat{\varepsilon}_{\Delta})^2 = \frac{1}{2} h_{\Delta} \left(\frac{M_{\Delta}^2}{E_{\Delta} I_{\Delta}^2} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} h_{\Delta} \varphi_2_{\Delta} \right)^2$$

kwadrat liniowych jednostkowych odkształceń dolnych włókien segmentu pręta Δ , równoległych do osi wzdłużnych T_{Δ} i oddalonych od nich o $\frac{1}{2} h_{\Delta}$ [10], znajdujemy

$$C = \frac{1}{3} E_{\Delta} (\hat{\varepsilon}_{\Delta})^2 = \text{const.}$$

Wnioskujemy stąd, że odkształcenia $\hat{\varepsilon}_{\Delta}$ są stałe, a ponieważ mają wartości maksymalne w przecie Δ , przeto zachodzi równość

$$\hat{\varepsilon}_{\Delta} = \varepsilon \text{ sign } \hat{\varepsilon}_{\Delta},$$

gdzie ε oznacza jednostkowe wydłużenia dopuszczalne materiału pręta Δ , $\hat{\varepsilon}_{\Delta} > 0$, gdy dolne włókna są rozciągane, $\hat{\varepsilon}_{\Delta} < 0$, gdy dolne włókna są ściskane.

Uwzględniając dalej (4.11) i (4.13) w równości (4.7), otrzymamy

$$(5.4) \quad \varphi_{2I} = \varphi_{2II}$$

lub

$$(5.5) \quad \cos \vartheta = 0.$$

Grupując odpowiednio równania (4.11), (4.13), (5.3), (5.4) i (5.5) doprowadzimy je do dwóch następujących układów równań

$$(5.6) \quad \varphi_{1I} = 0, \quad \varphi_{2I} = \varphi_{2II}, \quad \varphi_{2I} = 2 \frac{\hat{\varepsilon}_{\Delta}}{h_{\Delta}}$$

oraz

$$(5.7) \quad \varphi_{1I} = 0, \quad \cos \vartheta = 0, \quad \varphi_{2I} = 2 \frac{\hat{\varepsilon}_{\Delta}}{h_{\Delta}},$$

w których niewiadomymi są: funkcja ugięcia $w(x^{\alpha})$ i kąty α, α .

I II

Układy równań (5.6) i (5.7) przekształcimy wykorzystując wzory (2.1), (2.9)₂ i (4.3). Pierwszy z tych układów możemy po uwzględnieniu $\alpha = \alpha + \vartheta$, $\vartheta \neq 0$, $\vartheta \neq \pi/2$ przedstawić w postaci

$$(5.8) \quad -w_{,11} = -w_{,22} = 2 \frac{\hat{\varepsilon}}{h}, \quad w_{,12} = 0;$$

α i α są dowolne.
I II

Natomiast układ równań (5.7) zapiszemy następująco:

$$(5.9) \quad \begin{aligned} w_{,11} w_{,22} - (w_{,12})^2 &= 4 \frac{\hat{\varepsilon}_I \hat{\varepsilon}_{II}}{h_I h_{II}}, \\ -w_{,11} - w_{,22} &= 2 \frac{\hat{\varepsilon}_I}{h_I} + 2 \frac{\hat{\varepsilon}_{II}}{h_{II}}, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2w_{,12}}{w_{,11} - w_{,22}}, \quad \alpha = \alpha + \pi/2. \end{aligned}$$

Sprawdzimy teraz, czy funkcja ugięcia $w(x^a)$ określona wzorami (5.8) i (5.9) spełnia warunek dostateczny (4.10). Uwzględniając wzory (5.8)₂ we wzorach (2.8) i (3.11) znajdujemy

$$\varphi_2 + \kappa_{21} = 0, \quad \kappa_{22} = 0.$$

Po wykorzystaniu tych wzorów oraz (4.11) i (4.13) na podstawie (5.2) stwierdzamy, że nierówności te są spełnione, a zatem i warunek dostateczny (4.10) jest spełniony.

W przypadku ogólnym rozwiązania równań (5.9) nie możemy stwierdzić, czy spełniają one warunek dostateczny. Rozpatrzmy dla przykładu dwa przypadki szczególne równań (5.9):

a) gdy $h = \beta h = H$, i $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon} = \varepsilon$, gdzie $\beta = \text{const}$,

b) gdy $h = h = H$ i $\hat{\varepsilon} = -\hat{\varepsilon} = \varepsilon$.

W przypadku a) równania (5.9)_{1,2} sprowadzają się do równania

$$(5.10) \quad \beta(w_{,22} - w_{,11})^2 - (1 - \beta)^2 w_{,11} w_{,22} + (1 + \beta)^2 (w_{,12})^2 = 0.$$

Przyjmując w tym równaniu $\beta = 1$ znajdujemy

$$w_{,11} = w_{,22}, \quad w_{,12} = 0.$$

Jak sprawdzaliśmy poprzednio, funkcja ugięcia określona powyższymi wzorami spełnia warunek dostateczny (4.10). Otrzymaliśmy zatem rozszerzenie rozwiązania równań (5.8) na przypadek siatek ortogonalnych.

W przypadku b) równania (5.9)_{1,2} przyjmują postać

$$(5.11) \quad -w_{,11} w_{,22} + (w_{,12})^2 = 4 \frac{\varepsilon^2}{H^2}, \quad w_{,11} + w_{,22} = 0,$$

co wskazuje, że powierzchnia ugięcia jest powierzchnią minimalną o zerowej krzywiznie średniej [8]. Podstawiając równość (5.11)₂ do (2.9)₂ i (3.11) znajdujemy

$$\varphi_2 = \kappa_{21}, \quad \kappa_{22} = 0.$$

Na podstawie tych równań oraz (4.11) i (4.13) stwierdzamy, że nierówność (5.9)₂ ma postać

$$\frac{1}{2} (1+\nu) \frac{(h)^2}{\Delta \Delta} \geq \frac{(b)^2}{\Delta},$$

a nierówność (5.9)₃ jest spełniona. Przyjęte proporcje pomiędzy wymiarami h i b zapewniają prawdziwość powyższej nierówności.

5.2. Przypadek $b \geq h$

Szywności pręta określone są w tym przypadku wzorami

$$(5.12) \quad S^{11} = \frac{1}{3} b \frac{(h)^3}{\Delta \Delta} \frac{1}{l} G, \quad S^{22} = \frac{1}{12} b \frac{(h)^3}{\Delta \Delta} \frac{1}{l} E.$$

Po obliczeniu pochodnych tych wzorów $(S^{11})' = \frac{1}{3} G \frac{(h)^2}{\Delta \Delta}$, $(S^{22})' = \frac{1}{12} E \frac{(h)^2}{\Delta \Delta}$, $(S^{11})'' = (S^{22})'' = 0$ i podstawieniu ich do (4.10) dochodzimy do następujących nierówności:

$$(5.13) \quad (\varphi_1 - \kappa_{22}) \left[\varphi_1 - \frac{1}{4} (1+\nu) (\varphi_1 - \kappa_{22}) \right] + \frac{1}{2} (\varphi_2 + \kappa_{21}) [(1+\nu) \varphi_2 - (\varphi_2 + \kappa_{21})] \geq 0,$$

$$-\varphi_1 (\varphi_2 + \kappa_{21}) + \frac{1}{2} (1+\nu) \varphi_2 (\varphi_1 - \kappa_{22}) \geq 0.$$

Warunek dostateczny, przedstawiony w postaci nierówności (5.13), nie pozwala wnioskować, którą z równości (4.11), (4.13), (4.12), (4.14) lub (4.11), (4.14) mamy wybrać. Należałoby te pary rozpatrzyć kolejno, a następnie sprawdzić, czy nierówności (5.13) są spełnione.

W poniższych rozważaniach rozpatrzono układ (4.12), (4.14) prowadzący do ciekawego rozwiązania. Jest ono rozwiązaniem szczególnym tego układu i ma postać

$$(5.14) \quad \varphi_2 = 0, \quad \cos \vartheta = 0.$$

Wykorzystując wzory (5.14) z warunków koniecznych (4.8) i równości (4.7) otrzymamy po przekształceniach następujący układ równań:

$$(5.15) \quad (w_{,12})^2 - w_{,11} w_{,22} = \left(\frac{\tau}{hG} \right)^2, \quad w_{,11} + w_{,22} = 0,$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{2w_{,12}}{w_{,22} - w_{,11}}, \quad \alpha = \alpha_I \pm \frac{\pi}{2}.$$

W powyższych związkach oznaczono przez

$$\tau = hG\varphi_I = \sqrt{3GC} = \text{const}$$

maksymalne naprężenia styczne wywołane skręcaniem [9] o wartościach stałych i równych danym naprężeniom dopuszczalnym $|\tau| = \tau_{\text{dop}}$. Podstawiając (5.15)₂ do wzorów (2.9)₂ i (3.11) znajdujemy

$$(5.16) \quad \varphi_I - \kappa_{22} = 0, \quad \kappa_{21} = 0.$$

Po wykorzystaniu tych wzorów i równości $\varphi_2 = 0$ stwierdzimy, że nierówności (5.13) są spełnione.

Otrzymane układy równań (5.8), (5.9) i (5.15) stanowią podstawę do wyznaczania kątów α i powierzchni ugięcia płyty — przy założeniu, że parametrem optymalizacji jest szerokość przekroju b . Parametr ten wyznaczamy po określeniu powierzchni ugięcia rusztu na podstawie związków fizycznych i geometrycznych ustroju.

Z kolei rozpatrzmy warunki optymalności przyjmując jako parametr optymalizacji wysokość h .

5.3. Przypadek $h \gg b$

Pochodne wyrażen na sztywności (5.1) mają w tym przypadku postać

$$(S^{11})' = \frac{1}{3} G(b)^2, \quad (S^{22})' = \frac{1}{4} E(h)^2,$$

$$(S^{11})'' = 0, \quad (S^{22})'' > 0.$$

Po podstawieniu tych wielkości do (4.10) otrzymujemy następujące nierówności:

$$(5.17) \quad - (S^{22})''(\varphi_2)^2 \geq 0,$$

$$-\frac{1}{3} G(b)^2 \varphi_I(\varphi_2 + \kappa_{21}) - \frac{1}{4} E(h)^2 \varphi_2(\varphi_I - \kappa_{22}) \geq 0$$

oraz nierówność (5.2)₂.

Pierwsza z powyższych nierówności spełniona jest jedynie, gdy $\varphi_2 = 0$. Na podstawie równości (4.12), (4.14) i (4.7) mamy

$$\cos \vartheta = 0, \quad \varphi_I + \varphi_{II} = 0.$$

Stąd po przekształceniach dochodzimy do układu równań (5.15). Korzystając ze wzorów (5.16) stwierdzamy, że nierówność (5.17)₂ jest spełniona. Natomiast nierówność (5.2)₂ sprowadza się do postaci

$$(b)^2 - (1 + \nu)(h)^2 \geq 0.$$

Powyższa nierówność przy przyjętych proporcjach wymiarów jest nieprawdziwa, a zatem warunek dostateczny (4.10) nie jest spełniony.

5.4. Przypadek $b \geq h$

Wstawiając pochodne funkcji (5.12)

$$(S^{11})'' > 0, \quad (S^{22})'' > 0$$

do warunku (4.10) otrzymujemy jedną z nierówności w postaci

$$-(S^{11})''(\varphi_I)^2 - (S^{22})''(\varphi_2)^2 \geq 0.$$

Nierówność ta jest nieprawdziwa dla dowolnego stanu odkształcenia rusztu. A więc warunek dostateczny (4.10) nie jest spełniony.

Na podstawie rozważań przedstawionych w p. 5.3 i 5.4 wnioskujemy, że dla wysokości h jako parametru optymalności warunki optymalności nie są spełnione.

6. WNIOSKI KOŃCOWE

W wyniku przedstawionych w pracy rozważań dochodzimy do następujących wniosków:

1. W przypadku, gdy pręty płyty siatkowej mają prostokątny przekrój poprzeczny wysokości h , oznaczające wymiar przekroju prostopadły do powierzchni płyty, nie mogą stanowić parametru optymalizacji.

2. Wymiary h i h nie mogą w przypadku ogólnym płyty optymalnej mieć dowolnie danych wartości, ponieważ istnienie rozwiązań optymalnych zależy od związków pomiędzy tymi wielkościami. Przykładowo rozwiązanie (5.15) wymaga, aby był spełniony związek

$$h = h \frac{\tau G}{\tau G}.$$

3. Posługując się wzorami na krzywizny główne κ_1 i κ_2 wyprowadzonymi w pracy [4] w postaci

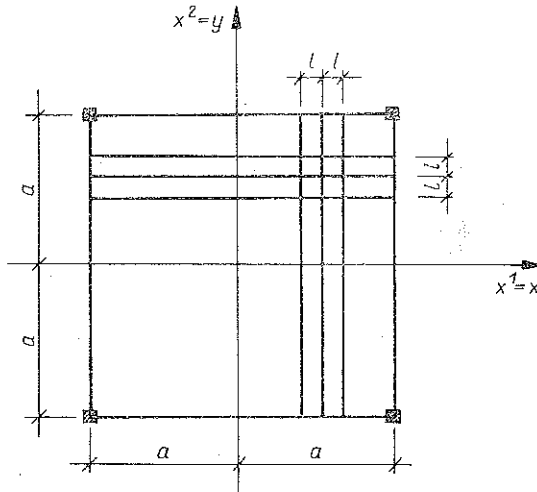
$$\kappa_1 = \frac{1}{2}(w_{,11} + w_{,22}) + \sqrt{\frac{1}{4}(w_{,11} - w_{,22})^2 + (w_{,12})^2},$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{2}(w_{,11} + w_{,22}) - \sqrt{\frac{1}{4}(w_{,11} - w_{,22})^2 + (w_{,12})^2},$$

znajdujemy, że $\kappa_1 = \kappa_2$, gdy $w_{,11} - w_{,22} = 0$, $w_{,12} = 0$. Powyższe równości pokrywają się z rozwiązaniem (5.8) spełniającym warunek dostateczny. A więc równość krzywizn głównych powierzchni odkształconej płyty pociąga za sobą istnienie rozwiązania zagadnienia optymalizacji niezależnie od tego, czy $h \gg b$ albo $b \gg h$.

Zestawione powyżej stwierdzenia odnoszą się jedynie do płyt, w których można pominąć wpływ sił poprzecznych na odkształcenia.

W zakończeniu rozważań przedstawiono przykład liczbowy, ilustrujący tok postępowania w konkretnych przypadkach konstrukcyjnych przy zastosowaniu otrzymanych w pracy rozwiązań. Rozpatrzono płytę siatkową kwadratową, podpartą w czterech narożach i wzmocnioną belkami obwodowymi (rys. 4). Płyta skonstruowana jest z prętów



Rys. 4

o przekrojach prostokątnych o proporcjach wymiarów $h \gg b$. Wszystkie pręty płyty wykonane są z jednakowego materiału o danych parametrach E i e . Płyta obciążona jest równomiernie rozłożonym obciążeniem o intensywności f i momentami M wzdłuż wszystkich brzegów płyty. Obliczenia wykonamy dla przypadku, gdy $h = h = H = \text{const}$. Funkcja ugięcia $w(x^\alpha)$ musi spełniać warunki (5.8)_{1,2}. Stąd mamy $m^{11} = m^{22} = 0$. Równania równowagi (2.11) można teraz zapisać w postaci

$$-m^{12}_{,11} + m^{21}_{,22} - f = 0,$$

a warunki brzegowe w postaci

$$m^{12}(a, y) = m^{12}(-a, y) = M,$$

$$m^{21}(x, a) = m^{21}(x, -a) = M.$$

Przyjmujemy dalej oznaczenia $x^1 = x$, $x^2 = y$. Funkcja ugięcia ma postać

$$w = \frac{\varepsilon a^2}{H} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2a^2} \right).$$

Kąty α są równe odpowiednio 0, $\pi/2$. Po obliczeniu składowych tensora naprężeń momentowych i wstawieniu ich do równania równowagi znajdujemy

$$(b)_{I,xx} + (b)_{II,yy} = -\frac{12lf}{E\varepsilon H^2}.$$

Rozwiązując powyższe równanie i uwzględniając warunki brzegowe znajdziemy

$$b_I = \frac{6l}{E\varepsilon H^2} [2M + f(a^2 - x^2)],$$

$$b_{II} = \frac{6l}{E\varepsilon H^2} [2M + f(a^2 - y^2)].$$

Funkcje te określają zmienną szerokość prętów przy stałej wysokości H . W rozwiązaniu przypadku oszczędności materiału konstrukcyjnego płyty optymalnej w porównaniu z płytą siatkową o stałych przekrojach prętów wynosi do 35% w zależności od stosunku parametrów obciążenia f i M .

Rozwiązanie podobne do przedstawionego powyżej otrzymano w pracy [6] dla płyty żelbetowej krzyżowo zbrojonej, podobnie podpartej. Otrzymane w obu przypadkach funkcje ugięcia mają jednakową postać. Podobieństwo rozwiązań wynika z tego, że w przypadku płyt optymalnych o stałej wysokości funkcja ugięcia jest wielomianem drugiego stopnia.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. DZIENISZEWSKI, *Optimization of lattice rod structures*, Arch. Mech. Stos., 2, 1971.
2. W. DZIENISZEWSKI, *Optimization of elastic lattice structures designed on a prescribed surface*, Arch. Mech. Stos., 5, 1971.
3. I. M. GELFAND, W. FOMIN, *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa 1970.
4. M. T. HUBER, *Teoria sprężystości*, 2, PAU, Kraków 1950.
5. Z. KĄCZKOWSKI, S. BŁASZKOWIAK, *Metoda Crossa*, IPPT-PAN Warszawa 1963.
6. Z. MRÓZ, *On the optimum of reinforced slabs*, Acta Mech. 3, 1, 1967.
7. R. PEŁA, *Statyka przestrzennej konstrukcji prętowej*, Rozpr. Inżyn., 4, 1971.
8. W. I. SMIRNOW, *Matematyka wyższa*, 2, PWN, Warszawa 1963.
9. S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa 1962.
10. W. WIERZBICKI, *Mechanika budowli*, PWN, Warszawa 1961.
11. CZ. WOŹNIAK, *Modele ciągle gęstych siatek prętowych*, Arch. Inżyn. Ładow., 2, 1965.
12. CZ. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1970.

Резюме

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ОПТИМИЗАЦИИ УПРУГИХ
РЕШЕТЧАТЫХ ПЛИТ НА МИНИМУМ ДЕФОРМИРУЕМОСТИ

В работе представлено решение проблемы оптимизации решетчатых плит из стержней с произвольными поперечными сечениями. Как критерий оптимальности плит принят минимум упругой деформируемости. Опираясь на сплошную модель волокнистой среды сформулирована вариационная задача оптимизации, которая затем решена подробным образом, приводя к необходимым и достаточным условиям оптимальности решетчатых плит. Представленное решение проанализировано по отношению к плитам из стержней, которые не испытывают деформаций сдвига.

SUMMARY

ON THE CONDITION OF NECESSARY AND SATISFACTORY OPTIMALIZATION OF
ELASTIC LATTICE PLATES ON MINIMUM DEFORMATION

In the paper introduced is the solution of the problem of lattice plates optimalization of rods with arbitrary transverse cross-sections. As a criterium of optimalization of plates a minimum elastic deformation was accepted. On the basis of a continuous model of fibrous center, formulated was the problem of variational optimalization, which was then dissolved in general manner, giving the necessary and sufficient conditions of optimalization of lattice plates.

The performed solution was analyzed with reference to the plates of rods not suffering the shape deformation.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 stycznia 1973 r.
