

## WPLYW LINIOWO-SPRĘŻYSTEGO ODCIĄŻENIA NA DYNAMIKĘ OBIEKTU UMIESZCZONEGO W SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM GRUNCIE

ZDZISŁAW ŁĘGOWSKI i EDWARD WŁODARCZYK (WARSZAWA)

### 1. WSTĘP

W pracy [1] podano analityczne rozwiązanie problemu oddziaływania sprężysto-plastycznych fal naprężenia na nieściśliwą płaską przegrodę, spoczywającą na liniowo-sprężystej półprzestrzeni i przykrytą warstwą gruntu o grubości  $h$ . Grunt w warstwie aproksymowano modelem z liniową gałęzią obciążenia i sztywnym odcieżeniem. Płyta w takim ujęciu modeluje obiekt umieszczony w sprężysto-plastycznym gruncie, w którym pominięto odkształcalność elementów konstrukcyjnych obiektu i efekty brzegowe, powstające przy działaniu na niego fal naprężenia.

W niniejszej pracy rozpatrzmy analogiczny problem uwzględniając liniowo-sprężyste odcieżenie w wierzchniej warstwie gruntu. Zbadamy dokładnie wpływ liniowo-sprężystego odcieżenia zachodzącego w warstwie na parametry ruchu płyty (obektu) i na tej podstawie ustalimy warunki, przy których można posługiwać się uproszczonymi wzorami inżynierskimi podanymi w pracy [1].

Po sformułowaniu problemu (p. 2) konstruujemy jego ogólne analityczne rozwiązanie (p. 3). Następnie, korzystając z rozwiązania ogólnego, dokonujemy aproksymacji warunku granicznego przed frontem odbitej fali plastycznej (p. 4) i dla tak uproszczonego zagadnienia przeprowadzamy szczegółową analizę numeryczną wpływu fizyko-mechanicznych własności warstwy i ośrodka sprężystego na parametry ruchu i obciążenia dynamiczne płyty (obektu) (p. 5). Analizę kończymy konkretnymi wnioskami dotyczącymi zastosowań.

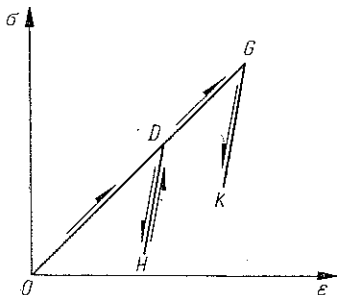
### 2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozpatrzmy proces oddziaływania sprężysto-plastycznej fali odcieżenia na masywną płytę o masie jednostkowej  $m$  (na jednostkę powierzchni), spoczywającą na liniowo-sprężystej półprzestrzeni (całkowicie uwodniony grunt) i przykrytą warstwą gruntu suchego o grubości  $h$ . Grunt w warstwie aproksymujemy plastycznym ośrodkiem z liniową gałęzią obciążenia i liniowo-sprężystym odcieżeniem (rys. 1). W zakresie średnich technicznie ciśnień ( $10 - 20 \text{ kG/cm}^2$ ) jest to dobre przybliżenie fizyko-mechanicznych własności gruntów piaszczysto-gliniastych [2, 3].

Falę naprężeń generuje równomiernie rozłożone na powierzchni warstwy ciśnienie  $p(t)$ , przyłożone w sposób nagły i następnie malejące do zera wg następującej funkcji:

$$(2.1) \quad p(t) = \begin{cases} p_m \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n, & \text{jeśli } 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \text{jeśli } t \geq \tau. \end{cases}$$

Impedancję warstwy oznaczymy przez  $\rho_1 a_1$  i  $\rho_1 a_2$  odpowiednio w strefie obciążenia i odciążenia, natomiast dla ośrodka pod płytą przyjmiemy oznaczenie  $\rho_2 a_3$ .



Rys. 1

W podanych wyżej warunkach w warstwie i półprzestrzeni wytworzy się jednoosiowy stan odkształcenia — problem jest przestrzennie jedno-wymiarowy. Rozważania prowadzić będziemy w współrzędnych Lagrange'a  $(x, t)$ , przy czym oś  $x$  skierujemy włąb ośrodka, a jej początek umieścimy na swobodnej powierzchni warstwy.

Tak sformułowany problem jednoznacznie opisują następujące równania, związki fizyczne i warunki graniczne.

Równania wynikające z zasad zachowania masy i impulsu:

a) na frontach fal silnych nieciągłości

$$(2.2) \quad \begin{aligned} [v] &= -\varphi'(t) [\varepsilon], \\ [\sigma] &= -\rho_1 \varphi'(t) [v]; \end{aligned}$$

b) w poszczególnych obszarach płaszczyzny  $x, t$

$$(2.3) \quad \begin{aligned} v_{,x} &= \frac{1}{\rho_k a_i^2} \sigma_{,t}, \\ \rho_k v_{,t} &= \sigma_{,x}, \quad k=1, 2; \quad i=1, 2, 3, \end{aligned}$$

gdzie wyrażenie  $[A]$  oznacza skok wielkości  $A$  na froncie fali silnej nieciągłości, natomiast  $\varphi(t)$  jest postacią frontu fali silnej nieciągłości.

Układ równań różniczkowych (2.3) można zastąpić równoważnymi związkami wzdłuż jego charakterystyk, mianowicie:

$$(2.4) \quad v = \pm \frac{1}{\rho_k a_i} \sigma + C^\pm, \quad \text{jeśli } x = \pm a_i t + c^\pm.$$

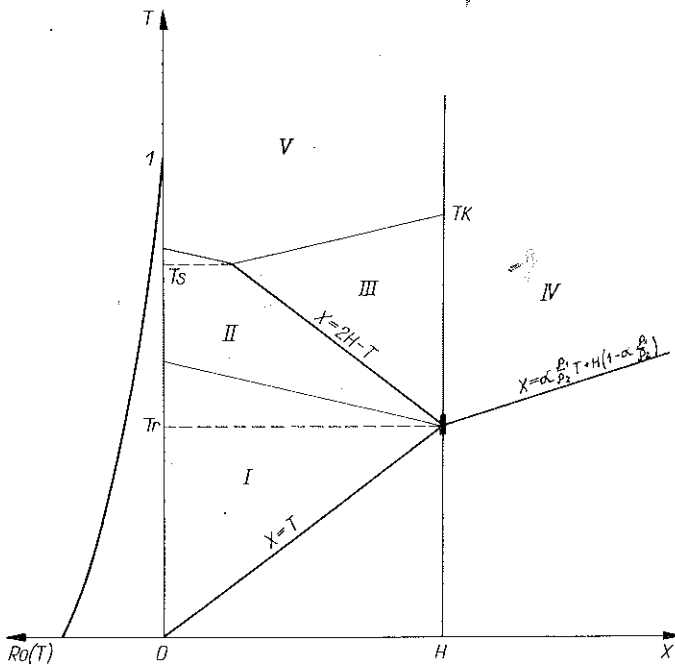
Związki fizyczne i warunki graniczne będziemy precyzowali w trakcie rozwiązywania zagadnień w poszczególnych obszarach.

3. ANALITYCZNE ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Falowy obraz rozwiązania sformułowanego wyżej problemu pokazujemy na rysunkach 2 i 3. Dla ułatwienia dalszych rozważań wprowadzimy następujące wielkości bezwymiarowe:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} T &= \frac{t}{\tau}, & X &= \frac{x}{a_1 \tau}, & H &= \frac{h}{a_1 \tau}, & \alpha &= \frac{\rho_2 a_3}{\rho_1 a_1}, & M &= \frac{m}{\rho_1 a_1 \tau}, \\ P &= \frac{\sigma}{p_m}, & R_0 &= \frac{p(T)}{p_m}, & R_1 &= \frac{r_1}{p_m}, & R_2 &= \frac{r_2}{p_m}, \\ V &= \frac{\rho_1 a_1}{p_m v}, & E &= \frac{\rho_1 a_1^2}{p_m} \varepsilon, & U &= \frac{\rho_1 a_1}{p_m \tau} u. \end{aligned}$$

Przy indeksowym oznaczaniu zmiennych zależnych przyjmijmy zasadę, w myśl której wartość indeksu dolnego będzie odpowiadać numerowi danego obszaru na płaszczyźnie  $X, T$ . Ponadto wartości tych zmiennych na frontach fal oznaczać



Rys. 2

będziemy podwójnym indeksem składającym się ze znaku 0 i cyfry odpowiadającej numerowi obszaru przyległego do danego frontu fali.

Analityczne rozwiązanie problemu w poszczególnych obszarach płaszczyzny  $X, T$  kształtuje się następująco.

## Obszar I

Z założeń podanych w p. 2 wynika, że na froncie fali odciążenia  $X=T$  występuje silna nieciągłość funkcji  $P$ ,  $V$  i  $E$  generowana przez nieciągły warunek brzegowy (2.1). Prawa zachowania (2.2) przepiszemy teraz w postaci

$$(3.2) \quad P_{01}(X) = -V_{01}(X), \quad V_{01}(X) = -E_{01}(X),$$

a związek fizyczny przyjmuje postać

$$(3.3) \quad P_1(X, T) = \mu^2 E_1(X, T) + (1 - \mu^2) E_{01}(X),$$

gdzie współczynnik odciążenia  $\mu = a_2/a_1$ .

Zgodnie z (2.3) i (3.3) ruch ośrodka w obszarze I opisuje równanie

$$(3.4) \quad U_{1,TT} - \mu^2 U_{1,XX} = -(\mu^2 - 1) E'_{01}(X),$$

które uzupełniamy warunkami granicznymi na froncie fali odciążenia  $T=X$  i na powierzchni warstwy ( $X=0$ ):

$$(3.5) \quad U_{1,X}(X, T)|_{X=0} = E_1(0, T) = \frac{1}{\mu^2} [(\mu^2 - 1) P_{01}(0) - R_0(T)],$$

$$(3.6) \quad U_{1,T}(X, T)|_{T=X} = V_{01}(X) = -E_{01}(X),$$

$$(3.7) \quad U_{1,X}(X, T)|_{T=X} = E_{01}(X).$$

Ze zgodności warunków (3.5) i (3.7) w punkcie ( $X=0, T=0$ ) otrzymujemy

$$(3.8) \quad P_{01}(0) = -R_0(0) = -1.$$

Rozwiązanie ogólne równania (3.4) zapiszemy w postaci

$$(3.9) \quad U_1(X, T) = \Phi(\mu T - X) + \Psi(\mu T + X) + \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} \int_0^X E_{01}(\xi) d\xi.$$

Mając wyznaczone wielkości na froncie fali padającej, łatwo znaleźć ich wartości w całym obszarze, dlatego ograniczymy się tu do podania wzorów na funkcje  $E_{01}(X)$ ,  $P_{01}(X)$  i  $V_{01}(X)$ .

Wprowadzając (3.9) kolejno do (3.5), (3.6) i (3.7) po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy równanie na poszukiwaną funkcję  $E_{01}(X)$ :

$$(3.10) \quad R_0(X) = \frac{1}{2} \left[ (\mu - 1) E_{01} \left( \frac{\mu}{\mu + 1} X \right) - (\mu + 1) E_{01} \left( \frac{\mu}{\mu - 1} X \right) \right],$$

a stąd

$$(3.11) \quad E_{01}(X) = P_{01}(X) = -V_{01}(X) = - \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n}{k} (-1)^k (\mu^2 - 1)^k}{[(\mu + 1)^{k+1} - (\mu - 1)^{k+1}] \mu^k} X^k \right].$$

## Obszar II

Propagująca się w warstwie sprężysto-plastycznej fala odciążenia na głębokości  $H$  napotyka masywną przegrodę i ulega odbiciu.

Proces odkształcenia gruntu w warstwie położonej pod płytą (zgodnie z rys. 1) zachodzi na wykresie  $\sigma - \sigma(\varepsilon)$  wg programu ODHDGK. W związku z tym w każdym punkcie ośrodka, do którego dochodzi fala odbita, naprężenie rośnie w sposób ciągły do wartości osiągniętej na froncie fali padającej, a następnie skokowo zmienia się do wartości niesionej przez falę odbitą. Stąd

$$(3.12) \quad P_{02}(X) = P_{01}(X).$$

Dla uproszczenia zapisu wprowadzimy układ przesunięty do punktu odbicia, tj

$$(3.13) \quad T_1 = T - H, \quad X_1 = X - H$$

z tym zastrzeżeniem, że indeks 1 przy nowych zmiennych będziemy opuszczali.

Wprowadzając (3.11) do (3.12) po wykorzystaniu (3.13) otrzymamy

$$(3.14) \quad P_{02}(T) = E_{02}(T) = - \left[ 1 + \sum_{k=1}^n (F_k T^k + F_{0k}) \right],$$

gdzie wprowadzono oznaczenia:

$$(3.15) \quad F_k = \frac{2}{\mu + 1} (-1)^k (\mu A)^k \sum_{i=0}^{n-k} Q_{k+i}^1 (-1)^{k+i} \binom{n}{k+i} \binom{k+i}{k} H^i (\mu - 1)^i,$$

$$(3.16) \quad F_{0k} = \frac{2}{\mu + 1} Q_k^1 (-1)^k \binom{n}{k} (\mu - 1)^k H^k,$$

$$(3.17) \quad A = \frac{\mu - 1}{\mu + 1}, \quad Q_k^1 = [(1 - A^{k+1}) \mu^k]^{-1}.$$

W wyniku sprężystego odciażenia obszar II (rys. 2) dzielony jest za pomocą dodatnich i ujemnych charakterystyk na podobszary (rys. 3). Wykorzystując związki wzdłuż charakterystyk (2.4) oraz warunki brzegowe (2.1) i (3.14) otrzymujemy następujące wzory na prędkość przemieszczania się cząstek:

$$(3.18) \quad V_{02}(T) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu} (W_k^r T^k + W_{0k}^r), \quad r = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie

$$(3.19) \quad T = \frac{\mu + 1}{\mu} T'.$$

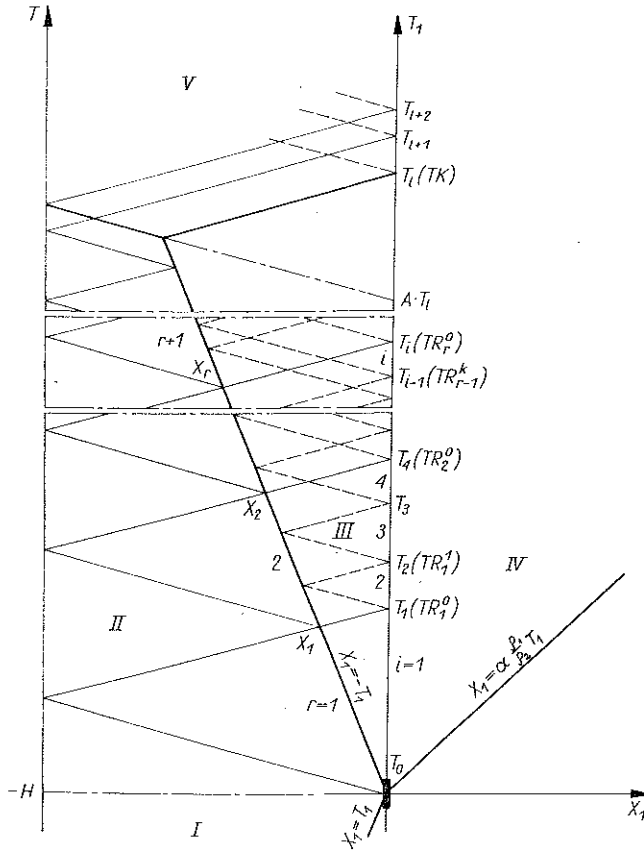
$T$  oznacza czas odmierzony na granicy ośrodków,  $T'$  — wzdłuż prostej  $X = -T$  oraz

$$(3.20) \quad W_k^1 = 2 \left[ 1 - \frac{(-1)^k}{\mu + 1} A^k \right] \mu^k \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{k+i} \binom{n}{k+i} \binom{k+i}{k} (\mu - 1)^i H^i,$$

$$(3.21) \quad W_{0k}^1 = \mu F_{0k},$$

$$(3.22) \quad W_k^r = \sum_{i=0}^{n-k} \left[ 2^i (-1)^i A^{-k-i} (W_{k+i}^{r-1} - F_{k+i}) + \right. \\ \left. + 2(-1)^{k+i} (\mu-1)^i \binom{n}{k+i} \binom{k+i}{k} \left(\frac{H}{\mu}\right)^i - F_k \right]$$

$$(3.23) \quad W_{0k}^r = \left[ 2^k (-1)^k A^{-k} (W_k^{r-1} - F_k) + 2(-1)^k (\mu-1)^k \binom{n}{k} \right] \left(\frac{H}{\mu}\right)^k + W_{0k}^{r-1} - 2F_{0k}$$



Rys. 3

Punkty końcowe kolejnych przedziałów  $r$ , przeniesione wzdłuż odpowiednich charakterystyk dodatnich na granicę ośrodków, określają zależności

$$(3.24) \quad TR_0^0 = 0, \quad TR_r^0 = \frac{2H}{\mu} + ATR_{r-1}^0, \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

### Obszary III i IV

Jak wykazano w pracy [4] za frontem fali odbitej postępuje proces odciażenia, zatem ruch ośrodka opisują równania (2.4), uzupełnione następującymi warunkami granicznymi:

wzdłuż prostej  $T = -X$ :

$$(3.25) \quad P_3(X, T)|_{T=-X} = P_{03}(X), \quad V_3(X, T)|_{T=-X} = V_{03}(X);$$

na granicy ośrodków:

$$(3.26) \quad \begin{aligned} P_3(X, T)|_{X=0} &= -R_1(T), & P_4(X, T)|_{X=0} &= -R_2(T), \\ V_3(X, T)|_{X=0} &= V_4(X, T)|_{X=0} = V_M(T), \end{aligned}$$

$$(3.27) \quad MV'_M(T) = R_1(T) - R_2(T), \quad V_M(0) = 0,$$

gdzie  $R_1$  i  $R_2$  są bezwymiarowymi współczynnikami ciśnień dynamicznych, działających na górną i dolną stronę przegrody, natomiast  $V_M$  jest bezwymiarowym współczynnikiem prędkości ruchu masy skupionej.

Oczywiście między (3.25) i (3.26) zachodzi warunek zgodności

$$(3.28) \quad V_3(0, 0) = V_4(0, 0) = V_{03}(0) = V_M(0) = 0.$$

Zauważmy jeszcze, że z praw zachowania (2.2) dla fali padającej i odbitej w chwili odbicia otrzymamy

$$(3.29) \quad P_{03}(0) = 2P_{01}(0).$$

Wykorzystując związki (2.4) wzdłuż charakterystyki dodatniej i ujemnej o wspólnym początku na fali odbitej, warunki (3.25) - (3.27) oraz zależność

$$(3.30) \quad R_2(T) = \alpha V_M(T),$$

uzyskuje się równanie różniczkowe na prędkość masy:

$$(3.31) \quad V'_M(T) + \frac{\alpha + \mu}{M} V_M(T) + A \left\{ V'_M[T - \tau(T)] + \frac{\alpha - \mu}{M} V_M[T - \tau(T)] \right\} = \\ = \frac{2\mu}{M(\mu + 1)} [V_{02}(T) - P_{02}(T)],$$

gdzie opóźnienie

$$\tau(T) = \frac{2}{\mu + 1} T.$$

Fala odbita podzielona została wcześniej na szereg odcinków  $r$ , na których funkcję  $V_{02}(T)$ , ciągłą przy przejściu z przedziału do przedziału, określają różne przepisy funkcyjne. Dlatego każdy punkt  $X_r$  generuje w III szereg podobszarów, dzieląc go wzdłuż charakterystyki dodatniej wychodzącej z punktu  $X_r$  oraz jej kolejnych odbić od granicy ośrodków i frontu fali  $X = -T$  (rys. 3).

Punkty przecięcia się tych charakterystyk z granicą ośrodków określa wzór (3.24), natomiast ich kolejne odbicia od frontu fali i przegrody oznaczamy przez  $TR_r^k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , przy czym

$$(3.24') \quad TR_r^k = A^{-k} TR_r^0.$$

Punkty  $TR_r^k$  dla  $k = 0, 1, 2, \dots$  i  $r = 0, 1, 2, 3, \dots$ , uporządkowane według wartości rosnących, oznaczamy dalej przez  $T_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  (rys. 3).

Przez odcinek  $i$ -ty wzdłuż granicy ośrodków będziemy rozumieli prawostronnie domknięty przedział  $[T_{i-1}, T_i]$ .

Równanie (3.31) spełnione jest na odcinku  $i=1$  lub  $0 < T \leq T_1 = TR_1^0$  (rys. 3). Jego rozwiązaniem będzie szereg potęgowy

$$(3.32) \quad V_M(T) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k T^k,$$

którego współczynniki określone są przez związek

$$(3.33) \quad B_1 = \frac{2}{M} \left( 1 + \sum_{k=1}^n F_{0k} \right),$$

$$(3.34) \quad B_{k+1} = \frac{2}{\mu-1} \frac{(W_k^1 + \mu F_k) - Q_k^3 B_k}{M(k+1)Q_k^2}, \quad \text{dla } k=1, 2, \dots, n$$

oraz

$$(3.35) \quad B_{k+1} = -\frac{Q_k^3}{M(k+1)Q_k^2} B_k, \quad \text{dla } k > n,$$

gdzie

$$(3.36) \quad Q_k^2 = A^{-1} + A^k, \quad Q_k^3 = (\alpha + \mu)A^{-1} + (\alpha - \mu)A^k.$$

Prędkość ruchu masywnej przegrody na dowolnym odcinku  $i > 1$  określa się ze związku rekurencyjnego:

$$(3.37) \quad V_M(T) = e^{-\frac{\mu+\alpha}{M}(T-T_{i-1})} \left\{ \frac{2(\mu^2 + \alpha)}{M(\mu-1)} \int_{AT_{i-1}}^{AT} e^{\frac{\mu+\alpha}{M}(A^{-1}\eta - T_{i-1})} V_M(\eta) d\eta - \right. \\ \left. - \frac{2\mu}{(\mu+1)M} \int_{T_{i-1}}^T e^{\frac{\mu+\alpha}{M}(\eta - T_{i-1})} [P_{02}(\eta) - V_{02}(\eta)] d\eta + V_M(AT_{i-1}) - \right. \\ \left. - e^{\frac{\mu+\alpha}{M}(T-T_{i-1})} V_M(AT) + V_M(T_{i-1}) \right\},$$

gdzie funkcję  $V_{02}(T)$  dla dowolnej wartości  $T$  zapisujemy w postaci:

$$(3.38) \quad V_{02}(T) = 1 + \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^n (W_k^i T^k + W_{0k}^i) \cdot \mathbf{1}(T - TR_{i-1}^0) \cdot \mathbf{1}(TR_i^0 - T).$$

Wartość indeksu  $r$  zależy od zmiennej  $T$  i wyznacza go warunek

$$(3.39) \quad TR_{r-1}^0 < T \leq TR_r^0.$$

Występujący tu zapis  $\mathbf{1}(x)$  oznacza funkcję Heaviside'a. Obciążenia dynamiczne przegrody określone są równaniami (3.27) i (3.30), natomiast naprężenie na froncie fali odbitej wynosi

$$(3.40) \quad P_{03}(T) = \frac{1}{\mu-1} \{ \mu [V_M(T) - V_{02}(T) + P_{02}(T)] + R_1(T) \}.$$



Warstwa gruntu nad obiektem jest ośrodkiem dysypatywnym i dlatego naprężenie na froncie fali odbitej maleje w miarę oddalania się od granicy z półprzestrzenią sprężystą — nieciągłość funkcji  $P$ ,  $V$  i  $E$  stopniowo zanika. W chwili  $T=TK$  nieciągłość ta zanika zupełnie i punkt ten nazywamy umownie końcem fali odbitej.

Wyznaczamy go z warunku

$$(3.41) \quad P_{03}(TK) = P_{02}(TK).$$

Obszar V

Zakładamy, że punkt  $TK$  znajduje się w przedziale  $i=l$  lub inaczej  $TK \in (T_{l-1}, T_l]$ . W dalszym ciągu wartość  $TK$  oznaczamy przez  $T_l$ .

Postępując podobnie jak wyżej otrzymamy:

$$(3.42) \quad V_M(T) = e^{-\frac{\mu+\alpha}{M}(T-T_{l+j-1})} \left[ \frac{2}{M} \int_{T_{l+j-1}}^T e^{\frac{\mu+\alpha}{M}(\eta-T_{l+j-1})} R_0(\eta) d\eta + \right. \\ \left. + G(T) + V_M(T_{l+j-1}) \right], \quad j=1, 2, 3, \dots$$

Funkcja  $G(T)$  na odcinkach  $j=1, 2$  ( $l+1, l+2$ ) ma postać

$$(3.43) \quad G(T) = AM^{-1} \int_{A^{-1}(T_{l+j-1} - \frac{2H}{\mu})}^{A^{-1}(T - \frac{2H}{\mu})} e^{\frac{\mu+\alpha}{M}(A\eta + \frac{2H}{\mu} - T_{l+j-1})} [P_{02}(\eta) + \mu V_{02}(\eta)] d\eta,$$

dla pozostałych  $j > 2$

$$(3.44) \quad G(T) = \frac{2\mu}{M} \int_{T_{l+j-1} - \frac{2H}{\mu}}^{T - \frac{2H}{\mu}} e^{\frac{\mu+\alpha}{M}(\eta + \frac{2H}{\mu} - T_{l+j-1})} V_M(\eta) d\eta + \\ + V_M\left(T_{l+j-1} - \frac{2H}{\mu}\right) - e^{\frac{\mu+\alpha}{M}(T - T_{l+j-1})} V_M\left(T - \frac{2H}{\mu}\right).$$

Obciążenie  $R_0(T)$  zapisujemy ogólnie w postaci

$$(3.45) \quad R_0(T) = \left(1 + \frac{H}{\mu} - H - T\right)^n \cdot 1 \left(1 + \frac{H}{\mu} - H - T\right).$$

Pierwsze dwa odcinki  $l+1$  i  $l+2$  pokazano na rys. 3. Następne powstają w wyniku odbić od powierzchni swobodnej i granicy ośrodków charakterystyk wychodzących z tych punktów  $T_i$  ( $i < l$ ), dla których spełniony jest warunek  $T_i > AT_i$ .

Wzór (3.43) poprawny jest w przypadku  $TK > 2H/\mu$ . Przypadek przeciwny, jako nie wnoszący nic nowego, pomijamy.

W ten sposób uzyskaliśmy pełne analityczne rozwiązanie problemu. Numeryczna adaptacja na  $EMC$  podanych tu rozwiązań jest dość trudna, dlatego pokażemy niżej podejście przybliżone, które znacznie upraszcza rachunki, nie zmniejszając przy tym ogólności rozważań.

## 4. UPROSZCZONE ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Uproszczenie polega na aproksymacji prędkości przemieszczania się cząstek przed frontem fali odbitej wielomianem trzeciego stopnia:

$$(4.1) \quad V_{02}(T) = \sum_{k=0}^3 W_k T^k.$$

Taka aproksymacja powoduje istotną redukcję podobzarów na płaszczyźnie  $X, T$  i w sposób zasadniczy upraszcza rozwiązanie problemu. Błędy wynikające z aproksymacji nie przekraczają kilku, a w krańcowych przypadkach — kilkunastu procent.

Równanie (3.33) słuszne jest teraz w całym obszarze III. Jego rozwiązania, podobnie jak w p. 3, poszukujemy w postaci szeregu:

$$(4.2) \quad V_M(T) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k T^k,$$

skąd na kolejne współczynniki  $B_k$  otrzymamy zależności:

$$(4.3) \quad B_1 = \frac{1}{M} \left( 1 + W_0 + \sum_{k=1}^n F_{0k} \right),$$

dla  $k=1, 2, \dots, n, n \geq 3$ ,

$$(4.4) \quad B_{k+1} = \frac{\frac{2\mu}{\mu-1} (W_k + F_k) - Q_k^3 B_k}{M(k+1)Q_k^2},$$

dla  $k > n$

$$(4.5) \quad B_{k+1} = -\frac{Q_k^3}{M(k+1)Q_k^2} B_k.$$

## Obszar V

Obowiązują tu wzory (3.44)–(3.47) z tym, że odcinki  $j=1, 2$  w (3.45) redukują się do jednego przedziału, który oznaczamy indeksem  $j=1$ .

Oczywiście  $TK=T_1$  ( $l=1$ ),  $T_2 = \frac{2H}{\mu} + AT_1$ . Kolejne parzyste lub nieparzyste punkty  $T_{l+j}$  odległe są od siebie o stałą wartość  $2H/\mu$ .

Reakcje  $R_2(T)$  i  $R_1(T)$  znajdujemy odpowiednio ze wzorów (3.32) i (3.29) poprawnych dla dowolnych wartości zmiennej  $T$ .

Przejdziemy teraz do numerycznej analizy problemu.

## 5. NUMERYCZNA ANALIZA DYNAMICZNYCH OBCIĄŻEŃ PŁYTY

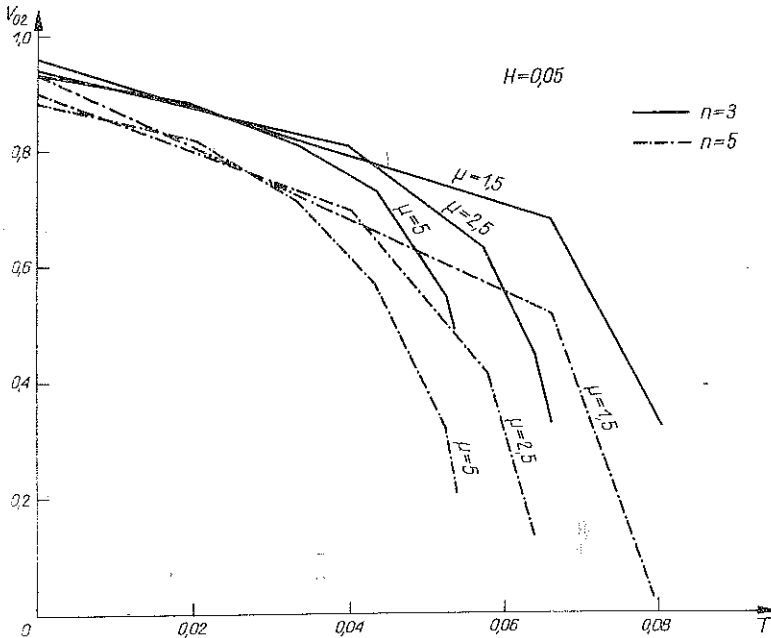
Znajomość reakcji działających na masę pozwala w prosty sposób znaleźć wszystkie wielkości określające ruch obiektu. Dlatego ograniczymy się tutaj do analizy funkcji  $R_1(T)$  i  $R_2(T)$ .

Z podanych w poprzednich punktach wzorów wynika, że ruch płyty zależy od następujących parametrów:  $n, H, \mu, M, \alpha$ , gdzie  $n$  jest wykładnikiem potęgowym

obciążenia,  $H$  bezwymiarowym współczynnikiem grubości warstwy,  $\mu$  współczynnikiem odciażenia,  $M$  bezwymiarowym współczynnikiem jednostkowej masy płyty,  $\alpha$  stosunkiem impedancji ośrodków.

Na podstawie wyprowadzonych wzorów wykonano obliczenia liczbowe, które zamieszczamy w formie wykresów na rysunkach 4–9.

Na rysunkach 4 i 5 przedstawiono dokładne wykresy funkcji  $V_{02}(T)$ . Błędy wynikające z przybliżenia tych funkcji wielomianem (4.1) zależą od wartości współczynnika  $\mu$  i wahają się w granicach (10–20)% dla  $\mu=1,5–2,5$  oraz (4–8%) dla  $\mu=5$ .



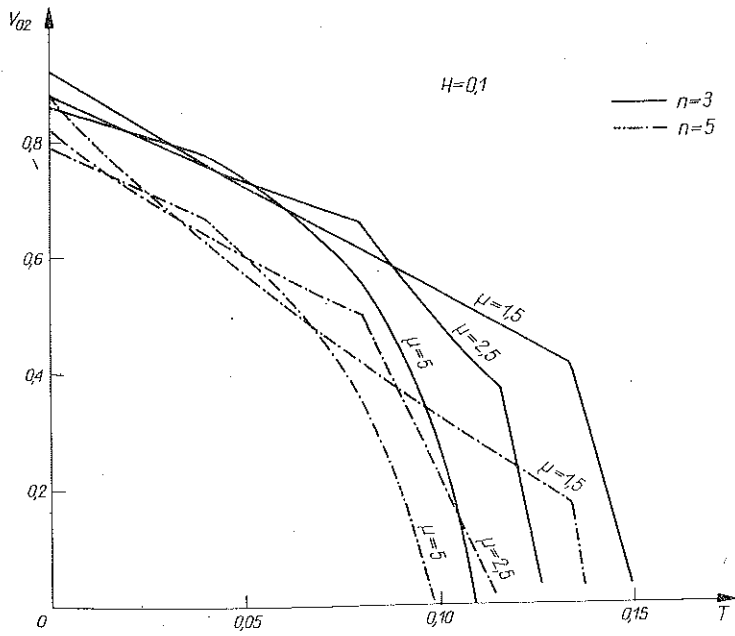
Rys. 4

Dla czasów  $T > TK$  (po skończeniu się fali odbitej) obiekt porusza się tłumionym ruchem drgającym. Przykładową zmianę funkcji  $R_1(T)$  i  $R_2(T)$  pokazujemy na rys. 6 (przy założeniu, że grunt przenosi naprężenia rozciągające).

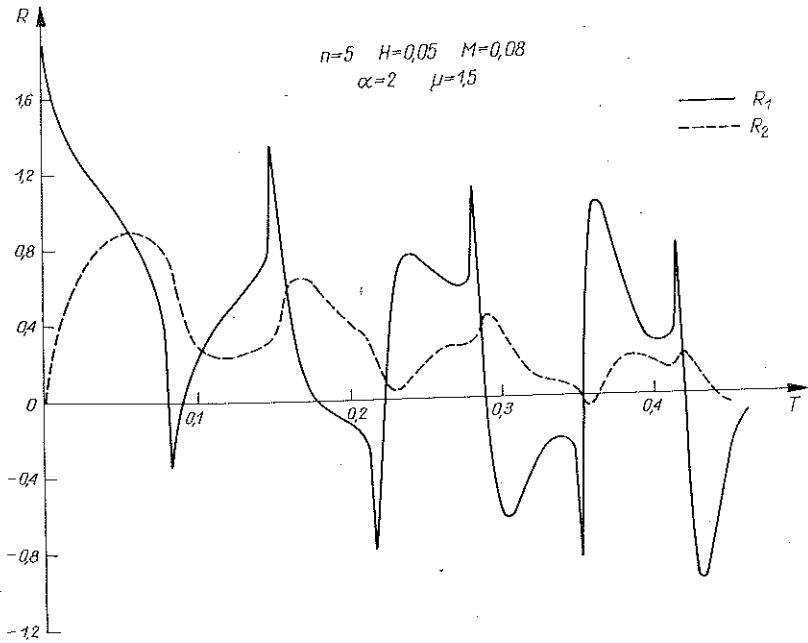
Oscylacje parametrów powodowane są uwarstwieniem ośrodka. Oczywiście, grunty skruszone, pozbawione sił spoistości, nie przenoszą naprężeń rozciągających — powstaje «kawitacja» i przestaje obowiązywać założenie o ciągłości ruchu. Mając to na uwadze zajmujemy się ilościową analizą parametrów dla zakresu  $T < TK$ .

Na rysunkach 7–9 pokazano przebiegi w czasie funkcji  $R_1$  i  $R_2$  dla różnych wartości wymienionych wyżej parametrów  $n$ ,  $H$ ,  $\mu$ ,  $M$  i  $\alpha$ . Maksymalna wartość «ciśnienia»  $R_1(0)$  równa jest podwojonej wartości niesionej przez falę padającą. Obliczamy ją ze wzoru:

$$(5.1) \quad R_1(0) = -2P_{01}(0) = 2 \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n}{k} (-1)^k}{[(\mu+1)^{k+1} - (\mu-1)^{k+1}] \mu^k} H^k \right\}.$$

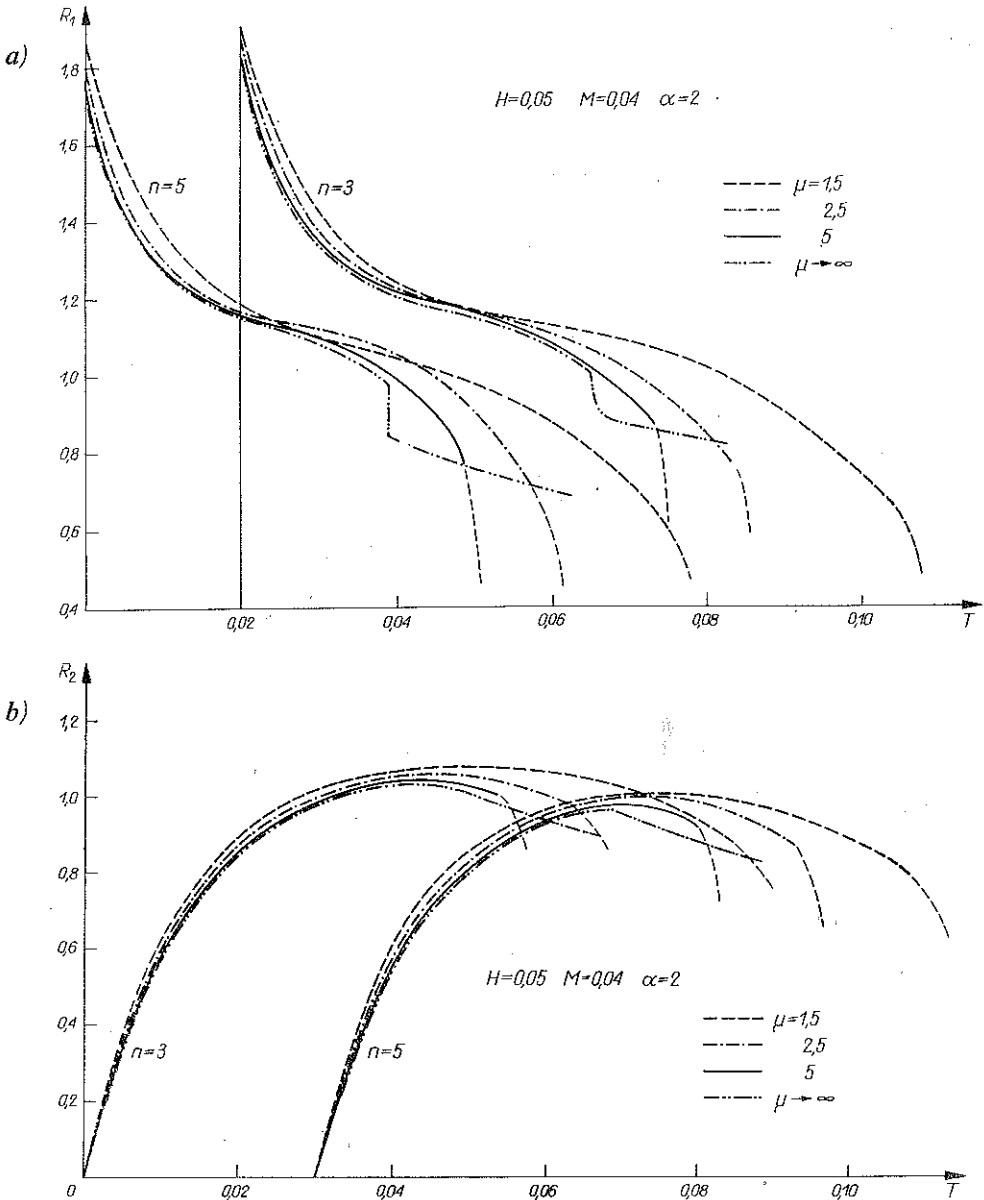


Rys. 5



Rys. 6

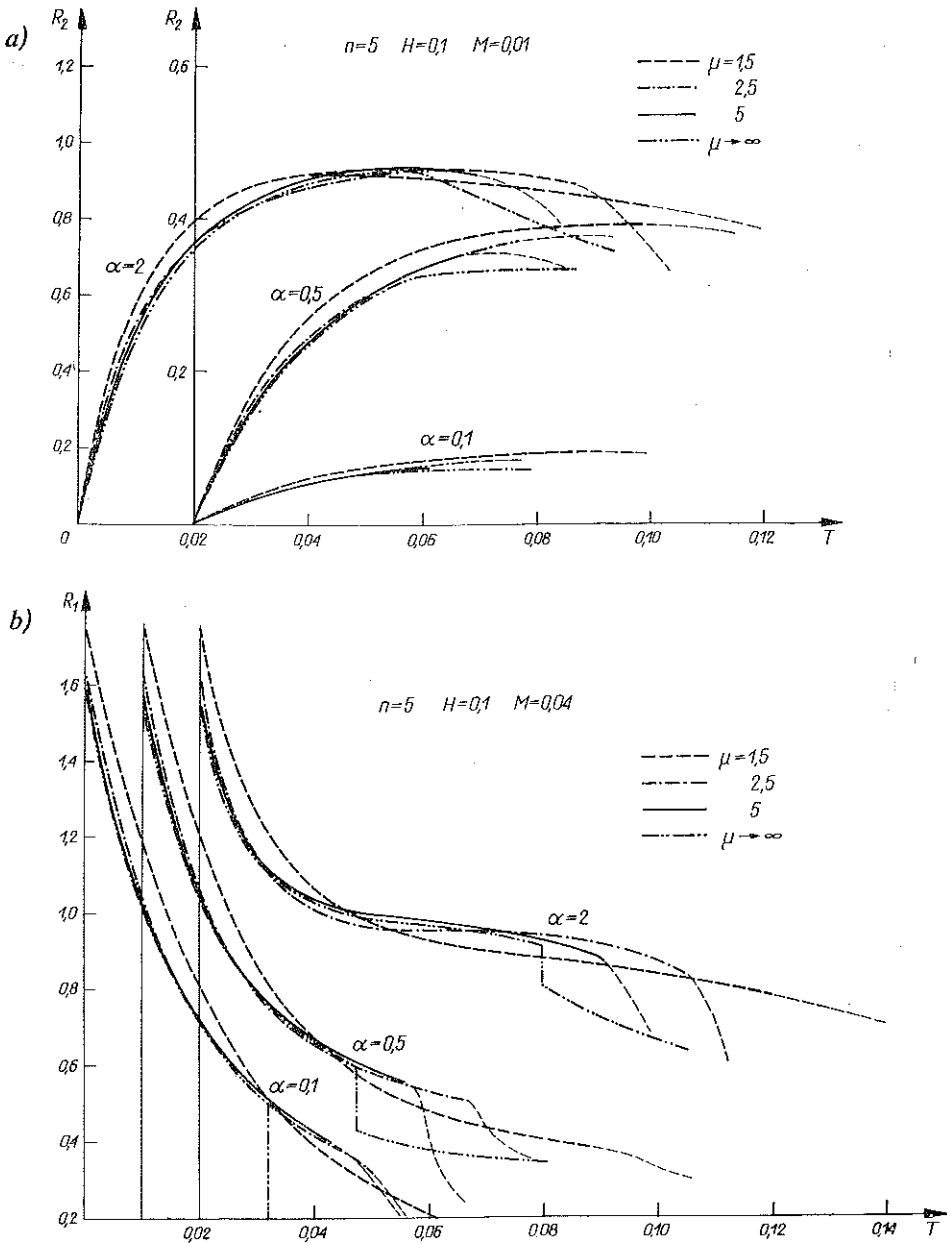
Ze wzrostem współczynników  $n$ ,  $H$  i  $\mu$  wartość  $R_1(0)$  maleje. W badanym zakresie zmian tych parametrów (por. rys. 7a i 8b) można uzyskać zmniejszenie siły uderzenia o około 20%. W pierwszej chwili po odbiciu reakcja  $R_1(T)$  szybko maleje.



Rys. 7

wskutek rozpędzania masy oraz silnego działania izolującego fali odbitej. Z kolei masywna przegroda wywierając nacisk na półprzestrzeń powoduje szybkie narastanie ciśnienia  $R_2(T)$ . Po pewnym czasie (zależnym od doboru parametrów) pod wpły-

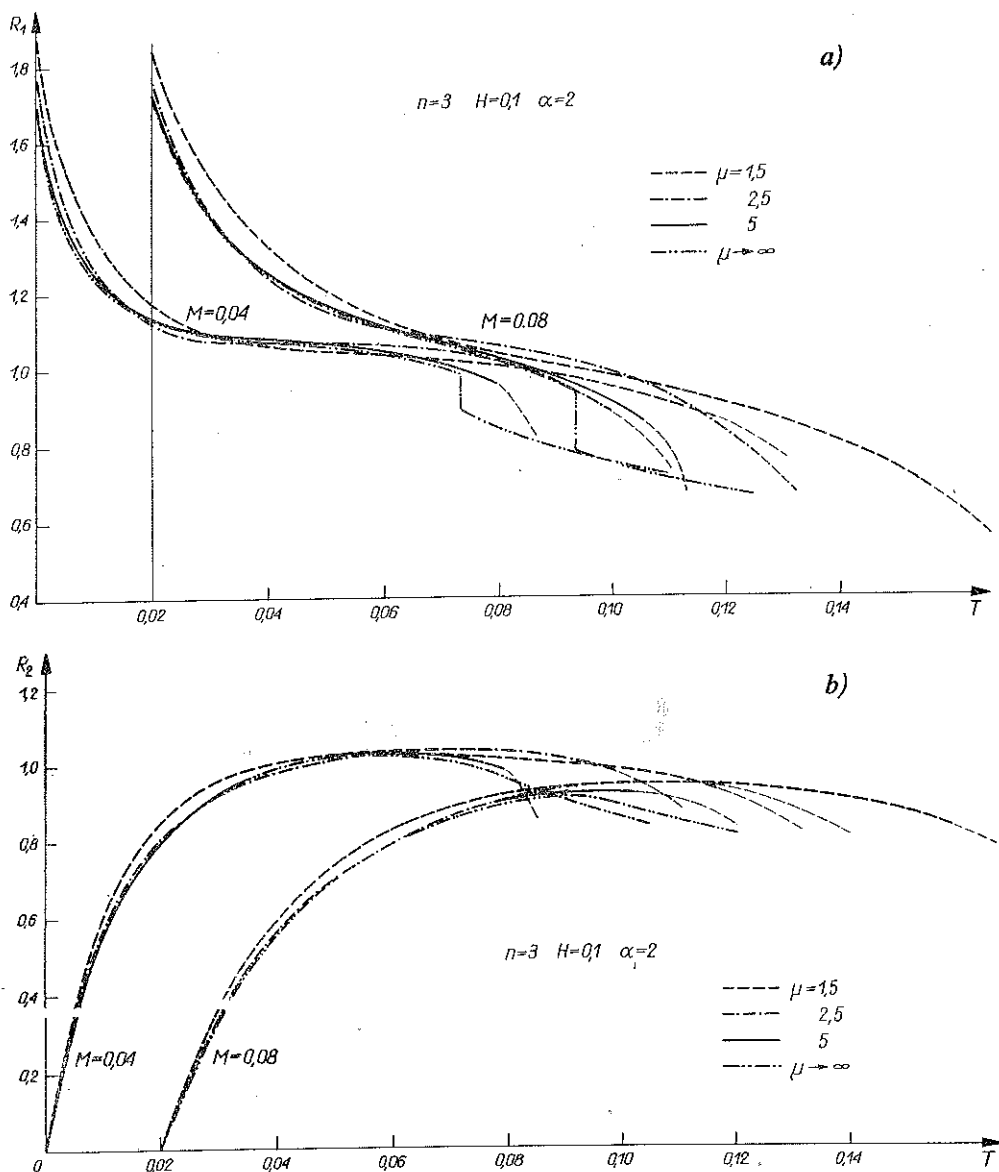
wem przeciwnego oddziaływania swobodnej powierzchni, strat energii w warstwie oraz oporu półprzestrzeni działania te «wysycają się» wzajemnie i w efekcie powstaje obszar typu plateau.



Rys. 8

Stan taki utrzymuje się do momentu wyrównania się prędkości masowych przed i za frontem fali odbitej. W miarę wzrostu gęstości masy  $M$  i stosunku impedancji  $\alpha$

maleje szybkość narastania i wartość ekstremalna ciśnienia  $R_2(T)$  zmniejsza się też szybkość zmian reakcji  $R_1(T)$ . Wszystkie parametry mają wpływ na czas skończenia się fali odbitej, szerokość i poziom obszaru plateau. Zmiany te można prześledzić na rys. 7-9.



Rys. 9

Przejdziemy obecnie do omówienia roli współczynnika  $\mu$ . Charakteryzuje on dwie własności ośrodka wypełniającego warstwę: względną szybkość przenoszenia zaburzeń oraz własności dysypacyjne. Ogólną (ważną z praktycznego punktu wi-

dzenia) prawidłowością jest nieliniowy wpływ współczynnika odciążenia (rys. 7–9); największe zmiany zachodzą w przedziale  $1 < \mu < 3$  szybko malejąc powyżej tych wartości. Wynika to stąd, że energia tracona w nieodwracalnym cyklu obciążenie-odciążenie jest proporcjonalna do pola pod krzywą  $\sigma(\varepsilon)$ , które zmienia się nieznacznie dla dużych  $\mu$ .

Dla porównania na wszystkich wykresach naniesiono odpowiednie zależności otrzymane przy założeniu sztywnego odciążenia, stanowiącego graniczny przypadek zbadanego zagadnienia przy  $\mu \rightarrow \infty$ .

Zasadnicze wnioski z porównania obydwu modeli można ująć w następujących punktach:

1. W przedziale  $1 < \mu < 3$  występują znaczne różnice (szczególnie poza obszarami plateau) w obliczeniach ciśnień działających na obiekty przykryte warstwą gruntu skruszonego. Uwzględnienie odkształceń ośrodka w procesie odciążenia daje większe wartości reakcji oraz łagodniejsze przebiegi czasowe.

2. Dla  $\mu = 5$  uzyskano dobrą zgodność z modelem sztywnego odciążenia — różnice nie przekraczają 4% (z wyjątkiem otoczenia punktu, w którym zanika fala odbita).

3. Wyniki uzyskane za pomocą modelu ze sztywnym odciążeniem w większości przypadków praktycznych, spełniających warunek  $\mu > 3$ , mogą być wykorzystane do obliczeń inżynierskich dla ośrodków przedstawionych w niniejszej pracy.

4. W przypadkach wątpliwych celowe wydaje się stosowanie pokazanego tu podejścia jako testu sprawdzającego poprawność wyników uzyskanych za pomocą prostych wzorów podanych w pracy [1].

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. PAPLIŃSKI, E. WŁODARCZYK, *Współdziałanie sprężysto-plastycznych fal naprężenia z niesłiwą płaską przegradą, spoczywającą na półprzestrzeni sprężystej*, Rozpr. Inżyn., 20, 2, 253–268, 1972.
2. Г. М. Ляхов, *Основы динамики взрыва в грунтах и жидких средах*, Изд. „Недра”, Москва 1964.
3. X. A. Рахматулин, А. Я. Сагомонлян, Н. А. Алексеев, *Вопросы динамики грунтов*, изд. МГУ, 1964.
4. E. WŁODARCZYK, *On the loading process behind the fronts of reflected and refracted shock waves in plastic layered media*, Proc. Vibr. Probl., 12, 4, 1971.

#### ВЛИЯНИЕ ЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ РАЗГРУЗКИ НА ДИНАМИКУ ОБЪЕКТА ПОМЕЩЕННОГО В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ГРУНТЕ

##### Резюме

В работе дается аналитическое решение проблемы воздействия упруго-пластической волны напряжения на несжимаемую плоскую преграду, находящуюся на линейно-упругом полупространстве и покрытой слоем грунта с толщиной  $h$ . Грунт в слое аппроксимирован моделью с линейной ветвью нагрузки и с линейно-упругой разгрузкой. Исследовано точно



влияние линейно-упругой разгрузки, имеющей место в слое, на параметры движения преграды и на этой основе установлены условия, при которых можно пользоваться упрощенной моделью с жесткой разгрузкой.

## SUMMARY

## INFLUENCE OF LINEARLY-ELASTIC UNLOADING ON DYNAMICS OF AN OBJECT PLACED IN ELASTIC-PLASTIC SOIL

The paper presents an analytical solution of the problem of interaction of an elastic-plastic stress wave with a plane wall resting on a linearly-elastic halfspace and covered by a soil layer of thickness  $h$ . The soil is approximated by a model with linear loading and linearly elastic unloading branches. Influence of the linearly elastic unloading within the layer upon the parameters of motion of the wall is examined in detail, what makes it possible to establish the conditions under which the simplified model with rigid unloading may be used.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 28 marca 1973 r.*

---