

NIESKOŃCZONA SPRĘŻYSTA BELKA TIMOSHENKI UDERZONA POPRZECZNIE SKOŃCZONYM PRĘTEM SPRĘŻYSTYM

STEFAN JAN K O W A L S K I (POZNAŃ)

1. WSTĘP

Udarowe obciążenia konstrukcji inżynierskich są zjawiskami często spotykanymi w technice. Opis tych zjawisk na podstawie dyskretnej lub niefalowej teorii uderzenia niejednokrotnie może prowadzić do nieprawdziwych wyników. W takich przypadkach jedynie teoria falowa może się okazać w miarę doskonała do opisu i analizy dynamicznego rzeczywistego procesu. W teorii tej bada się ruch fal, które z miejsca uderzenia propagują się tak w ciele uderzonym jak i uderzającym. Śledzenie przebiegu fal umożliwia opis i głębsze zrozumienie zjawisk towarzyszących uderzeniu, a także rzuca światło na zakres stosowalności teorii dyskretnych i niefalowych.

Niniejsza praca stanowi przykład dynamicznego zagadnienia kontaktowego, w którym stosuje się teorię falową. Rozważa się poprzeczne uderzenie nieskończonej belki sprężystej skończonym prętem sprężystym, zakładając idealny kontakt w miejscu zderzenia (płaszczyzny zderzenia idealnie gładkie, idealne zachowanie prostopadłego kierunku pręta do osi belki). Tego typu model stanowi aproksymację wielu technicznie ważnych układów, jak np. układu korbowo-tłokowego w silniku, przęsła mostu lub belki stropowej obciążonych dynamicznie przez przypadkowo spadający obiekt ciągły, suwnicy gwałtownie szarpiącej podnoszony ciężar, pocisku uderzającego w tarczę (belkę), samochodu uderzającego w balustradę itp.

Analizę zjawisk falowych prowadzi się opierając się na falowym równaniu Timoshenki w przypadku belki i równaniu jednowymiarowych fal podłużnych dla pręta. Stanowi to zasadnicze założenie niniejszej pracy i z tego względu wyniki mogą być interpretowane tylko w zakresie stosowalności równania Timoshenki do zagadnienia drgań poprzecznych belek pod wpływem siły skupionej. Nie jest naszym celem omawianie wszystkich złożonych zjawisk falowych w belce występujących między innymi w miejscu zderzenia w okresie zderzenia. Uwagi na ten temat Czytelnik może znaleźć w pracach [1, 2 i 3] (por. również spis literatury w pracy [4]). Warto jednak w tym miejscu wspomnieć, że z punktu widzenia teorii sprężystości zakres zastosowania równania Timoshenki ograniczony jest do tych drgań z najniższymi częstotliwościami, którym odpowiadają antysymetryczne względem płaszczyzny środkowej postaci drgań wzdłuż wysokości. Również stan naprężenia w elemencie belki położonym w bezpośrednim sąsiedztwie punktu zderzenia w czasie kontaktu jest bardziej złożony, aniżeli to wynika z równania Timoshenki.

Literatura na temat drgań belek Timoshenki jest stosunkowo bogata. Przeglądu większości prac z okresu do 1964 roku dotyczących tego tematu dokonał K. WILMAŃSKI [5]. W ostatnich latach zagadnieniem poprzecznego uderzenia belki prętem zajmowali się S. RANGANATH [6] oraz R. J. CLIFTON [7]. W pracy [6] rozwiązano zagadnienie uderzenia nieskończonej sprężystej belki Timoshenki półnieskończonym prętem sprężystym, a w pracy [7] uderzenie nieskończonej sprężysto-plastycznej belki Timoshenki półnieskończonym prętem sprężystym. W obydwu przypadkach porównano wyniki analizy teoretycznej z wynikami badań eksperymentalnych i stwierdzono dużą zgodność.

Celem niniejszej pracy jest wyznaczenie energii mechanicznej przekazanej belce przez pręt w czasie kontaktu oraz analiza drgań swobodnych belki po odpadnięciu pręta. Rozwiązanie otrzymano tu wykorzystując metodę transformacji Laplace'a i metodę charakterystyk. Otrzymane wyniki zilustrowano wykresnie w p. 5 tej pracy.

2. PODSTAWOWE RÓWNANIA

Korzystać będziemy z następujących zmiennych i parametrów bezwymiarowych:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x_1 &= x/r, & y_1 &= y/r, \\ t_1 &= c_1 t/r, & w_1 &= w/r, & u_1 &= u/r, & V_1 &= V/c_1, & U_1 &= U/c_1, \\ V_{01} &= V_0/c_1, & c &= c_0/c_1, & L_1 &= L/r, & \gamma &= E_b/kG_b, & M_1 &= Mr/E_b I_b, \\ T_1 &= T/k G_b A_b, & \sigma_1 &= \sigma/E_p. \end{aligned}$$

- x współrzędna mierzona wzdłuż osi belki od punktu uderzenia (rys. 1),
- y współrzędna mierzona wzdłuż osi pręta od punktu uderzenia (rys. 1),
- t czas,
- $w(x, t)$ ugięcie osi belki,
- $u(y, t)$ przemieszczenie przekroju y pręta,
- $V(x, t)$ prędkość zginania belki,
- $U(y, t)$ prędkość przemieszczeń przekroju y pręta,
- V_0 prędkość uderzenia,
- L długość pręta,
- $r = (I_b/F_b)^{1/2}$ promień bezwładności belki dla zginania,
- $c_0 = (E_p/\rho_p)^{1/2}$ prędkość propagacji fali podłużnej w pręcie,
- $c_1 = (E_b/\rho_b)^{1/2}$ prędkość propagacji fali gnącej w belce,
- $c_2 = (kG_b/\rho_b)^{1/2}$ prędkość propagacji fali tnącej w belce,
- I_b moment bezwładności przekroju belki dla zginania,
- F_b przekrój belki,
- E_b moduł Younga materiału belki,
- E_p moduł Younga materiału pręta,
- G_b moduł odkształcenia postaciowego materiału belki,
- ρ_b gęstość belki,
- ρ_p gęstość pręta,
- k współczynnik ścinania belki,

$\sigma(y, t)$ naprężenie w pręcie,
 $M(x, t)$ moment gnący,
 $T(x, t)$ siła tnąca.

Znak «prim» i kropka postawione nad symbolem oznaczają różniczkowanie odpowiednio względem x i t .

Związki pomiędzy momentem gnącym i kątem obrotu oraz pomiędzy siłą tnącą, kątem obrotu i ugięciem są następujące:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} M_1(x_1, t_1) &= \psi'(x_1, t_1), \\ T_1(x_1, t_1) &= w_1'(x_1, t_1) - \psi(x_1, t_1). \end{aligned}$$

Równania Timoshenki [8] przedstawione w zmiennych bezwymiarowych są następujące:

$$(2.3) \quad \psi'' + (w_1' - \psi)/\gamma - \ddot{\psi} = 0, \quad (w_1'' - \psi')/\gamma - \ddot{w}_1 = 0.$$

Przyjmujemy, że belka jest przed uderzeniem nieugięta i nieruchoma, tzn. że

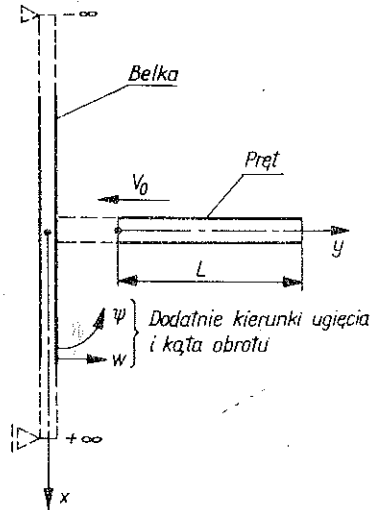
$$(2.4) \quad w_1 = \dot{w}_1 = \psi = \dot{\psi} = 0 \text{ w chwili } t_1 = 0.$$

Na podstawie (2.3) transformaty Laplace'a $W(x_1, p)$ i $\Psi(x_1, p)$ określone następująco:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} W(x_1, p) &= \int_0^\infty w_1(x_1, t_1) e^{-pt_1} dt_1, \\ \Psi(x_1, p) &= \int_0^\infty \psi(x_1, t_1) e^{-pt_1} dt_1, \end{aligned}$$

powinny spełniać równania:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \Psi'' + (W' - \Psi)/\gamma - p^2 \Psi &= 0, \\ (W'' - \Psi)/\gamma - p^2 W &= 0. \end{aligned}$$



Rys. 1

Ogólne rozwiązanie powyższego układu równań różniczkowych ma postać

$$(2.7) \quad \begin{aligned} W &= C_1 e^{-\lambda_1 x_1} + C_2 e^{-\lambda_2 x_1} + C_3 e^{+\lambda_1 x_1} + C_4 e^{+\lambda_2 x_1}, \\ \Psi &= \frac{\lambda_1^2 - \gamma p^2}{\lambda_1} (C_3 e^{\lambda_1 x_1} - C_1 e^{-\lambda_1 x_1}) + \frac{\lambda_2^2 - \gamma p^2}{\lambda_2} (C_4 e^{\lambda_2 x_1} - C_2 e^{-\lambda_2 x_1}), \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \lambda_{1,2} &= B p^{\frac{1}{2}} [p \pm N(p^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}, \\ a &= 2/(\gamma - 1), \quad B = [(\gamma + 1)/2]^{\frac{1}{2}}, \quad N = (\gamma - 1)/(\gamma + 1). \end{aligned}$$

Stałe C_1, C_2, C_3 i C_4 wyznaczamy w p. 4 korzystając z warunków brzegowych.

3. UWAGI DOTYCZĄCE CZASU KONTAKTU PRĘTA Z BELKĄ

W punkcie tym wybiegniemy nieco naprzód i pokażemy, że w konsekwencji założonego przez nas idealnego kontaktu w miejscu zderzenia — czas kontaktu $t = t_k$ pręta z belką jest równy okresowi drgań swobodnych pręta dla pierwszej częstości

$$(3.1) \quad t_{1k} = \frac{2L_1}{c},$$

gdzie $t_{1k} = c_1 t_k / r$ oznacza bezwymiarowy czas kontaktu [por. (2.1)].

Wniosek ten otrzymuje się analizując związek pomiędzy naprężeniem i prędkością elementu pręta w miejscu kontaktu z wykorzystaniem końcowych wyników obliczeń numerycznych dotyczących prędkości ugięcia w miejscu zderzenia. Mianowicie proces rozprzestrzeniania się fal w pręcie w czasie kontaktu opisuje równanie falowe postaci

$$(3.2) \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1^2},$$

które można zastąpić ekwiwalentnym układem związków różniczkowych wzdłuż charakterystyk. Związki te po scałkowaniu wyrażają się następująco:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \sigma_1 - U_1/c &= \text{const wzdłuż } y_1 - ct_1 = \text{const}, \\ \sigma_1 + U_1/c &= \text{const wzdłuż } y_1 + ct_1 = \text{const}, \end{aligned}$$

przy czym wielkości stałe wyznacza się korzystając z następujących warunków początkowych i brzegowych:

$$(3.4) \quad \sigma_1(y_1, 0) = 0, \quad U_1(y_1, 0) = -V_{01};$$

$$(3.5) \quad [U_1(y_1, t_1)]_{y_1=0} = [w_1(x_1, t_1)]_{x_1=0}, \quad \sigma_1(L_1, t_1) = 0.$$

W warunku (3.5)₁ występuje nie znana do chwili rozwiązania całego zagadnienia brzegowego prędkość ugięcia belki w miejscu kontaktu.

Ponieważ rozwiązanie poszukuje się w klasie funkcji nieciągłych, to dla jednoznaczności wyznaczenia pól naprężeń σ_1 i prędkości U_1 konieczną jest dodatkowa ciągłość prędkości belki w punkcie $x_1 = 0$ w czasie $t_1 > 0$, w szczególności w momencie $t_1 = 2L_1/c$ powrotu fali odbitej od swobodnego brzegu pręta $y_1 = L_1$. Zachodzi tu analogiczna sytuacja do przypadku uderzenia pręta sztywną masą [9].

Z fizycznego punktu widzenia ciągłość prędkości belki w punkcie $x_1 = 0$ w chwili $t_1 = 2L_1/c$ (tj. w chwili powrotu fali odbitej od swobodnego brzegu) uzasadnia się tym, że działanie pręta na belkę ma tu charakter odciażający i wskutek braku «sklejenia» nie może udzielić się belce.

Zagadnienia propagacji fal podłużnych w pręcie sprężystym należą do najbardziej elementarnych zagadnień teorii fal i z tego względu nie przytaczamy pełnego

rozwiązania równania (3.2). Dla naszych celów istotny jest związek pomiędzy naprężeniem i prędkością na brzegu pręta, jaki wynika z tego rozwiązania:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1(0, t_1) &= -[V_{01} + \dot{w}_1(0, t_1)]/c \quad \text{dla } 0 < t_1 < \frac{2L_1}{c}, \\
 \sigma_1(0, t_1) &= -[V_{01} + \dot{w}_1(0, t_1)]/c + 2 \left[V_{01} + \dot{w}_1 \left(0, t_1 - \frac{2L_1}{c} \right) \right] / c \\
 &\quad \text{dla } \frac{2L_1}{c} < t_1 < \frac{4L_1}{c}.
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

Analiza końcowych wyników stanowiących rozwiązanie rozważanego zagadnienia wskazuje, że spełnione są następujące nierówności (należy wziąć pod uwagę ciągłość funkcji $[\dot{w}]_{x_1=0}$ i wykorzystać rys. 3a i 3b):

$$\begin{aligned}
 V_{01} + \dot{w}_1(0, +0) &> 0, \\
 [V_{01} + \dot{w}_1]_{x_1=0} &> 0, \\
 &\quad t_1 = \frac{2L_1}{c} - 0 \\
 [V_{01} + \dot{w}_1]_{x_1=0} &> V_{01} + [\dot{w}_1]_{x_1=0} \\
 &\quad t_1 = 0 \qquad \qquad \qquad t_1 = \frac{2L_1}{c} + 0
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Z (3.7)₂ i (3.6)₁ wynika, że w chwili $t_1 = 2L_1/c - 0$ naprężenia na brzegu pręta są ściskające (ujemne). Z drugiej strony, analizując (3.6)₂ oraz biorąc pod uwagę (3.7)₁ i (3.7)₃, wnioskujemy, że w chwili $t_1 = 2L_1/c + 0$ naprężenie na brzegu pręta staje się rozciągające (dodatnie). Ta zmiana znaku naprężenia stanowi dowód, że po upływie czasu (3.1) nastąpi odpadnięcie pręta od belki.

Z analizy tej wynika również, że czas kontaktu (3.1) w rozważanym przypadku nie zależy od prędkości uderzenia V_0 i masy pręta m_p , a jedynie od wymiarów liniowych pręta L i jego własności mechanicznych (modułu Younga E_p i gęstości ρ_p).

W dalszym ciągu pracy przy formułowaniu warunków brzegowych dla belki w punkcie kontaktu bierzemy pod uwagę, że w przedziale $t_1 > 2L_1/c$ na belkę nie działają żadne obciążenia zewnętrzne.

4. WARUNKI BRZEGOWE BELKI I ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Jak wspomniano we wstępie celem naszych rozważań jest analiza drgań swobodnych belki po odpadnięciu pręta oraz określenie energii mechanicznej, przekazywanej belce przez pręt w czasie kontaktu.

W związku z powyższym wyznaczamy tu prędkość zginania, moment zginający i siłę tnącą, które to wielkości stanowić będą przedmiot analizy, jak również pozwolą określić poszukiwaną energię mechaniczną.

Ponieważ prędkość zginania i moment gnący są funkcjami symetrycznymi względem x_1 , a siła tnąca funkcją antysymetryczną, przeto w dalszym ciągu ograniczać będziemy się jedynie do przedziału $x_1 \geq 0$.

Ogólne rozwiązanie równania drgań belki wyrażone w transformatach Laplace'a przedstawiają równania (2.7). W celu wyznaczenia transformat prędkości zginania pW , momentu zginającego Ψ' , siły tnącej $W' - \Psi$ należy na podstawie warunków brzegowych wyznaczyć stałe C_1, C_2, C_3 i C_4 , które zależą od parametru transformacji p .

Zakładając $\text{Re } \lambda_1 > 0, \text{Re } \lambda_2 > 0$ oraz ograniczoność rozwiązań w $x_1 = \infty$, można napisać

$$(4.1) \quad C_3 = C_4 = 0.$$

W fizycznej interpretacji przyczyną znikania stałych C_3 i C_4 są zerowe ugięcia i momenty zginające w nieskończoności.

Kolejne warunki dotyczą przekroju $x_1 = 0$. Pierwszy z nich jest warunkiem symetrii; oznacza on brak obrotu przekroju $x_1 = 0$, tzn.

$$(4.2) \quad [\psi]_{x_1=0} = 0.$$

Drugi warunek wynika z zasady zachowania pędu użytej do małego elementu belki znajdującego się pod prętem. Jeśli pominąć siłę masową tego elementu jako wielokrotnie mniejszą od pozostałych wielkości, to warunek ten przedstawia siłę tnącą jako połowę siły skupionej, równej iloczynowi przekroju i naprężenia na brzegu pręta [6]. Warunek ten wyrażony w wielkościach bezwymiarowych, po wykorzystaniu związków (2.2) i (3.6)₁, przedstawia się następująco:

$$(4.3) \quad [(w'_1 - \psi)]_{x_1=0} = [H\gamma(V_{01} + \dot{w}_1)]_{x_1=0} \delta(t_1, t_{1k}),$$

gdzie

$$(4.4) \quad H = m_p / \rho_p A_p r$$

oraz gdzie $m_p = \rho_p A_p L$ jest masą pręta, $\delta(t_1, t_{1k}) = [\eta(t_1) - \eta(t_1 - t_{1k})] / t_{1k}$ jest ciągłym widmem funkcji Diraca w przedziale $[0, t_{1k}]$ oraz $t_{1k} = 2L_1/c$ czasem kontaktu. Transformaty Laplace'a warunków (4.2) i (4.3) przyjmują postać

$$(4.5) \quad \begin{aligned} [\Psi]_{x_1=0} &= 0, \\ [(W' - \Psi)]_{x_1=0} &= [H\gamma(V_{01} + p^2 W)]_{x_1=0} (1 - e^{-pt_{1k}}) / pt_{1k}. \end{aligned}$$

Dla pręta sztywnego interpretacja warunków brzegowych jest podobna z wyjątkiem (4.5)₂, gdzie z punktu widzenia teorii falowej czas kontaktu t_{1k} jest nieskończenie krótki.

Jeśli $t_{1k} \rightarrow 0$, to otrzymamy warunki dla pręta sztywnego:

$$(4.6) \quad [\Psi]_{x_1=0} = 0, \quad [(W' - \Psi)]_{x_1=0} = [H\gamma(V_{01} + p^2 W)]_{x_1=0},$$

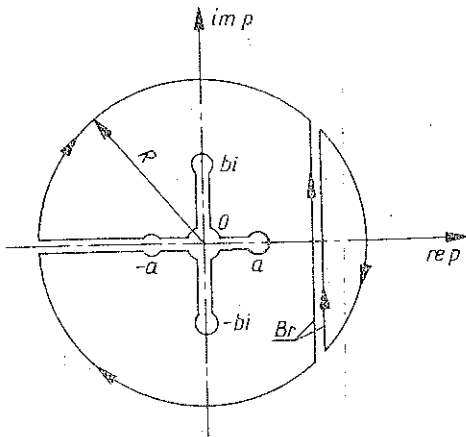
które można otrzymać również bezpośrednio, stosując zasadę zachowania pędu do małego elementu belki, znajdującego się pod prętem i pręta traktowanego jako ciało sztywne. Warunki (4.5) dla pręta sprężystego i (4.6) dla pręta sztywnego pozwalają określić pozostałe stałe w równaniu (2.2) oraz sprecyzować interesujące nas transformaty: pW, Ψ' oraz $W' - \Psi$. Transformaty te zestawione są w tablicy 1.

Tablica 1. Transformaty prędkości, momentu gnącego i siły tnącej

	Warunki brzegowe	$pW(x_1, p)$	$\Psi'(x_1, p)$	$W'(x_1, p) - \Psi(x_1, p)$
$0 < t_1 < t_{1k}$	$\left[\frac{\gamma H}{t_{1k}} \times \left[\frac{V_{01} + pW}{p} \right] \right]_{x_1=0}$	$\frac{HV_{01} [(\lambda_2^2 - \gamma p^2) \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} - (\lambda_2^2 - \gamma p^2) \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_1}]}{p \{ t_{1k} p (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - H [(\lambda_2^2 - \gamma p^2) \lambda_1 - (\lambda_1^2 - \gamma p^2) \lambda_2] \}}$	$\frac{HV_{01} (\lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_1})}{p t_{1k} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - H [(\lambda_2^2 - \gamma p^2) \lambda_1 - (\lambda_1^2 - \gamma p^2) \lambda_2]}$	$\frac{HV_{01} \gamma [-(\lambda_2^2 - \gamma p^2) e^{-\lambda_1 x_1} + (\lambda_1^2 - \gamma p^2) e^{-\lambda_2 x_1}]}{t_{1k} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - H [(\lambda_2^2 - \gamma p^2) \lambda_1 - (\lambda_1^2 - \gamma p^2) \lambda_2]}$
Pręt sprężysty	$\left[(W' - \Psi)_{x_1=0} = \left[H\gamma(V_{01} + p^2 W) \right]_{x_1=0} \times \frac{1 - e^{-pt_{1k}}}{pt_{1k}} \right]$	$\frac{HV_{01} [(\lambda_2^2 - \gamma p^2) \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} - (\lambda_1^2 - \gamma p^2) \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_1}] (1 - e^{-pt_{1k}})}{p \{ p t_{1k} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - H [(\lambda_2^2 - \gamma p^2) \lambda_1 - (\lambda_1^2 - \gamma p^2) \lambda_2] (1 - e^{-pt_{1k}}) \}}$	$\frac{HV_{01} (\lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_1}) \times (1 - e^{-pt_{1k}})}{p t_{1k} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - H [(\lambda_2^2 - \gamma p^2) \lambda_1 - (\lambda_1^2 - \gamma p^2) \lambda_2] (1 - e^{-pt_{1k}})}$	$\frac{HV_{01} \gamma [-(\lambda_2^2 - \gamma p^2) e^{-\lambda_1 x_1} + (\lambda_1^2 - \gamma p^2) e^{-\lambda_2 x_1}] (1 - e^{-pt_{1k}})}{p t_{1k} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - H [(\lambda_2^2 - \gamma p^2) \lambda_1 - (\lambda_1^2 - \gamma p^2) \lambda_2] (1 - e^{-pt_{1k}})}$
$t_1 > t_{1k}$	$\left[(W' - \Psi)_{x_1=0} = [H\gamma(V_{01} + p^2 W)]_{x_1=0} \right]$	$\frac{HV_{01} [(\lambda_2 - \gamma p^2) \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} - (\lambda_1 - \gamma p^2) \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_1}]}{p \{ (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - H [(\lambda_2^2 - \gamma p^2) \lambda_1 - (\lambda_1^2 - \gamma p^2) \lambda_2] \}}$	$\frac{HV_{01} (\lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_1})}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - H [(\lambda_2^2 - \gamma p^2) \lambda_1 - (\lambda_1^2 - \gamma p^2) \lambda_2]}$	$\frac{HV_{01} \gamma [-(\lambda_2^2 - \gamma p^2) e^{-\lambda_1 x_1} + (\lambda_1^2 - \gamma p^2) e^{-\lambda_2 x_1}]}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - H [(\lambda_2^2 - \gamma p^2) \lambda_1 - (\lambda_1^2 - \gamma p^2) \lambda_2]}$
Pręt sztywny	$\left[(W' - \Psi)_{x_1=0} = [H\gamma(V_{01} + p^2 W)]_{x_1=0} \right]$	$\frac{HV_{01} [(\lambda_2 - \gamma p^2) \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} - (\lambda_1 - \gamma p^2) \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_1}]}{p \{ (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - H [(\lambda_2^2 - \gamma p^2) \lambda_1 - (\lambda_1^2 - \gamma p^2) \lambda_2] \}}$	$\frac{HV_{01} (\lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_1})}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - H [(\lambda_2^2 - \gamma p^2) \lambda_1 - (\lambda_1^2 - \gamma p^2) \lambda_2]}$	$\frac{HV_{01} \gamma [-(\lambda_2^2 - \gamma p^2) e^{-\lambda_1 x_1} + (\lambda_1^2 - \gamma p^2) e^{-\lambda_2 x_1}]}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - H [(\lambda_2^2 - \gamma p^2) \lambda_1 - (\lambda_1^2 - \gamma p^2) \lambda_2]}$

Retransformaty poszukiwanych funkcji (patrz Dodatek) otrzymano wykorzystując teorię funkcji zmiennej zespolonej.

Całki przekształcenia odwrotnego rozumiane w sensie wartości głównej Cauchy'ego dla wszystkich funkcji zestawionych w tabelicy 1 otrzymano dokonując całkowania po konturze Bromwicha-Wagnera [8 i 10] z wycięciami (rys. 2).



Rys. 2

Ponieważ bardziej szczegółowe omówienie tej metody w zastosowaniu do równań Timoszenki można znaleźć np. w pracy [8], dlatego nie poświęcimy jej tu więcej miejsca.

5. ANALIZA WYNIKÓW I WNIOSKI

Dla zilustrowania otrzymanych wyników przedstawiono wykresy prędkości, momentu gnącego i siły tnącej w przekroju $x_1=0$ belki oraz wykres siły na styku pręta z belką i energii mechanicznej, jaką przekazuje pręt belce w czasie kontaktu. Wykresy wykonano dla następujących danych:

Belka. 1) Stałe materiałowe: $E_b=2 \cdot 10^6$ [kG/cm²],

$$\rho_0=(7,8/9,81 \cdot 10^6)$$
 [kG s²/cm⁴], $\nu=0,3$.

2) Wymiary: przekrój prostokątny $A_b=3 \times 1=3$ [cm²], moment bezwładności $I_b=3 \times 1^3/12=(1/4)$ [cm⁴], współczynnik ścinania $k=5/6$ [—] oraz współczynnik $\gamma=E_b/kG_b=3,12$ [—].

Pręt 1) Stałe materiałowe: przyjęto trzy rodzaje materiału pręta:

a) $\rho_p=\rho_b$, $E_p=E_b$;

b) $\rho_p=\rho_b/2$, $E_p=E_b/2$;

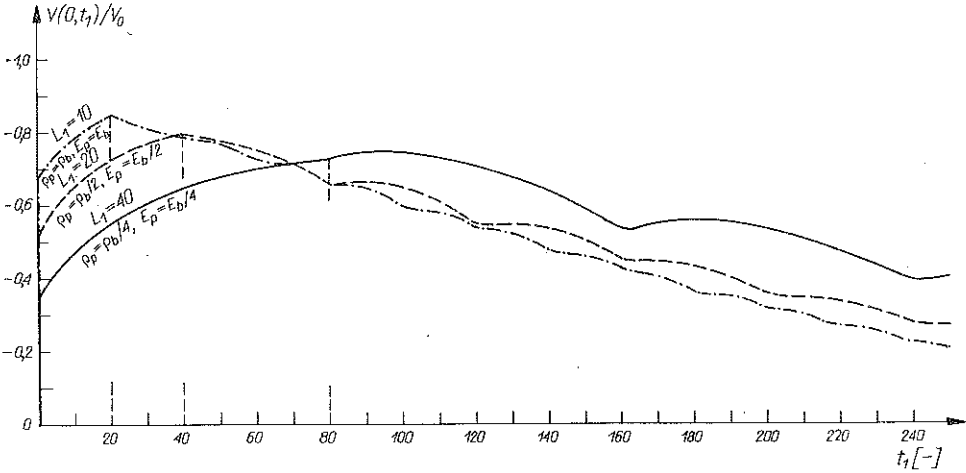
c) $\rho_p=\rho_b/4$, $E_p=E_b/4$.

2) Wymiary: przekrój okrągły $d=3$ cm, długość

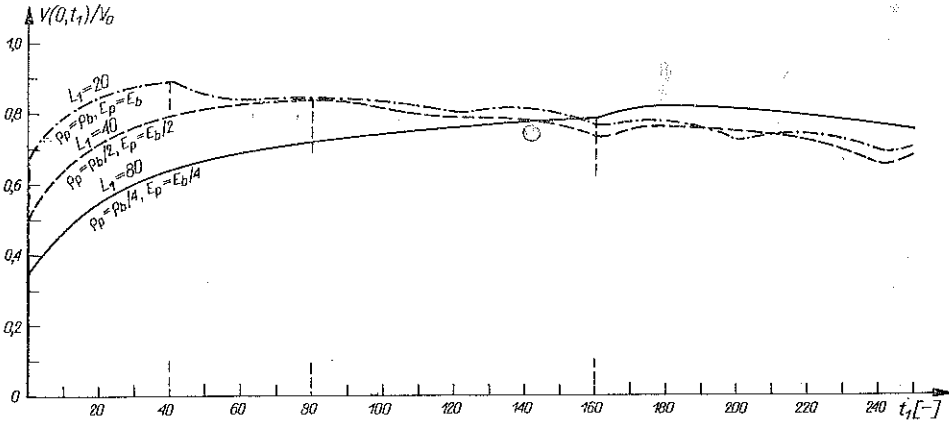
$$H=7,5 \pi \begin{cases} L=10r, L_1=10, & \rho_p=\rho_b, E_p=E_b; \\ L=20r, L_1=20, & \rho_p=\rho_b/2, E_p=E_b/2; \\ L=40r, L_1=40, & \rho_p=\rho_b/4, E_p=E_b/4; \end{cases}$$

$$H=15 \pi \begin{cases} L=20r, L_1=20, & \rho_p=\rho_b, E_p=E_b; \\ L=40r, L_1=40, & \rho_p=\rho_b/2, E_p=E_b/2; \\ L=80r, L_1=80, & \rho_p=\rho_b/4, E_p=E_b/4. \end{cases}$$

Całkowanie funkcji zestawionych w Dodatku prowadzono wykorzystując metodę Simpsona z krokiem $\Delta\rho=0,01$. Osobliwości występujące w funkcjach podcałkowych w równaniach (D.1) – (D.3) usunięto przez odpowiednią zamianę zmiennych [6 i 8]. Dla funkcji podcałkowych, podanych w równaniach (D.4) i (D.5), otrzymuje się, gdy $\rho \rightarrow 0$, wielkość nieoznaczoną. Jednak graniczna wartość każdej z tych funkcji przy $\rho \rightarrow 0$ wynosi zero, co wymaga wprowadzenia stosownego warunku w procedurze programu dla maszyny cyfrowej.



Rys. 3a



Rys. 3b

Analiza wzorów podanych w Dodatku i wykresów na rys. 3a – 5b sugeruje podział ruchu belki na dwie fazy. Fazę I stanowi ruch belki razem z prętem w okresie trwania kontaktu. Analizowane funkcje zależą tu (przy ustalonym x_1 i t_1) od następujących parametrów: pola przekroju pręta A_p , przekroju belki A_b , gęstości pręta ρ_p , gęstości belki ρ_b , efektywnego modułu ścinania kG_b oraz promienia bezwładności belki r .

Fazę II stanowią drgania swobodne belki po odpadnięciu pręta. Do zestawu parametrów wymienionych wyżej dochodzi w tej fazie dodatkowo długość pręta L . Fakt, że długość pręta w II fazie ruchu odgrywa rolę, związany jest z odbiciem fali podłużnej w pręcie.

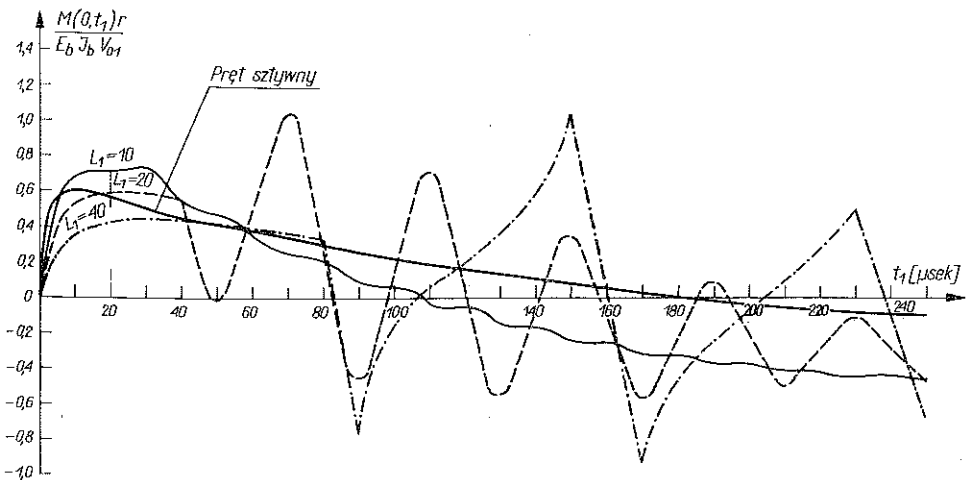
Należy tu zaznaczyć, że I faza nie jest możliwa do analizy przy uderzeniu belki prętem sztywnym. Obciążenie belki w tym przypadku ma charakter impulsu.

Jak wynika z rys. 3a i 3b prędkość belki doznaje w chwili uderzenia nagłego przyrostu (por. również rys. 4 w pracy [6]). Wielkość tego przyrostu w ogólnym przypadku zależy od parametrów dotyczących I fazy ruchu, a na rysunku podano ją w zależności od modułu Younga i gęstości pręta. Porównując rys. 3a i 3b widać, że mimo dwukrotnego wzrostu masy pręta wskutek zwiększenia długości — nagły przyrost prędkości w chwili uderzenia dla danej gęstości i modułu Younga jest taki sam.

Gdyby zwiększać gęstość i moduł Younga (zachowując stałą masę), to w granicznym przypadku otrzymałoby się sztywny punkt materialny ($\rho_p = \infty$, $E_p = \infty$, $L = 0$). Przy uderzeniu belki sztywnym punktem materialnym, prędkość belki wzrosłaby o prędkość uderzenia.

Charakterystyczne jest, że belka, której prędkość była większa w I fazie ruchu, jest intensywniej hamowana w II fazie ruchu. Widać również, że w II fazie prędkość belki okresowo wzrasta (mimo ogólnej tendencji do zmniejszania się) charakterystycznie dla ruchu falowego. Ponieważ belka jest nieskończona prędkość rozważanego tu przekroju $x_1 = 0$ dąży do zera.

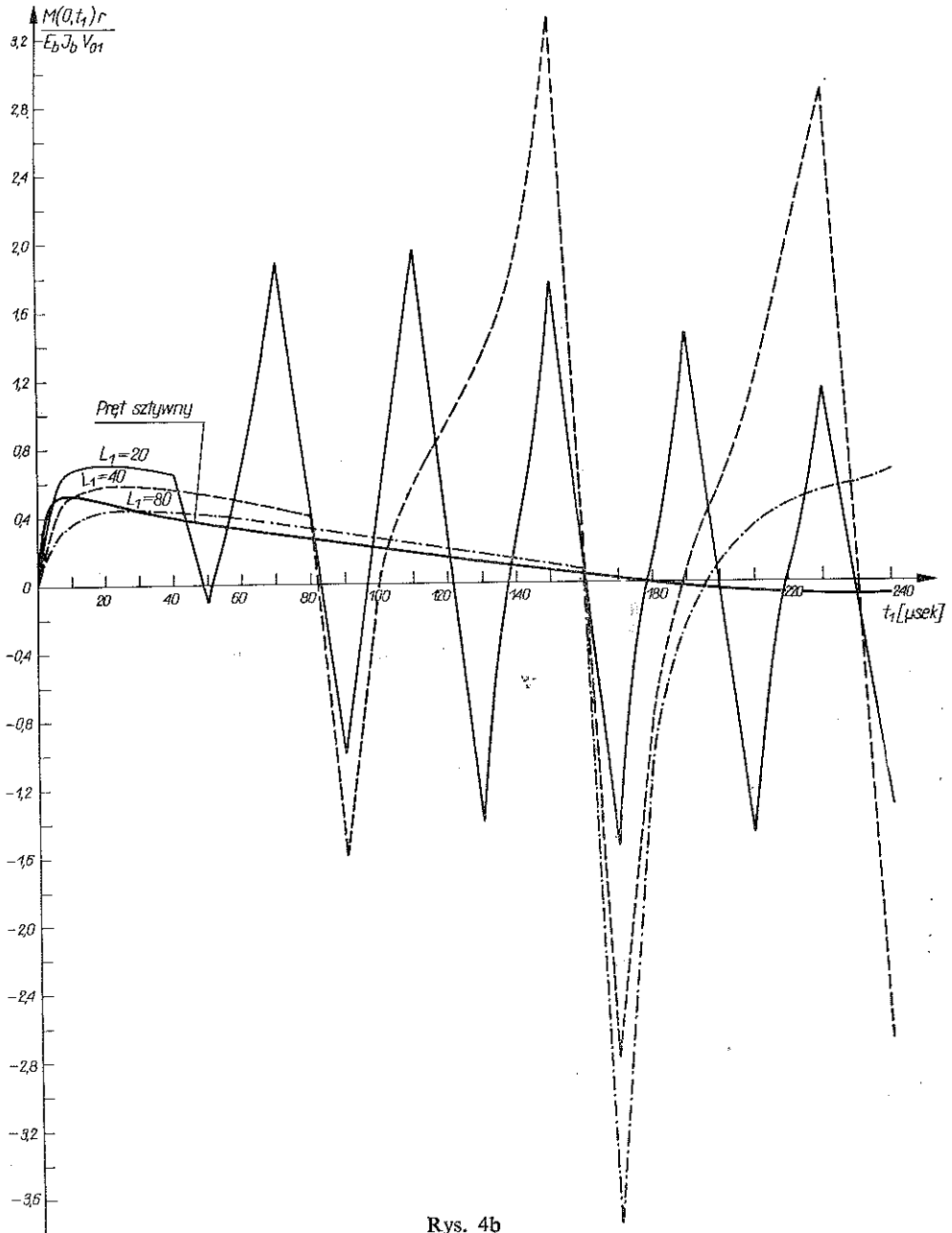
Na rys. 4a i 4b przedstawiono wykres momentu gnącego w przekroju $x_1 = 0$ dla tych samych wartości parametrów co w przypadku prędkości. W I fazie ruchu moment gnący ma stały znak i gradienty jego przyrostu zależą od parametrów dotyczących tej fazy. Falowy charakter ruchu sprawia, że w II fazie moment gnący belki intensywnie zmienia się okresowo, przy czym amplituda tych drgań zależy



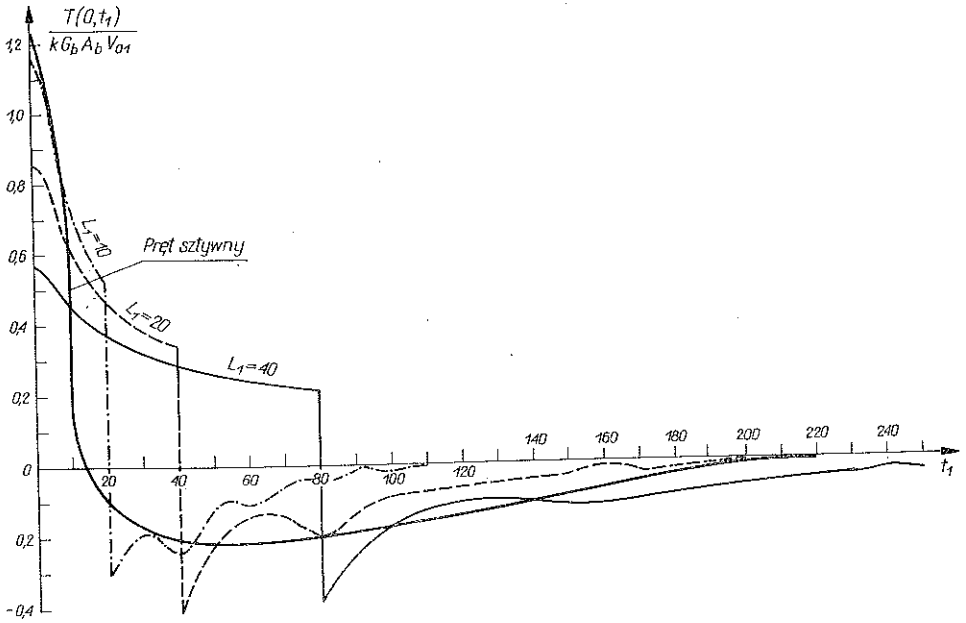
Rys. 4a

od długości fali (długość fali jest równa iloczynowi czasu kontaktu i prędkości fali gnącej w belce). Dla fal o większych długościach wartość amplitudy jest większa i jak widać na rys. 4b kilkakrotnie przewyższa wartość momentu w I fazie ruchu.

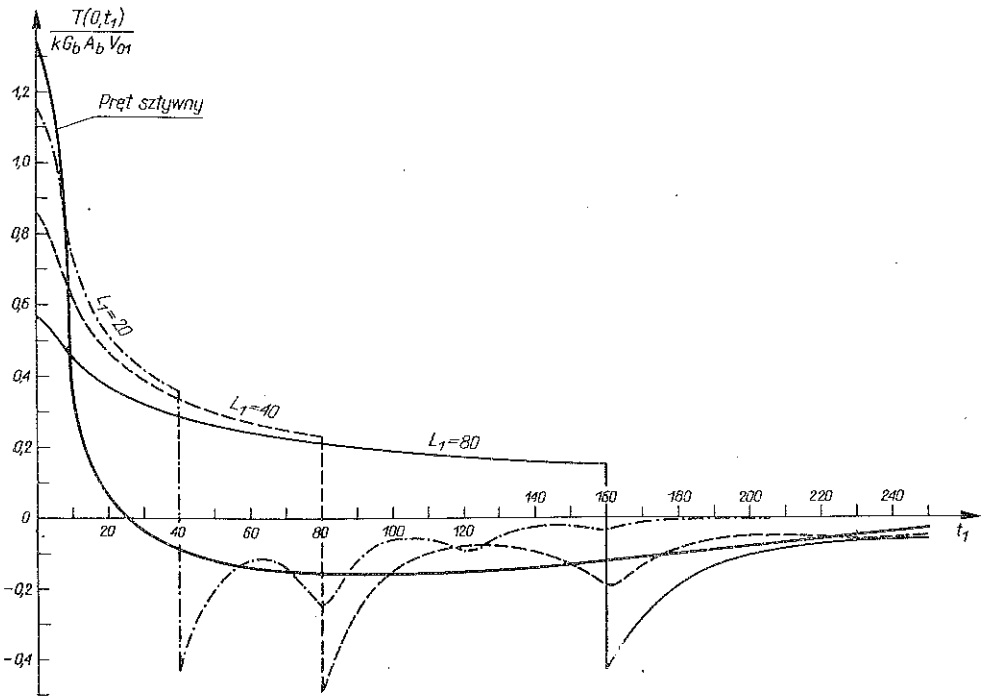
Wielkość nagłego przyrostu siły tnącej (rys. 5a i 5b) w chwili uderzenia zależy tak samo jak prędkość od gęstości i modułu Younga. Siła tnąca rośnie przy uderze-



Rys. 4b

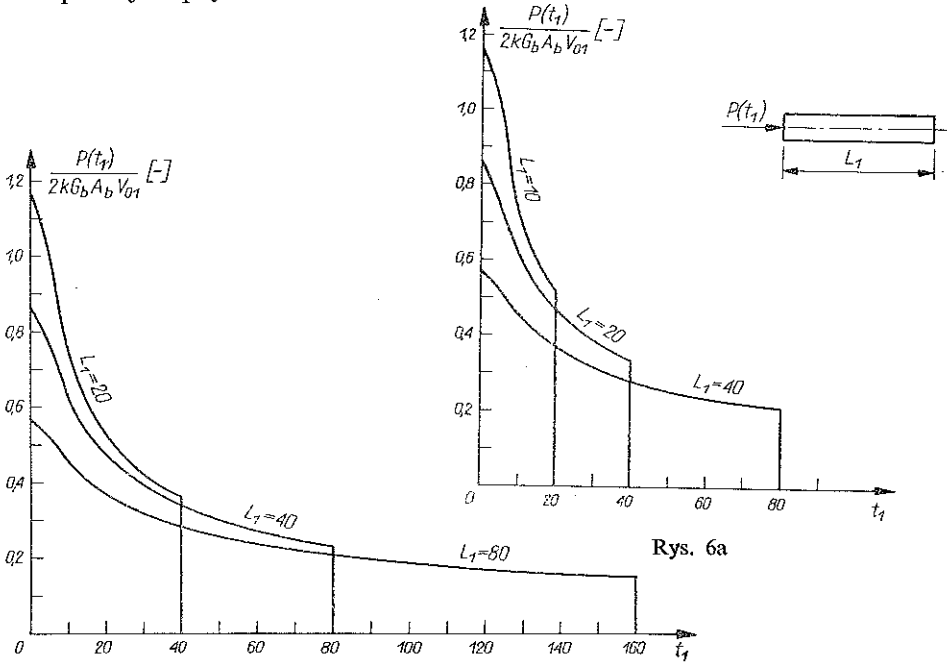


Rys. 5a



Rys. 5b

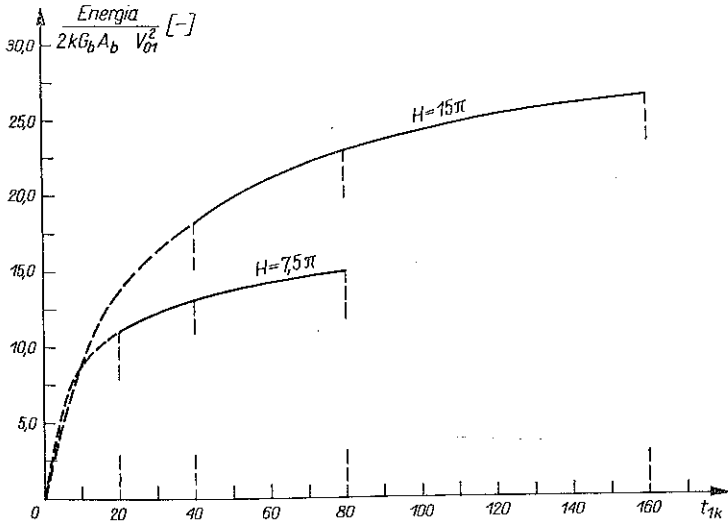
niu prętem o dużej gęstości i module Younga osiągając największą wartość przy uderzeniu prętem sztywnym (w przeciwieństwie do momentu gnącego, który większe amplitudy osiąga dla prętów o mniejszej gęstości i module Younga). Zmiana znaku siły tnącej w chwili $t_1 = t_{1k}$ spowodowana jest zmianą znaku przyspieszenia belki po odpadnięciu pręta.



Rys. 6b

Jak widać z rys. 6a i 6b, siła kontaktowa wzrasta nagle do swej maksymalnej wartości w momencie uderzenia, następnie maleje monotonicznie i w chwili powrotu do miejsca uderzenia fali odbitej o koniec pręta — nagle znika. Wykresy na rys. 6a i 6b wskazują również, że bardziej «miękkie» uderzenie ma miejsce dla prętów o mniejszej gęstości i module Younga. Pręty o dużej gęstości powodują duży nagły przyrost siły, który jednak stosunkowo szybko maleje z upływem czasu. Dlatego też energia mechaniczna przekazana belce przez pręty o dużej gęstości i module Younga jest mniejsza niż dla prętów o mniejszej gęstości i module Younga przy tej samej masie. Wykres energii mechanicznej przekazanej belce przez pręt jako funkcji czasu kontaktu przedstawiono na rys. 7. Czas kontaktu jest wprost proporcjonalny do długości pręta, a długość pręta przy danej masie jest tym większa, im mniejsza jest jego gęstość. Wzrost modułu Younga jak wiadomo zmniejsza czas kontaktu. Można zatem na podstawie wykresu 7 sądzić, że pręty o mniejszych gęstościach i modułach Younga przy danej masie przekazują więcej energii mechanicznej belce. Wnioskuje się stąd, że prędkość belki maleje wolniej w II fazie ruchu przy uderzeniu prętami o mniejszej gęstości i module Younga (z zachowaniem stałej masy), ponieważ energia drgań swobodnych jest w tym przypadku większa. Analogicznie tłumaczy się duże amplitudy momentu gnącego w II fazie ruchu.

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że nie jest obojętne, czy w belkę uderza pręt stalowy, miedziany, aluminiowy czy też inny, mimo iż masa wszystkich prętów może być taka sama. Traktowanie więc uderzających obiektów jako masy bezwymiarowe, z pominięciem zjawisk falowych, może niejednokrotnie prowadzić do wyników fizycznie niepoprawnych.



Rys. 7

Na zakończenie podamy praktyczne wskazówki związane z projektowaniem belek podlegających obciążeniom dynamicznym.

Z rys. 4a i 4b wynika, że w pewnej chwili t_1 moment osiąga wartość maksymalną

$$\frac{M_{\max} r}{E_b I_b V_{01}} = \xi_{\max},$$

gdzie ξ_{\max} jest największą wartością odczytaną z wykresu. Oznaczając przez $\varepsilon_{\max} = M_{\max} y / E_b I_b$ odkształcenie włókna podlegającego największemu wyężeniu (przy czym y oznacza odległość tego włókna od osi obojętnej) możemy napisać,

$$\varepsilon_{\max} = \xi_{\max} \frac{V_0}{c_1} \frac{y}{r} \leq \varepsilon_{\text{dop}}.$$

Z powyższego warunku wynika praktyczna wskazówka sugerująca przyjęcie takiego kształtu belki, żeby y/r osiągało wartość najmniejszą. Ponadto z rys. 5a i 5b mamy

$$T = k G_b A_b \frac{V_0}{c_1} \eta_{\max},$$

gdzie η_{\max} jest największą wartością odczytaną z wykresu. Wynika stąd, że przy danym materiale i przekroju belki należy jej nadać taki kształt, żeby tzw. współ-

czynnik ścinania k osiągał wartość najmniejszą. Współczynnik ten może znacznie zmniejszyć wartość siły tnącej w danym przekroju. W konkretnych przypadkach należy optymalizować dane wynikające ze zginania i ścinania belki.

DODATEK

Rzeczywiste rozwiązania rozważanego problemu dla belki w przypadku uderzenia jej prętem sprężystym są następujące:

$$(D.1) \quad V_1(x_1, t_1) = 0, \quad \frac{M(x_1, t_1)r}{E_b I_b} = 0, \quad \frac{T(x_1, t_1)}{k A_b G_b} = 0$$

dla $0 < t_1 < x$ i $t_1 \leq t_{1k}$;

$$(D.2) \quad V_1(x_1, t_1) = -\frac{V_{01}}{2} + V_{01} \int_0^a \frac{\Phi_2 \mu_3 \delta_3 + \Phi_3 \mu_3 \delta_3}{\pi \Phi_3 g(\rho)} d\rho +$$

$$+ 2V_{01} \int_0^b \frac{P(P\kappa_1 + Q\kappa_2)}{\pi \rho(P^2 + Q^2)} d\rho,$$

$$\frac{M(x_1, t_1)r}{E_b I_b} = -V_{01} \int_0^a \frac{\Phi_2 \mu_1 + \Phi_3 \mu_4}{\pi \gamma \Phi_3 g(\rho)} d\rho + 2V_{01} \int_0^b \frac{\Phi_4 \rho(Q\kappa_3 - P\kappa_4)}{\pi \gamma(P^2 + Q^2)} d\rho,$$

$$\frac{T(x_1, t_1)}{k A_b G_b} = -V_{01} \int_0^a \frac{\rho(\rho \mu_2 + \sqrt{a^2 - \rho^2} \mu_3)}{B a \pi \Phi_3 g(\rho)} d\rho +$$

$$+ 2V_{01} \int_0^b \frac{(\sqrt{a^2 + \rho^2} - \rho) \rho^2 (P\kappa_2 - Q\kappa_1)}{\pi a(P^2 + Q^2)} d\rho$$

dla $x_1 < t_1 < \sqrt{\gamma} x_1$ i $t_1 \leq t_{1k}$;

$$(D.3) \quad V_1(x_1, t_1) = -V_{01} + 2V_{01} \int_0^b \frac{P[P\kappa_1 + Q\kappa_2 - R \cos(\rho t_1 - \Phi_5 x_1)]}{\pi \rho(P^2 + Q^2)} d\rho,$$

$$\frac{M(x_1, t_1)r}{E_b I_b} = 2V_{01} \int_0^b \frac{\rho[\Phi_4(Q\kappa_3 - P\kappa_4) + \Phi_5 P \sin(\rho t_1 - \Phi_5 x_1)]}{\pi \gamma(P^2 + Q^2)} d\rho,$$

$$\frac{T(x_1, t_1)}{k A_b G_b} = 2V_{01} \int_0^b \times$$

$$\times \frac{\rho^2 [(\sqrt{a^2 + \rho^2} - \rho)(P\kappa_2 - Q\kappa_1) + (\sqrt{a^2 + \rho^2} + \rho)P \cos(\rho t_1 - \Phi_5 x_1)]}{\pi a(P^2 + Q^2)} d\rho$$

dla $\sqrt{\gamma} x_1 < t_1$ i $t_1 \leq t_{1k}$;

$$\begin{aligned}
 V_1(x_1, t_1) = & V_{01} \int_0^a [\pi \rho \Phi_3 f(\rho)]^{-1} [\Phi_2 \delta_2 (\varepsilon_1 \delta_3 \mu_2 + \varepsilon_2 \delta_1 \mu_3) + \\
 & + \Phi_3 \delta_3 (\delta_3 \varepsilon_1 \mu_3 + \varepsilon_2 \delta_1 \mu_4) + \frac{1}{2} \rho t_{1k} \varepsilon_1 \delta_1 (\delta_2 \Phi_2 \mu_2 + \delta_3 \Phi_3 \mu_3)] d\rho + \\
 & + 2V_{01} \int_0^b [\pi \rho F(\rho)]^{-1} P \left\{ (P^2 + R^2) (P\kappa_1 + R\kappa_2) \varepsilon_3^2 + S^2 \varepsilon_3 (P\kappa_5 + R\kappa_6) - \right. \\
 & - S \left[(P^2 + R^2) \varepsilon_3 \frac{\kappa_2 - \kappa_{12}}{\rho t_{1k}} - S^2 \frac{\kappa_2 - \kappa_6}{\rho t_{1k}} \right] + 2SP \varepsilon_3 \left[P \frac{\kappa_2 - \kappa_{12}}{\rho t_{1k}} + \right. \\
 & \left. \left. + R \frac{\kappa_1 - \kappa_5}{\rho t_{1k}} - S\kappa_5 \right] + 2SR \varepsilon_3 \rho t_{1k} \left[S \frac{\kappa_2 - \kappa_6}{\rho t_{1k}} + R \varepsilon_3 \kappa_2 \right] \right\} d\rho, \\
 \text{(D.4)} \quad \frac{M(x_1, t_1) r}{E_b I_b} = & -V_{01} \int_0^a [\pi \gamma \rho \Phi_3 f(\rho)]^{-1} [\delta_3 \varepsilon_1 (\Phi_2 \mu_1 + \Phi_3 \mu_4) + \\
 & + \delta_1 \left(\Phi_2 \frac{\mu_1 - \mu_5}{\rho t_{1k}} + \Phi_3 \frac{\mu_4 - \mu_6}{\rho t_{1k}} \right) d\rho + 2V_{01} \int_0^b [\pi \gamma F(\rho)]^{-1} \rho \Phi_4 \times \\
 & \times \left\{ (P^2 + R^2) S \frac{\kappa_3 - \kappa_{10}}{\rho t_{1k}} \varepsilon_3 + (R\kappa_3 - P\kappa_4) \varepsilon_3^2 \right\} + S^2 \left[S \frac{\kappa_3 - \kappa_7}{\rho t_{1k}} + \right. \\
 & \left. + (P\kappa_8 - R\kappa_7) \varepsilon_3 \right] + 2SR \varepsilon_3 \left(S\kappa_3 + R \frac{\kappa_3 - \kappa_7}{\rho t_{1k}} - P \frac{\kappa_4 - \kappa_8}{\rho t_{1k}} \right) \Big\} d\rho,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{T(x_1, t_1)}{kA_b G_b} = & -V_{01} \int_0^a [\pi Ba \Phi_3 f(\rho)]^{-1} \left[\delta_3 \varepsilon_1 (\rho \mu_2 + \sqrt{a^2 - \rho^2} \mu_3) + \right. \\
 & \left. + \delta_1 \left(\rho \frac{\mu_2 - \mu_8}{\rho t_{1k}} + \sqrt{a^2 - \rho^2} \frac{\mu_1 - \mu_7}{\rho t_{1k}} \right) \right] d\rho + 2V_{01} \int_0^b [\pi a F(\rho)]^{-1} \times \\
 & \times \left\{ (\sqrt{a^2 + \rho^2} - \rho) \rho^2 \right\} \left\{ (P^2 + R^2) \varepsilon_3 \left[(P\kappa_2 - R\kappa_1) \varepsilon_3 - S \frac{\kappa_1 - \kappa_9}{\rho t_{1k}} \right] + \right. \\
 & + SP \varepsilon_3 \left[2R \frac{\kappa_2 - \kappa_6}{\rho t_{1k}} - S\kappa_6 \right] - S^2 \left[S \frac{\kappa_1 - \kappa_5}{\rho t_{1k}} + 2R \varepsilon_3 \kappa_1 \right] + \\
 & \left. + SR \varepsilon_3 \left[S\kappa_5 - 2R \frac{\kappa_1 - \kappa_5}{\rho t_{1k}} \right] \right\} d\rho
 \end{aligned}$$

dla $x < t_1 < \sqrt{\gamma} x_1$ i $t_{1k} \leq t_1$;

$$\begin{aligned}
 \text{(D.5)} \quad V_1(x_1, t_1) = & 2V_{01} \int_0^b [\pi \rho F(\rho)]^{-1} P \left\{ (P^2 + R^2) (P\kappa_1 + R\kappa_2) \varepsilon_3^2 + \right. \\
 & \left. + S^2 \varepsilon_3 (P\kappa_5 + R\kappa_6) - S \left[(P^2 + R^2) \varepsilon_3 \frac{\kappa_2 - \kappa_{12}}{\rho t_{1k}} - S^2 \frac{\kappa_2 - \kappa_6}{\rho t_{1k}} + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$(D.5) \quad \left. \begin{aligned} & + 2SP\varepsilon_3 \left(P \frac{\kappa_2 - \kappa_{12}}{\rho t_{1k}} + R \frac{\kappa_1 - \kappa_5}{\rho t_{1k}} - S\kappa_5 \right) + 2SR\varepsilon_3 \rho t_{1k} \left[S \frac{\kappa_2 - \kappa_6}{\rho t_{1k}} + R\varepsilon_3 \kappa_2 \right] - \\ & - R(P^2 + R^2)\varepsilon_3^2 \cos(\rho t_1 - \Phi_5 x_1) - RS^2\varepsilon_3 \cos[\rho(t_1 - t_{1k}) - \Phi_5 x_1] + \\ & + 2SR\varepsilon_3 \frac{\cos(\rho t_1 - \Phi_5 x_1) - \cos[\rho(t_1 - t_{1k}) - \Phi_5 x_1]}{\rho t_{1k}} \end{aligned} \right\} d\rho,$$

$$\begin{aligned} \frac{M(x_1, t_1)r}{E_b I_b} = & 2V_{01} \int_0^b [\pi\gamma F(\rho)]^{-1} \left\{ \rho\Phi_4 \left\{ (P^2 + R^2) \left[S\varepsilon_3 \frac{\kappa_3 - \kappa_{10}}{\rho t_{1k}} + \right. \right. \right. \\ & + (R\kappa_3 - P\kappa_4)\varepsilon_3^2 + S^2 \left[S \frac{\kappa_3 - \kappa_7}{\rho t_{1k}} + (P\kappa_8 - R\kappa_7)\varepsilon_3 \right] + 2SR\varepsilon_3 (S\kappa_3 + \\ & + R \frac{\kappa_3 - \kappa_7}{\rho t_{1k}} - P \frac{\kappa_4 - \kappa_8}{\rho t_{1k}}) \left. \left. \left. \right\} + \rho\Phi_5 P \left\{ (P^2 + R^2)\varepsilon_3^2 \sin(\rho t_1 - \Phi_5 x_1) - \right. \right. \right. \\ & - S^2\varepsilon_3 \sin[\rho(t_1 - t_{1k}) - \Phi_5 x_1] + \\ & \left. \left. \left. + 2SR\varepsilon_3 \frac{\sin(\rho t_1 - \Phi_5 x_1) - \sin[\rho(t_1 - t_{1k}) - \Phi_5 x_1]}{\rho t_{1k}} \right\} \right\} d\rho, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{T(x_1, t_1)}{kA_b G_b} = & 2V_{01} \int_0^b [\pi a F(\rho)]^{-1} \left\{ (\sqrt{a^2 + \rho^2} - \rho) \rho^2 \left\{ (P^2 + R^2)\varepsilon_3 \times \right. \right. \\ & \times \left[(P\kappa_2 - R\kappa_1)\varepsilon_3 - S \frac{\kappa_1 - \kappa_9}{\rho t_{1k}} \right] + SP\varepsilon_3 \left(2R \frac{\kappa_3 - \kappa_6}{\rho t_{1k}} - S\kappa_6 \right) - \\ & - S^2 \left(S \frac{\kappa_1 - \kappa_5}{\rho t_{1k}} + 2R\varepsilon_3 \kappa_1 \right) + SR\varepsilon_3 \left(S\kappa_5 - 2R \frac{\kappa_1 - \kappa_5}{\rho t_{1k}} \right) \left. \right\} + \\ & + (\sqrt{a^2 + \rho^2} + \rho) \rho^2 P \left\{ (P^2 + R^2)\varepsilon_3^2 \cos(\rho t_1 - \Phi_5 x_1) - \right. \\ & - S^2\varepsilon_3 \cos[\rho(t_1 - t_{1k}) - \Phi_5 x_1] + \\ & \left. \left. + 2SR\varepsilon_3 \frac{\cos(\rho t_1 - \Phi_5 x_1) - \cos[\rho(t_1 - t_{1k}) - \Phi_5 x_1]}{\rho t_{1k}} \right\} \right\} d\rho \end{aligned}$$

dla $\sqrt{\gamma} x_1 < t$ i $t_{1k} \leq t$.

Te same wielkości w przypadku uderzenia belki prętem sztywnym przyjmują postać:

$$(D.6) \quad V_1(x_1, t_1) = 0, \quad \frac{M(x_1, t_1)r}{E_b I_b} = 0, \quad \frac{T(x_1, t_1)}{kA_b G_b} = 0 \quad \text{dla } t_1 < x_1;$$

$$(D.7) \quad V_1(x_1, t_1) = V_{01} \int_0^a \frac{\Phi_2(\delta_3 \delta_2 \mu_2 - \delta_3 \delta_1 \mu_1) + \Phi_3(\delta_3^2 \mu_3 - \delta_1 \delta_3 \mu_4)}{\pi \rho \Phi_3(\delta_3^2 - \delta_1^2)} d\rho +$$

$$\begin{aligned}
 \text{(D.7)} \quad & + 2V_{01} \int_0^b P \{ (P^2 + R^2 + S^2) (P\kappa_1 + R\kappa_2 - S\kappa_3) + \\
 & \qquad \qquad \qquad + 2SP(R\kappa_4 + P\kappa_3 - S\kappa_1) \} [\pi\rho h(\rho)]^{-1} d\rho, \\
 \frac{M(x_1, t_1)r}{E_b I_b} = & V_{01} \int_0^a \frac{\delta_1(\Phi_2 \mu_2 + \Phi_3 \mu_3) - \delta_3(\Phi_2 \mu_1 + \Phi_3 \mu_4)}{\pi\gamma\rho\Phi_3(\delta_3^2 - \delta_1^2)} d\rho + \\
 & + 2V_{01} \int_0^b \rho\Phi_4 [(P^2 + R^2 + S^2)(-P\kappa_4 + R\kappa_3 + S\kappa_2) + \\
 & \qquad \qquad \qquad + 2SP(-P\kappa_3 + R\kappa_1 + S\kappa_4)] [\pi\gamma h(\rho)]^{-1} d\rho, \\
 \frac{T(x_1, t_1)}{kA_b G_b} = & -V_{01} \int_0^a \frac{\delta_3(\rho\mu_2 + \sqrt{a^2 - \rho^2} \mu_3) - \delta_1(\rho\mu_1 + \sqrt{a^2 - \rho^2} \mu_4)}{\pi B a \Phi_3 (\delta_3^2 - \delta_1^2)} d\rho + \\
 & + 2V_{01} \int_0^b \frac{(\sqrt{a^2 + \rho^2} - \rho)\rho^2 [(P^2 + R^2 + S^2)(P\kappa_2 - R\kappa_1 - S\kappa_4) + \\
 & \qquad \qquad \qquad + 2SP(P\kappa_4 - S\kappa_2 - R\kappa_3)] [\pi a h(\rho)]^{-1} d\rho \\
 & \text{dla } x < t_1 < \sqrt{\gamma} x_1;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_1(x_1, t_1) = & 2V_{01} \int_0^b [\pi\rho h(\rho)]^{-1} P [(P^2 + R^2 + S^2) (P\kappa_1 + R\kappa_3 - S\kappa_3) + \\
 & \qquad \qquad \qquad + 2SP(R\kappa_4 + P\kappa_3 - S\kappa_1) - R(P^2 + R^2 - S^2) \cos(\rho t_1 - \Phi_5 x_1) + \\
 & \qquad \qquad \qquad + 2SR^2 \sin(\rho t_1 - \Phi_5 x_1),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(D.8)} \quad \frac{M(x_1, t_1)r}{E_b I_b} = & 2V_{01} \int_0^b [\pi\gamma h(\rho)]^{-1} \rho\Phi_4 [(P^2 + R^2 + S^2) (-P\kappa_4 + R\kappa_3 + \\
 & \qquad \qquad \qquad + S\kappa_2) + 2SP(-P\kappa_2 + R\kappa_1 + S\kappa_4)] + \rho\Phi_5 P [(P^2 + R^2 - S^2) \sin(\rho t_1 - \Phi_5 x_1) + \\
 & \qquad \qquad \qquad + 2SR \cos(\rho t_1 - \Phi_5 x_1)] \} d\rho,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{T(x_1, t_1)}{kA_b G_b} = & 2V_{01} \int_0^b [\pi a h(\rho)]^{-1} \{ (\sqrt{a^2 + \rho^2} - \rho)\rho^2 [(P^2 + R^2 + S^2) \times \\
 & \qquad \qquad \times (P\kappa_2 - R\kappa_1 - S\kappa_4) + 2SP(P\kappa_4 - S\kappa_2 - R\kappa_3)] + (\sqrt{a^2 + \rho^2} + \rho) \times \\
 & \qquad \qquad \times \rho^2 P [(P^2 + R^2 - S^2) \cos(\rho t_1 - \Phi_5 x_1) - 2SR \sin(\rho t_1 - \Phi_5 x_1)] \} d\rho.
 \end{aligned}$$

dla $\sqrt{\gamma} x_1 < t_1$,

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 \kappa_1 &= \sin \rho t_1 \operatorname{sh}(\Phi_4 x_1), & \mu_1 &= \cos B \Phi_3 x_1 \operatorname{sh}(\rho t_1 - B \Phi_2 x_1), \\
 \kappa_2 &= \cos \rho t_1 \operatorname{ch}(\Phi_4 x_1), & \mu_2 &= \cos B \Phi_3 x_1 \operatorname{ch}(\rho t_1 - B \Phi_2 x_1), \\
 \kappa_3 &= \sin \rho t_1 \operatorname{ch}(\Phi_4 x_1), & \mu_3 &= \sin B \Phi_3 x_1 \operatorname{sh}(\rho t_1 - B \Phi_2 x_1),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_4 &= \cos \rho t_1 \operatorname{sh}(\Phi_4 x_1), & \mu_4 &= \sin B \Phi_3 x_1 \operatorname{ch}(\rho t_1 - B \Phi_2 x_1), \\ \kappa_5 &= \sin \rho (t_1 - t_{1k}) \operatorname{sh}(\Phi_4 x_1), & \mu_5 &= \cos B \Phi_3 x_1 \operatorname{sh}[\rho (t_1 - t_{1k}) - B \Phi_2 x_1], \\ \kappa_6 &= \cos \rho (t_1 - t_{1k}) \operatorname{ch}(\Phi_4 x_1), & \mu_6 &= \sin B \Phi_3 x_1 \operatorname{ch}[\rho (t_1 - t_{1k}) - B \Phi_2 x_1], \\ \kappa_7 &= \sin \rho (t_1 - t_{1k}) \operatorname{ch}(\Phi_4 x_1), & \mu_7 &= \sin B \Phi_3 x_1 \operatorname{sh}[\rho (t_1 - t_{1k}) - B \Phi_2 x_1], \\ \kappa_8 &= \cos \rho (t_1 - t_{1k}) \operatorname{sh}(\Phi_4 x_1), & \mu_8 &= \cos B \Phi_3 x_1 \operatorname{ch}[\rho (t_1 - t_{1k}) - B \Phi_2 x_1], \\ \kappa_9 &= \sin \rho (t_1 + t_{1k}) \operatorname{sh}(\Phi_4 x_1), & \varepsilon_1 &= 2 [1 - \operatorname{ch}(\rho t_{1k})]/(\rho t_{1k})^2, \\ \kappa_{10} &= \sin \rho (t_1 + t_{1k}) \operatorname{ch}(\Phi_4 x_1), & \varepsilon_2 &= \operatorname{sh}(\rho t_{1k})/\rho t_{1k}, \\ \kappa_{11} &= \cos \rho (t_1 + t_{1k}) \operatorname{sh}(\Phi_4 x_1), & \varepsilon_3 &= 2 (1 - \cos \rho t_{1k})/(\rho t_{1k})^2, \\ \kappa_{12} &= \cos \rho (t_1 + t_{1k}) \operatorname{ch}(\Phi_4 x_1), & \varepsilon_4 &= \sin \rho t_{1k}/\rho t_{1k}; \end{aligned}$$

$$P = \Phi_4 \rho \left(\Phi_5^2 \frac{1}{\gamma} - \rho^2 \right), \quad \delta_1 = 2B\Phi_2/\rho\gamma H,$$

$$Q = S \rho t_{1k} + R, \quad \delta_2 = \rho - B^2 r^*/\gamma,$$

$$R = \Phi_5 \rho \left(\Phi_4^2 \frac{1}{\gamma} + \rho^2 \right), \quad \delta_3 = \rho + B^2 r^*/\gamma,$$

$$S = \rho (\Phi_4^2 + \Phi_5^2)/H\gamma, \quad r^* = [\rho^2 + N^2 (a^2 - \rho^2)]^{\frac{1}{2}},$$

$$\Phi_2 = \rho (\rho + r^* \delta)/2]^{\frac{1}{2}}, \quad g(\rho) = \rho (\delta_1 \rho t_{1k} + \delta_3),$$

$$\Phi_3 = [\rho (r^* - \rho)/2]^{\frac{1}{2}}, \quad f(\rho) = \delta_1^2 + \varepsilon_1 \delta_3 (\delta_3 + \rho t_{1k} \delta_1),$$

$$\Phi_4 = B \rho^{\frac{1}{2}} [N(\rho^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} - \rho]^{\frac{1}{2}}, \quad h(\rho) = [R^2 + (S - P)^2] [R^2 + (S + P)^2],$$

$$\Phi_5 = B \rho^{\frac{1}{2}} [N(\rho^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} + \rho]^{\frac{1}{2}},$$

$$F(\rho) = [R^2 \varepsilon_3 + SR \rho t_{1k} + S^2]^2 + \varepsilon_3 P^2 [(P^2 + 2R^2) \varepsilon_3 - 2S^2 \cos \rho t_{1k} + 2\varepsilon_3 SR \rho t_{1k}].$$

Równania $t_1 = \pm x_1$ są równaniami charakterystyk w płaszczyźnie x_1, t_1 dla równań Timoshenki.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. A. DENGLER, M. GOLAND, *Transverse impact of long beams, rotary inertia and shear effects*, Proc. 1-st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., Asme, 1951.
2. M. GOLAND, P. D. WICKERSHAM, M. A. DENGLER, *Propagation of elastic impact in beams in bending*, J. Appl. Mech., **22**, Trans. Asme, **77**, 1 - 7, 1955.
3. W. GOLDSMITH, *Impact*, E. Arnold, London 1961.
4. B. A. BOLEY, *An approximate theory of lateral impact on beams*, J. Appl. Mech., **22**, Trans. Asme, **77**, 69 - 76, 1955.
5. K. WILMAŃSKI, *Obciążenia dynamiczne belek. Belka Timoshenki*, Mech. Teoret. i Stos., **2**, 2, PWN, Warszawa 1964.
6. S. RANGANATH, *Normal impact an infinite elastic beam by a semi-infinite elastic rod*, J. Appl. Mech. Trans. Asme, 455 - 460, 1971.

7. R. J. CLIFTON, S. RANGANATH, *Normal impact of an infinite elastic-plastic beam by a semi-infinite elastic rod*, Brown University, Technical Report AFML-TR-71-105, 1971.
8. B. A. BOLEY, C. C. CHAO, *Some solutions of the Timoshenko beam equations*, J. Appl. Mech., **22**, Trans. Asme, **77**, 579 - 586, 1955.
9. S. KALISKI i inni, *Drgania i fale*, PWN, Warszawa 1966.
10. W. T. THOMSON, *Laplace transformation*, Prentice-Hall, INC, 1960.

Резюме

**БЕСКОНЕЧНАЯ УПРУГАЯ БАЛКА ТИМОШЕНКИ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ УДАРЕ
КОНЕЧНЫМ УПРУГИМ СТЕРЖНЕМ**

В работе определены время контакта, контактные силы и механическая энергия передаваемая балке стержнем во время контакта, а также проведен анализ свободных колебаний балки после отпадения стержня. Доказано, что рост скорости изгиба изгибающего момента и сдвигающей силы больше в первой фазе движения при ударах стержнями с большими плотностями и модулями Юнга, во второй же фазе движения скорость балки и сдвигающая сила убывают медленнее, а изгибающий момент достигает больших амплитуд при ударах стержнями с меньшей плотностью и модулями Юнга, при сохранении этой же самой массы.

SUMMARY

**AN INFINITE ELASTIC TIMOSHENKO BEAM STRUCK TRANSVERSALLY
BY A FINITE ELASTIC ROD**

The author calculates the duration of impact, contact forces and the mechanical energy transmitted from the rod to the beam; analysis of free vibrations of the beam after the rod is rebounded is also presented. It is shown that the increase of bending rate, bending moment and shear forces during the first phase of impact is greater in the case of rods of larger densities and Young moduli. In the second phase of motion, however, the beam velocity and shearing forces decrease less rapidly, and the bending moments exhibit larger amplitudes in the case of rods of smaller densities and Young moduli (their mass being kept constant).

POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 kwietnia 1973 r.