

OSIOWO-SYMETRYCZNE ZAGADNIENIE TEORII KONSOLIDACJI
W PRZYPADKU POWIERZCHNI PRZEPUSZCZALNEJ DLA CIECZY

ZENON KOŃCZAK (POZNAŃ)

WSTĘP

Celem niniejszej pracy jest wyprowadzenie wzoru na osiadanie powierzchni półprzestrzeni konsolidującej. Za podstawę rozważań przyjmujemy teorię przepływu cieczy przez porowate ośrodki odkształcalne, sformułowaną przez BIOTA [2 i 3].

Zajmiemy się przestrzennym przypadkiem odkształcenia szkieletu. Przyjmiemy, że rozważana półprzestrzeń obciążona jest w chwili $t=0$ nagle przyłożoną do jej powierzchni siłą skupioną. Założymy, że ciecz może swobodnie wypływać przez powierzchnię ograniczającą półprzestrzeń.

Za punkt wyjściowy przyjmujemy układ podstawowych równań teorii konsolidacji wyrażony w przemieszczeniach. Przy rozwiązaniu tego układu oprzemy się na pracy W. DERSKIEGO [5]. Nie uczynimy żadnych założeń upraszczających, które ograniczyłyby wyniki do ściśle określonego rodzaju ośrodka, poza założeniami liniowej teorii konsolidacji.

Podobnym zagadnieniem zajmowali się MANDEL [11 i 12] oraz McNAMEE i GIBSON [14 i 15], ale dla przypadku ośrodka nieściśliwego.

W ostatniej części pracy pokażemy związek pomiędzy otrzymanym rozwiązaniem i rozwiązaniem Boussinesqa znanym z teorii sprężystości. Dla ilustracji otrzymanego rozwiązania podamy przykład liczbowy dla półprzestrzeni w postaci piaskowca nasyconego cieczą.

1. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

W naszych rozważaniach będziemy rozpatrywali osiadanie półprzestrzeni konsolidującej pod działaniem siły skupionej. Taki przypadek jest zagadnieniem obrotowo-symetrycznym. A zatem dla prostoty opisu posłużymy się układem współrzędnych walcowych.

Przyjmujemy, że siła P przyłożona jest prostopadłe do powierzchni półprzestrzeni i jej kierunek jest zgodny z kierunkiem osi z (rys. 1).

W przyjętym układzie współrzędnych równania równowagi wewnętrznej z pominięciem sił masowych sprowadzą się do dwóch równań [3]

$$(1.1) \quad \frac{\partial(\sigma_{rr} + \sigma)}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial(\sigma_{zz} + \sigma)}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0,$$

przy czym σ_{ij} są współrzędnymi tensora stanu naprężenia przenoszonego przez szkielet sprężysty, $\sigma = -pf$ jest hydrostatycznym stanem naprężenia przenoszonym przez ciecz wypełniającą pory szkieletu, gdzie f jest porowatością szkieletu, a p dodatnim parciem cieczy.

Drugą grupę równań tworzą związki geometryczne, które dla rozważanego zagadnienia obrotowo-symetrycznego przyjmują postać

$$(1.2) \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

gdzie u i w oznaczają przemieszczenia szkieletu, u oznacza przemieszczenia promieniowe, w przemieszczenia w kierunku osi z .

Stan naprężenia i odkształcenia w ośrodku wiązań związku fizyczne [2]

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2N\varepsilon_{rr} + (A\varepsilon + Q\theta), \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2N\varepsilon_{\theta\theta} + (A\varepsilon + Q\theta), \\ \sigma_{zz} &= 2N\varepsilon_{zz} + (A\varepsilon + Q\theta), \\ \sigma_{zr} &= 2N\varepsilon_{zr}, \quad \sigma = Q\varepsilon + R\theta, \end{aligned}$$

przy czym $\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}$ jest dylatacją szkieletu porowatego, θ oznacza dylatację cieczy, a wielkości N , A , Q i R są czterema stałymi ośrodka. Według pracy [4]

M. A. BIOTA i D. G. WILLISA stała N odpowiada modułowi odkształcenia postaciowego, a pozostałe wielkości są określone przez wzory

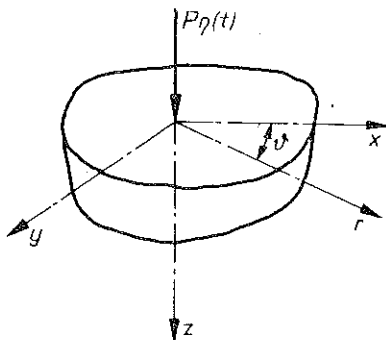
$$(1.4) \quad \begin{aligned} A &= \frac{\frac{\gamma}{\omega} + f^2 + (1-2f) \left(1 - \frac{\delta}{\omega} \right)}{\gamma + \delta - \frac{\delta^2}{\omega}} - \frac{2}{3} N, \\ Q &= \frac{f \left(1 - f - \frac{\delta}{\omega} \right)}{\gamma + \delta - \frac{\delta^2}{\omega}}, \quad R = \frac{f^2}{\gamma + \delta - \frac{\delta^2}{\omega}}, \end{aligned}$$

przy czym γ , δ i ω są wielkościami wyznaczonymi z doświadczenia (bliźsze szczegóły — por. pracę BIOTA i WILLISA [4]).

Z budowy związków (1.4) określających stałe Q i R wynika natychmiast, że dążą one do zera, gdy $f \rightarrow 0$.

W dalszych rozważaniach ze związków fizycznych (1.3) eliminujemy dylatację cieczy za pomocą ostatniego z nich i napiszemy

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2N\varepsilon_{rr} + \left(M\varepsilon + \frac{Q}{R} \sigma \right), & \sigma_{\theta\theta} &= 2N\varepsilon_{\theta\theta} + \left(M\varepsilon + \frac{Q}{R} \sigma \right), \\ \sigma_{zz} &= 2N\varepsilon_{zz} + \left(M\varepsilon + \frac{Q}{R} \sigma \right), & \sigma_{zr} &= 2N\varepsilon_{zr}, \end{aligned}$$



Rys. I

gdzie

$$(1.6) \quad M = A - \frac{Q^2}{R}.$$

Wykorzystanie wzorów (1.4) pozwala stwierdzić, że M jest różne od zera, gdy $f \rightarrow 0$. Mamy bowiem

$$\lim_{f \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{\gamma}{\omega} + f^2 + (1-2f) \left(1 - \frac{\delta}{\omega}\right) - \left(1 - f - \frac{\delta}{\omega}\right)^2}{\gamma + \delta - \frac{\delta^2}{\omega}} - \frac{2}{3} N \right] = \frac{1}{\omega} - \frac{2}{3} N.$$

Dla $\sigma = 0$ stała M określona wzorem (1.6) spełnia rolę stałej Lamégo, co wynika z budowy związków fizycznych (1.5).

Równania (1.1), (1.2) oraz (1.5) uzupełniają prawo przepływu cieczy przez ośrodki porowate odkształcalne (prawo Darcy'ego), które napiszemy w postaci [5]

$$(1.7) \quad c \nabla^2 \sigma = \dot{\theta} - \dot{\varepsilon}, \quad (\dot{\cdot}) = \frac{\partial}{\partial t},$$

przy czym c oznacza współczynnik przepuszczalności ośrodka dla cieczy, t — czas. W równaniu przepływu utożsamiliśmy pochodną substancjalną z pochodną lokalną. Tym samym ograniczyliśmy nasze rozważania do takich przypadków, w których pochodna konwekcyjna jest pomijalnie mała w porównaniu do pochodnej lokalnej. Innymi słowy, ograniczyliśmy klasę rozważanych zagadnień do przypadków małych przemieszczeń.

W dalszych rozważaniach posłużymy się inną postacią równania przepływu. Wyeeliminujemy z niego wielkość θ za pomocą ostatniego ze związków fizycznych (1.3) i w wyniku otrzymamy:

$$(1.8) \quad c \nabla^2 \sigma = \frac{1}{R} \dot{\sigma} - \frac{H}{R} \dot{\varepsilon}, \quad H = Q + R.$$

Układ równań teorii konsolidacji wyrazimy w przemieszczeniach. W tym celu w równania równowagi wewnętrznej (1.1) podstawimy związki fizyczne (1.5), wykorzystamy związki geometryczne (1.2) i po uporządkowaniu wraz z równaniem (1.8) znajdziemy

$$(1.9) \quad \begin{aligned} N \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u + (M+N) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} &= - \frac{H}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial r}, \\ N \nabla^2 w + (M+N) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} &= - \frac{H}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \\ c \nabla^2 \sigma &= \frac{1}{R} \dot{\sigma} - \frac{H}{R} \dot{\varepsilon}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Równania (1.9) stanowią sprzężony układ równań teorii konsolidacji w przypadku obrotowo-symetrycznym. Są one sprzężone za pośrednictwem funkcji parcia cieczy σ i dylatacji szkieletu ε .

Rozwiązanie układu równań (1.9) musi spełniać następujące warunki brzegowe:

$$(1.10) \quad [\sigma_{zz}(r, z, t)]_{z=0} = \frac{-P}{2\pi r} \delta(r) \eta(t), \quad [\sigma(r, z, t)]_{z=0} = 0, \quad [\sigma_{zr}(r, z, t)]_{z=0} = 0,$$

gdzie $\delta(r)$ jest funkcją Diraca, a $\eta(t)$ jest funkcją Heaviside'a.

Ponieważ układ równań (1.9) zawiera pierwsze pochodne względem czasu, przeto należy podać wartości rozważanych funkcji w chwili czasu $t=0$. Warunek początkowy dla tego układu równań jest w chwili obecnej kontrowersyjny. Niektórzy autorzy (np. BIOT [1], McNAMEE i GIBSON [14 i 15]) stosują do rozwiązania zagadnień teorii konsolidacji transformację Laplace'a i przyjmują przy tym, że w chwili czasu $t=0$ poszukiwane funkcje parcia cieczy σ oraz przemieszczenia szkieletu u i w równają się zeru w całym badanym obszarze. Otrzymane przez nich wyniki nie spełniają warunku początkowego. Wymienieni autorzy stwierdzają *ex post*, że mamy do czynienia z osiadaniem «natychmiastowym». Autorowi niniejszej pracy wydaje się, że w przypadku istnienia odkształceń natychmiastowych należałoby uwzględnić je w postaci warunku początkowego. Temu zagadnieniu poświęcona jest praca W. DERSKIEGO i I. KISIELA [6]. W naszych rozważaniach przyjmujemy, podobnie jak wspomniani autorzy, że istnieją odkształcenia natychmiastowe i że wraz z nimi wystąpi natychmiastowe parcie cieczy σ różne od zera. Oznaczmy te funkcje wskaźnikiem górnym zero:

$$(1.11) \quad \sigma(r, z, t=0) = \sigma^{(0)}(r, z), \quad u(r, z, t=0) = u^{(0)}(r, z), \quad w(r, z, t=0) = w^{(0)}(r, z).$$

Są to warunki początkowe, które — jako funkcje miejsca — muszą spełniać układ równań

$$(1.12) \quad N \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u^{(0)} + (M+N) \frac{\partial \varepsilon^{(0)}}{\partial r} = - \frac{H}{R} \frac{\partial \sigma^{(0)}}{\partial r},$$

$$N \nabla^2 w^{(0)} + (M+N) \frac{\partial \varepsilon^{(0)}}{\partial z} = - \frac{H}{R} \frac{\partial \sigma^{(0)}}{\partial z}, \quad \nabla^2 \sigma^{(0)} = 0.$$

Rozwiązanie tego układu musi spełniać warunki brzegowe (1.10).

Istnienie funkcji (1.11) można uwzględnić formalnie przy stosowaniu do układu równań (1.9) transformacji Laplace'a, określonej wzorem [7]

$$(1.13) \quad (\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{\sigma}) = \int_0^{\infty} (u, w, \sigma) e^{-st} dt,$$

przy czym $s = \gamma + i\beta$ jest zespolonym parametrem transformacji.

Po wykonaniu tej transformacji układ równań (1.9) przyjmuje postać

$$(1.14) \quad N \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) \tilde{u} + (M+N) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial r} = - \frac{H}{R} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial r},$$

$$N \nabla^2 \tilde{w} + (M+N) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial z} = - \frac{H}{R} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial z},$$

$$c \nabla^2 \tilde{\sigma} = \frac{s}{R} \left(\tilde{\sigma} - \frac{1}{s} \sigma^{(0)} \right) - s \frac{H}{R} \left(\tilde{\varepsilon} - \frac{1}{s} \varepsilon^{(0)} \right).$$

Rozwiązanie szczególne tego układu równań, odpowiadające funkcjom $\sigma^{(0)}$ i $\varepsilon^{(0)}$, jest natychmiastowe i może mieć postać

$$(1.15) \quad \tilde{\sigma}^{(1)} = \frac{1}{s} \sigma^{(0)}, \quad \tilde{\varepsilon}^{(1)} = \frac{1}{s} \varepsilon^{(0)}.$$

Jak łatwo zauważyć

$$(1.16) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} s \tilde{\sigma}^{(1)} = \sigma^{(0)}, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{\varepsilon}^{(1)} = \varepsilon^{(0)}.$$

Rozwiązania szczególne (1.15) są tylko rozwiązaniami formalnymi, ponieważ nic nie wiemy o ich postaci. Ta postać określona jest przez rozwiązanie układu równań (1.12) oraz warunki brzegowe (1.10).

We wspomnianej już pracy [6] DERSKI i KISIEL wykazali, że rozwiązanie $\sigma^{(0)}$, $u^{(0)}$ i $w^{(0)}$ otrzymuje się automatycznie mimo przyjęcia, że wartości tych funkcji są zerami w chwili czasu $t=0$. Potwierdzimy to przy końcu naszych rozważań.

W dalszym ciągu będziemy się zatem zajmowali budową rozwiązania przetransformowanego układu równań (1.14), w którym przyjęto $\sigma^{(0)}=0$, $u^{(0)}=0$ i $w^{(0)}=0$:

$$(1.17) \quad \begin{aligned} N \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) \tilde{u} + (M+N) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial r} &= - \frac{H}{R} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial r}, \\ NV^2 \tilde{w} + (M+N) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial z} &= - \frac{H}{R} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial z}, \\ c \nabla^2 \tilde{\sigma} &= \frac{s}{H} \tilde{\sigma} - s \frac{H}{R} \tilde{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Przetransformowane warunki brzegowe (1.10) po uwzględnieniu przedstawienia całkowego funkcji Diraca przyjmują postać

$$(1.18) \quad [\tilde{\sigma}_{zz}]_{z=0} = - \frac{P}{2\pi s} \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r) d\alpha, \quad [\tilde{\sigma}_{zr}]_{z=0} = 0, \quad [\tilde{\sigma}]_{z=0} = 0,$$

przy czym $J_0(\alpha r)$ jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju rzędu zerowego.

2. BUDOWA ROZWIĄZANIA

Zajmiemy się rozwiązaniem układu równań (1.17). Jest to układ sprzężony za pośrednictwem funkcji $\tilde{\sigma}$ i $\tilde{\varepsilon}$. W celu jego rozprzężenia, skorzystamy z metody podanej przez W. DERSKIEGO w pracy [5] i pierwsze z nich zróżniczkujemy względem r , drugie natomiast względem z , a ponadto pierwsze pomnożymy przez $1/r$. Po dodaniu stronami i uporządkowaniu otrzymujemy

$$(2.1) \quad \nabla^2 \tilde{\varepsilon} = - \frac{H}{R(M+2M)} \nabla^2 \tilde{\sigma}.$$

Nad ostatnim z równań (1.17) wykonujemy obustronnie operację Laplace'a, wykorzystujemy związek (2.1), za pomocą którego rugujemy $\tilde{\varepsilon}$, i zamiast przetransformowanego równania przepływu (1.17) otrzymujemy równanie

$$(2.2) \quad \nabla^2 \nabla^2 \tilde{\sigma} = sK \nabla^2 \tilde{\sigma}, \quad K = \frac{R(M+2N)+H^2}{cR^2(M+2N)} = \frac{A+R+2(N+Q)}{c(AR-Q^2+2NR)}.$$

Rozwiązanie tego równania ma postać [5]

$$(2.3) \quad \tilde{\sigma} = \tilde{\varphi}_2 - \frac{1}{sK} \tilde{\varphi}_1,$$

przy czym $\tilde{\varphi}_2$ jest rozwiązaniem równania Helmholtza

$$(2.4) \quad \nabla^2 \tilde{\varphi}_2 - sK \tilde{\varphi}_2 = 0,$$

podczas gdy $\tilde{\varphi}_1$ jest funkcją harmoniczną spełniającą równanie

$$(2.5) \quad \nabla^2 \tilde{\varphi}_1 = 0.$$

Dla zbudowania rozwiązania szczególnego równań przemieszczeniowych (1.17) wprowadzimy transformatę Laplace'a funkcji potencjału przemieszczenia $\tilde{\Phi}$ zdefiniowaną wzorami:

$$(2.6) \quad \tilde{u}_1 \stackrel{\text{ar}}{=} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r}, \quad \tilde{w}_1 \stackrel{\text{ar}}{=} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z}.$$

Wzory (2.6) podstawimy w równania przemieszczeniowe (1.17). Porządkujemy je i całkujemy: pierwsze względem r , drugie względem z . W wyniku otrzymujemy jedno równanie Poissona:

$$(2.7) \quad \nabla^2 \tilde{\Phi} = -K_1 \tilde{\sigma}, \quad K_1 = \frac{H}{R(M+2N)} = \frac{Q+R}{AR-Q^2+2NR}.$$

Uwzględniając $\tilde{\sigma}$ wyrażone wzorem (2.3) znajdujemy [5]

$$(2.8) \quad \tilde{\Phi} = \frac{K_1}{sK} (\tilde{\varphi}_3 - \tilde{\varphi}_2),$$

przy czym $\tilde{\varphi}_3$ jest funkcją biharmoniczną i taką, że

$$(2.9) \quad \nabla^2 \tilde{\varphi}_3 = \tilde{\varphi}_1.$$

Za pomocą rozwiązania (2.8) nie możemy w ogólności spełnić wszystkich warunków brzegowych. Ponadto rozwiązanie (2.8) spełnia równania przemieszczeniowe (1.17) i równanie przepływu (2.2), ale nie spełnia wyjściowego równania przepływu (1.17). W celu spełnienia warunków brzegowych i równań (1.17) dodamy rozwiązanie jednorodnego układu równań:

$$(2.10) \quad N \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) \tilde{u} + (M+N) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial r} = 0, \quad N \nabla^2 \tilde{w} + (M+N) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial z} = 0.$$

Rozwiązanie układu (2.10) przyjmujemy w postaci funkcji naprężeń Love'a, która określa transformaty przemieszczeń wzorami [16]:

$$(2.11) \quad \tilde{u}_2 = -\frac{M+N}{N} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial r \partial z}, \quad \tilde{w}_2 = \frac{M+2N}{N} \nabla^2 \tilde{\chi} - \frac{M+N}{N} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial z^2},$$

przy czym funkcja $\tilde{\chi}$ jest funkcją biharmoniczną spełniającą równanie

$$\nabla^2 \nabla^2 \tilde{\chi} = 0.$$

Poszukiwane rozwiązanie układu równań przemieszczeniowych (1.17) ma zatem postać sumy

$$\tilde{u} = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2, \quad \tilde{w} = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2.$$

Aby suma ta była istotnie rozwiązaniem układu równań (1.17), musi być spełnione równanie przepływu (1.17)₃. Wprowadza to dodatkowy warunek wiążący funkcję $\tilde{\varphi}_1$ z funkcją $\tilde{\chi}$:

$$(2.12) \quad cR\tilde{\varphi}_1' + sH \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \tilde{\chi} = 0.$$

3. WYBÓR FUNKCJI WYSTĘPUJĄCYCH W ROZWIĄZANIU

Z kolei przystąpimy do wyboru funkcji $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{\varphi}_2$, $\tilde{\varphi}_3$ i $\tilde{\chi}$ wchodzących w skład rozwiązania.

Funkcje, z których budujemy rozwiązanie przetransformowanego układu równań (1.17) przyjmujemy w postaci następujących całek Hankela:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \tilde{\varphi}_1 &= \int_0^\infty A(\alpha) e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) d\alpha, & \tilde{\varphi}_2 &= \int_0^\infty B(\alpha) e^{-z\sqrt{\alpha^2 + sK}} J_0(\alpha r) d\alpha, \\ \tilde{\varphi}_3 &= \int_0^\infty \alpha z C(\alpha) e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) d\alpha, & \tilde{\chi} &= \int_0^\infty [D(\alpha) + \alpha z E(\alpha)] e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) d\alpha, \end{aligned}$$

przy czym $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, $D(\alpha)$ i $E(\alpha)$ są chwilowo nie znanymi funkcjami parametru α .

O takim wyborze funkcji zdecydowały warunki brzegowe. Mianowicie z warunków tych wynika, że przy $r \rightarrow 0$ funkcja podcałkowa nie może być równa zeru. Ten warunek spełnia funkcja $J_0(\alpha r)$.

Rozpocniemy od wyznaczenia funkcji $\tilde{\sigma}$. Zgodnie ze wzorem (2.3) ma ona postać

$$(3.2) \quad \tilde{\sigma} = \int_0^\infty B(\alpha) e^{-z\sqrt{\alpha^2 + sK}} J_0(\alpha r) d\alpha - \frac{1}{sK} \int_0^\infty A(\alpha) e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) d\alpha.$$

Funkcja $\tilde{\sigma}$ musi spełniać przetransformowane warunki brzegowe (1.18). Po wykorzystaniu ostatniego z nich otrzymujemy związek

$$(3.3) \quad B(\alpha) = \frac{1}{sK} A(\alpha),$$

za pomocą którego możemy ze wzoru (3.2) wyeliminować $B(\alpha)$. Otrzymujemy

$$(3.4) \quad \tilde{\sigma} = \frac{1}{sK} \int_0^{\infty} A(\alpha) (e^{-z\sqrt{\alpha^2+sK}} - e^{-\alpha z}) J_0(\alpha r) d\alpha.$$

Przejdziemy obecnie do wyznaczenia funkcji potencjału $\tilde{\phi}$. Jak wynika ze wzoru (2.8), składają się na nie dwie funkcje $\tilde{\phi}_2$ oraz $\tilde{\phi}_3$, które określone są wzorami (3.1)₂ i (3.1)₃. Stałą $C(\alpha)$ ze wzoru (3.3) określa funkcja $\tilde{\phi}_1$ za pomocą zależności (2.9). Wynika z niej, że $C(\alpha) = -A(\alpha)/2\alpha^2$. Zależność ta pozwala napisać zamiast (3.1)₃

$$(3.5) \quad \tilde{\phi}_3 = - \int_0^{\infty} \frac{z}{2\alpha} A(\alpha) e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) d\alpha.$$

Na podstawie wzoru (2.8) przy uwzględnieniu związku (3.3) mamy

$$(3.6) \quad \tilde{\phi} = - \frac{K_1}{sK} \int_0^{\infty} \frac{z}{2\alpha} A(\alpha) e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) d\alpha - \frac{K_1}{s^2 K^2} \int_0^{\infty} A(\alpha) e^{-z\sqrt{\alpha^2+sK}} J_0(\alpha r) d\alpha.$$

Pozostaje jeszcze do wyznaczenia funkcja $\tilde{\chi}$. Pamiętajmy, że funkcja $\tilde{\chi}$ musi spełniać warunek (2.12), z którego otrzymujemy zależność

$$(3.7) \quad cRA(\alpha) = -2sH\alpha^3 E(\alpha).$$

Stałą $E(\alpha)$ wyrażamy za pomocą $A(\alpha)$ i mamy

$$(3.8) \quad \tilde{\chi} = \int_0^{\infty} \left[D(\alpha) - \frac{cRz}{2sH\alpha^2} A(\alpha) \right] e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) d\alpha.$$

4. WYZNACZENIE TRANSFORMATY ROZWIĄZANIA

Funkcje $\tilde{\phi}$ i $\tilde{\chi}$ określone wzorami (3.6) i (3.8) opisują składowe stanu naprężenia i za ich pośrednictwem muszą spełniać przetransformowane warunki brzegowe (1.18). Warunki te po wykorzystaniu związków fizycznych (1.5) i geometrycznych (1.2) oraz po uwzględnieniu związków (2.6), (2.7) i (2.11) prowadzą do układu równań

$$(4.1) \quad \left(\frac{cRN}{sH} + \frac{2NK_1}{s^2 K^2} \alpha^2 \right) A(\alpha) - 2(M+N)\alpha^3 D(\alpha) = \frac{P}{2\pi s} \alpha,$$

$$\left(\frac{NK_1}{sK} + \frac{cRM}{sH} - \frac{2NK_1}{s^2 K^2} \alpha \sqrt{\alpha^2+sK} \right) A(\alpha) + 2(M+N)\alpha^3 D(\alpha) = 0,$$

z których wyznaczymy poszukiwane funkcje $A(\alpha)$ i $D(\alpha)$. Dodając stronami układ równań (4.1), znajdziemy

$$(4.2) \quad A(\alpha) = A(\alpha, s) = \frac{a_0 s \alpha}{s a_1 + \alpha^2 - \alpha \sqrt{\alpha^2 + sK}},$$

gdzie

$$(4.3) \quad a_0 = \frac{PK^2}{4\pi NK_1}, \quad a_1 = \frac{K[cRK(M+N) + HNK_1]}{2HNK_1}.$$

Funkcję $D(\alpha)$ możemy określić z dowolnego z równań (4.1). Wykorzystujemy w tym celu drugie z nich i po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$(4.4) \quad D(\alpha) = D(\alpha, s) = -\frac{1}{2(M+N)\alpha^3} \left(\frac{NK_1}{sK} + \frac{cRM}{sH} - \frac{2NK_1}{s^2 K^2} \alpha \sqrt{\alpha^2 + sK} \right) A(\alpha, s).$$

Dla dalszych rozważań będzie wygodniejsza inna postać funkcji określonych wzorami (4.2) i (4.4). W związku z tym rozłożymy je na składniki proste i mamy

$$(4.5) \quad A(\alpha, s) = \frac{A_1 \alpha s}{s + \kappa \alpha^2} + \frac{A_2 \alpha^3}{s + \kappa \alpha^2} + \frac{A_2 \alpha^2 \sqrt{\alpha^2 + sK}}{s + \kappa \alpha^2},$$

przy czym

$$(4.6) \quad A_1 = \frac{a_0}{a_1}, \quad A_2 = \frac{a_0}{a_1^2}, \quad \kappa = \frac{2a_1 - K}{a_1^2}.$$

Funkcję $D(\alpha, s)$ wyrażoną wzorem (4.4) przedstawimy jak następuje:

$$(4.7) \quad D(\alpha, s) = -\frac{1}{(M+N)\alpha^2} \left\{ \frac{A_1 b}{s + \kappa \alpha^2} + \frac{A_3 \alpha^2}{s(s + \kappa \alpha^2)} - \frac{NK_1 A_2}{K^2} \frac{\alpha^4}{s^2(s + \kappa \alpha^2)} + \right. \\ \left. + A_4 \frac{\alpha \sqrt{\alpha^2 + sK}}{s(s + \kappa \alpha^2)} - \frac{NK_1 A_2}{K^2} \frac{\alpha^3 \sqrt{\alpha^2 + sK}}{s^2(s + \kappa \alpha^2)} \right\},$$

przy czym

$$(4.8) \quad b = \frac{NK_1}{2K} + \frac{cRM}{2H}, \quad A_3 = \left(b - \frac{NK_1}{K} \right) A_2, \quad A_4 = A_2 b - \frac{NK_1}{K^2} A_1.$$

Wyznaczone wzorami (4.5) i (4.8) funkcje $A(\alpha, s)$ i $D(\alpha, s)$ podstawiamy do równań (3.9) i (3.11) określających transformaty funkcji potencjału $\tilde{\Phi}$ i funkcji Love'a $\tilde{\chi}$. W celu wyznaczenia transformat przemieszczeń wykorzystujemy wzory (2.6) i (2.11). Po odpowiednim zróżniczkowaniu funkcji $\tilde{\Phi}$ i $\tilde{\chi}$ oraz przeprowadzeniu redukcji otrzymujemy

$$(4.9) \quad \tilde{u} = -\frac{cR(M+N)}{2HN} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha s} A(\alpha, s) e^{-\alpha z} J_1(\alpha r) d\alpha + \frac{1}{2} \left[\frac{K_1}{K} + \frac{cR(M+N)}{HN} \right] \times \\ \times \int_0^\infty \frac{z}{s} A(\alpha, s) e^{-\alpha z} J_1(\alpha r) d\alpha + \frac{K_1}{K_2} \int_0^\infty \frac{\alpha}{s^2} A(\alpha, s) e^{-z\sqrt{\alpha^2 + sK}} J_1(\alpha r) d\alpha - \\ - \frac{M+N}{N} \int_0^\infty \alpha^2 D(\alpha, s) e^{-\alpha z} J_1(\alpha r) d\alpha,$$

$$(4.9) \quad \tilde{w} = \left(\frac{cR}{H} - \frac{K_1}{2K} \right) \int_0^\infty \frac{1}{\alpha s} A(\alpha, s) e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) d\alpha + \frac{1}{2} \left[\frac{K_1}{K} + \frac{cR(M+N)}{HN} \right] \times$$

[c.d.]

$$\times \int_0^\infty \frac{z}{s} A(\alpha, s) e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) d\alpha + \frac{K_1}{K^2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\alpha^2 + sK}}{s^2} A(\alpha, s) e^{-z\sqrt{\alpha^2 + sK}} J_0(\alpha r) d\alpha -$$

$$- \frac{M+N}{N} \int_0^\infty \alpha^2 D(\alpha, s) e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) d\alpha.$$

Wykażemy, że gdy $s \rightarrow \infty$, to otrzymane granice transformat przemieszczeń i funkcji parcia cieczy spełniają układ równań (1.12). Skorzystamy w tym celu z zależności [7]

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sf(x_i, s)] = f^{(0)}(x_i).$$

Dla zbudowania granicy transformat przemieszczeń określonych wzorami (4.9) oraz funkcji parcia cieczy wyrażonej wzorem (3.7) wykorzystujemy funkcje $A(\alpha, s)$ i $D(\alpha, s)$ zdefiniowane wzorami (4.5) i (4.7). Po uwzględnieniu oznaczeń skraccających wprowadzonych przy przekształcaniu funkcji $A(\alpha, s)$ i $D(\alpha, s)$ wzorami (4.3), (4.6) i (4.8) oraz uporządkowaniu otrzymujemy

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (s\tilde{u}) = u^{(0)} = \frac{P}{4\pi N} \int_0^\infty z\alpha e^{-\alpha z} J_1(\alpha r) d\alpha - \frac{P}{4\pi N} \frac{RN}{R(M+N)+H^2} \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-\alpha z} J_1(\alpha r) d\alpha = \frac{P}{4\pi N} \frac{zr}{(z^2+r^2)^{3/2}} - \frac{P}{4\pi N} \frac{RN}{R(M+N)+H^2} \times$$

$$\times \frac{1}{r} \left[1 - \frac{z}{(z^2+r^2)^{1/2}} \right],$$

$$(4.10) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} (s\tilde{w}) = w^{(0)} = \frac{P}{4\pi N} \int_0^\infty z\alpha e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) d\alpha + \frac{P}{4\pi N} \frac{R(M+2N)+H^2}{R(M+N)+H^2} \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) d\alpha = \frac{P}{4\pi N} \frac{z^2}{(z^2+r^2)^{3/2}} + \frac{P}{4\pi N} \frac{R(M+2N)+H^2}{R(M+N)+H^2} \frac{1}{(z^2+r^2)^{1/2}},$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (s\tilde{\sigma}) = \sigma^{(0)} = -\frac{P}{2\pi} \frac{HR}{R(M+N)+H^2} \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) d\alpha =$$

$$= -\frac{P}{2\pi} \frac{HR}{R(M+N)+H^2} \frac{z}{(z^2+r^2)^{3/2}}.$$

Jak łatwo sprawdzić, wypisane wyżej granice transformat przemieszczeń i funkcji parcia cieczy, wyrażone wzorami (4.10), istotnie spełniają układ równań (1.12) oraz warunki brzegowe (1.10).

5. OSIADANIE POWIERZCHNI PÓLPRZESTRZENI

W dalszym ciągu interesować nas będzie wyłącznie osiadanie obciążonej powierzchni. Określa je funkcja w (4.9), gdy $z=0$:

$$(5.1) \quad [\tilde{w}]_{z=0} = \left(\frac{cR}{H} - \frac{K_1}{2K} \right) \int_0^\infty \frac{1}{\alpha s} A(\alpha, s) J_0(\alpha r) d\alpha + \\ + \frac{K_1}{K^2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\alpha^2 + sK}}{s^2} A(\alpha, s) J_0(\alpha r) d\alpha - \frac{M+N}{N} \int_0^\infty \alpha^2 D(\alpha, s) J_0(\alpha r) d\alpha,$$

przy czym $A(\alpha, s)$ i $D(\alpha, s)$ określone są wzorami (4.5) i (4.7).

W celu wyznaczenia osiadania powierzchni półprzestrzeni należy podstawić do wzoru (5.1) funkcje $A(\alpha, s)$ i $D(\alpha, s)$, odwrócić transformację Laplace'a oraz wykonać całkowanie względem α .

Szczegółowego obliczenia całek nie będziemy podawać w niniejszej pracy. Obliczenie to nie jest zbyt skomplikowane i może być przeprowadzone za pomocą tablic [7, 10 i 17].

Po wykonaniu całkowania i redukcji wyrażeń podobnych oraz po uwzględnieniu oznaczeń (4.3), (4.6) i (4.8) otrzymujemy

$$(5.2) \quad [w]_{z=0} = \frac{P}{8\pi N} \frac{M+2N}{M+N} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \operatorname{erfc} \left(\frac{r\sqrt{K}}{2\sqrt{t}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{\pi} F}{2\sqrt{\kappa t}} e^{-\frac{r^2}{8\kappa t}} I_0 \left(\frac{r^2}{8\kappa t} \right) - \frac{F^2}{\sqrt{\pi K}} I_{\text{tr}} \right\},$$

gdzie

$$(5.3) \quad F = \frac{cRK(M+N) - HNK_1}{cRK(M+N) + HNK_1}, \\ I_{\text{tr}} = \frac{K}{2} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{1}{\tau(1-\kappa K) + \kappa K t} e^{-\frac{r^2 K}{4[\tau(1-\kappa K) + \kappa K t]}} d\tau.$$

W wyrażeniu (5.2) $\operatorname{erfc}(\xi)$ jest dopełnieniem funkcji błędu określonej wzorem

$$\operatorname{erfc} \xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\xi^\infty e^{-\zeta^2} d\zeta;$$

$I_0(x)$ jest zmodyfikowaną funkcją Bessela pierwszego rodzaju rzędu zerowego.

Wykażemy, że występująca we wzorze (5.2) całka I_{tr} jest zbieżna dla $t \geq 0$.

Do zbadania zbieżności tej całki zastosujemy kryterium Cauchy'ego (por. [19], str. 253), które głosi: «Jeżeli istnieje taka wartość $p > 1$, dla której iloczyn $f(\lambda) \lambda^p$ pozostaje ograniczony, gdy $\lambda \rightarrow \infty$, to badana całka niewłaściwa $\int_a^\infty f(\lambda) d\lambda$ jest względnie zbieżna. Ten warunek na pewno jest spełniony, jeżeli istnieje skończona granica $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) \lambda^p$ ».

Dla zbadania zbieżności całki (5.3) wykonujemy podstawienie $1/\sqrt{\tau} = \lambda$ i otrzymujemy

$$I_{tr} = - \int_{\infty}^{\frac{1}{\sqrt{t}}} \frac{1}{\lambda^2} \frac{2}{\frac{1-\kappa K}{\lambda^2} + \kappa K t} \exp\left(-\frac{r^2 K}{4\left[\frac{1-\kappa K}{\lambda^2} + \kappa K t\right]}\right) d\lambda.$$

Przyjmujemy $p=2$ i badamy, czy granica wyrażenia podcałkowego ma wartość skończoną. Oczywiście

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{1-\kappa K}{\lambda^2} + \kappa K t} \exp\left(-\frac{r^2 K}{4\left[\frac{1-\kappa K}{\lambda^2} + \kappa K t\right]}\right) = \frac{2}{\kappa K t} \exp\left(-\frac{r}{4\kappa t}\right) < \infty$$

dla wszystkich wartości t . Zatem całka występująca we wzorze (5.2) jest bezwzględnie zbieżna.

Zajmiemy się teraz rozważaniem występującej we wzorze (5.2) całki dla różnych wartości zmiennej r . Granica wyrażenia podcałkowego przy $r \rightarrow 0$ wynosi

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\tau} [\tau(1-\kappa K) + \kappa K t]} \exp\left(-\frac{r^2 K}{4[\tau(1-\kappa K) + \kappa K t]}\right) = \frac{1}{\sqrt{\tau} [\tau(1-\kappa K) + \kappa K t]} < \infty.$$

Wynika stąd, że dla wartości r różnych od zera całka (5.3) ma wartość skończoną.

Sprawdzimy osiadanie wyrażone wzorem (5.2), gdy $t \rightarrow 0$.

Wyżej wykazaliśmy, że całka I_{tr} dla $t=0$ dąży do zera. Do zera dąży także funkcja $\operatorname{erfc}(r\sqrt{K}/2\sqrt{t})$. Pozostaje jeszcze do zbadania funkcja

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\kappa t}} \exp\left(-\frac{r^2}{8\kappa t}\right) I_0\left(\frac{r^2}{8\kappa t}\right).$$

W tym celu stosujemy rozwinięcie asymptotyczne zmodyfikowanej funkcji Bessela pierwszego rzędu zerowego (por. [13], wzór 157, str. 280). Po uproszczeniu wyrażeń podobnych w wyniku otrzymujemy $1/r$.

Wobec tego przy $t=0$ osiadanie określone wzorem (5.2) wynosi

$$(5.4) \quad [w]_{t=0} = \frac{P}{4\pi N} \frac{R(M+2N)+H^2}{R(M+N)+H^2} \frac{1}{r}.$$

Osiadanie to jest różne od zera i pokrywa się z $w^{(0)}$ dla $z=0$ ze wzoru (4.10).

Zbadamy osiadanie wyrażone wzorem (5.4), gdy $f \rightarrow 0$. W tym celu wzór (5.4) napiszemy w postaci

$$[w]_{t=0} = \frac{P}{4\pi N} \frac{M+2N+\frac{H^2}{R}}{M+N+\frac{H^2}{R}} \frac{1}{r}.$$

Zastosowanie wzorów (1.4) określających stałe ośrodka pozwala stwierdzić, że $H^2/R=0$. Ponieważ dla $f \rightarrow 0$ $M \neq 0$, co wykazaliśmy w p. 1, zatem mamy

$$(5.5) \quad [w]_{f=0} = \frac{P}{4\pi N} \frac{M+2N}{M+N} \frac{1}{r}.$$

W dalszym ciągu zbadamy przebieg osiadania określonego wzorem (5.2) dla $t \rightarrow \infty$. W tym celu ponownie zanalizujemy kolejno wyrażenia wchodzące w skład tego wzoru. Jak wiadomo $\lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{erfc}(r\sqrt{K}/2\sqrt{t}) = 1$ oraz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{kt}} \exp\left(-\frac{r^2}{8kt}\right) I_0\left(\frac{r^2}{8kt}\right) = 0.$$

Wyrażenie podcałkowe w całce I_{1r} (5.3) dąży do zera, co wynika ze wzoru (5.3). Zatem dla $t \rightarrow \infty$ osiadanie określa wzór

$$(5.6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} w = w_\infty = \frac{P}{4\pi N} \frac{M+2N}{M+N} \frac{1}{r}.$$

Wzory (5.4) i (5.6) różnią się od znanego z teorii sprężystości rozwiązania Boussinesqa [16] jedynie stałym mnożnikiem.

Jak wynika z określenia stałych ośrodka [4] M odpowiada stałej Lamégo, a N jest modulem odkształcenia postaciowego. Wobec tego, gdy porowatość $f=0$ (co odpowiada przestrzeni sprężystej), to otrzymane rozwiązania (5.4) i (5.6) pokrywają się ze wspomnianym już rozwiązaniem Boussinesqa [16] i przyjmują postać $w = P(1-\nu)/2\pi Gr$.

6. PRZYKŁAD LICZBOWY

Przykład liczbowy, który podajemy w niniejszej pracy, nie nadaje się zdaniem autora do wykorzystania w praktyce. Wynika to z braku dokładnych wartości liczbowych dla stałych Biota-Willisa. A zatem zasadniczym celem zamieszczonego tutaj przykładu jest tylko ilustracja zmian w czasie osiadania powierzchni półprzestrzeni. Na charakter tego osiadania, zdaniem autora, nie ma wpływu wartości stałych materiałowych.

W przykładzie wykorzystamy wyprowadzony w p. 5 wzór (5.2) na osiadanie powierzchni półprzestrzeni. Wykresy wykonamy dla $t=0$, $t=1$ s, $t=1$ h i $t \rightarrow \infty$.

Zanim jednak do tego przejdziemy, musimy ustalić wartości stałych ośrodka, określonych wzorami (1.4). Jak wynika z pracy BIOTA-WILLISA [4] interesujące nas stałe można wyznaczyć ze związków fizycznych, w których odkształcenia wyrażono przez cztery wartości pomiarowe: porowatość f , współczynnik ściśliwości próbki ω , współczynnik rozszerzalności objętościowej δ i współczynnik zawartości wody w porach γ .

Wartości współczynników ω , δ i γ podaje I. FATTA w pracy [9]. Zostały one ustalone dla piaskowca o porowatości $f=0,26$. Z rozważań FATTA wynika, że wartości współczynników ω , δ i γ zależne są od ciśnienia panującego na zewnątrz próbki

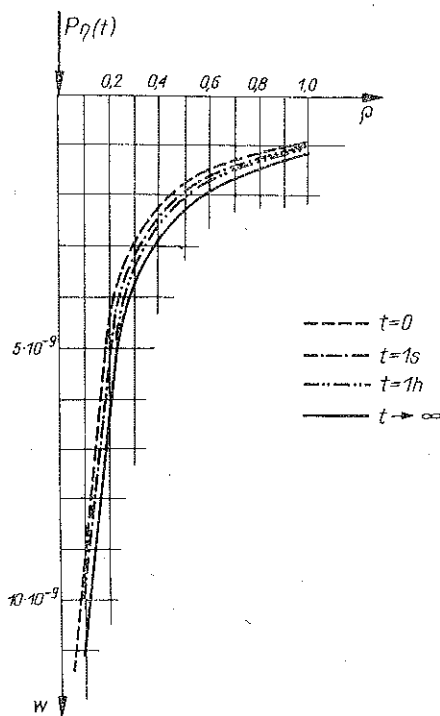
oraz w porach. Przytoczył on wyniki badań dla zakresu ciśnień od 70,4 kG/cm² do 985,6 kG/cm². Nas interesować będą wartości dotyczące ciśnień niższych. Podajemy je dla ciśnienia 140,8 kG/cm² w tablicy 1.

Tablica 1

ω	δ	γ	A	Q	R
34,7 10 ⁻⁶	3,1 10 ⁻⁶	17,1 10 ⁻⁶	-58838	8202	3394

(wymiar współczynników cm²/kG, wymiar A, Q i R — kG/cm²).

Aby wyznaczyć stałe M i N , musimy znać moduł sprężystości, współczynnik Poissona oraz współczynnik przepływu dla piaskowca. Wartości modułu sprężystości



Rys. 2

i współczynnika Poissona, podawane przez różnych autorów, wykazują dość znaczne różnice. W tej sytuacji do obliczeń przyjmujemy dane przytoczone przez SAŁUSTOWICZA [18], dotyczące piaskowców Zagłębia Donieckiego, ponieważ ten właśnie autor podaje interesujący nas współczynnik przepuszczalności. Należy podkreślić, że przyjęcie tych wartości jest w zasadzie przypadkowe. Wielkości współczynników podane przez FATTA zmuszeni jesteśmy przyjąć jako jedyne tego rodzaju w dostępnej nam literaturze. Dobieramy do nich jedynie brakujące wartości modułu sprężystości, współczynnika Poissona i współczynnika przepuszczalności, mimo że nie jesteśmy w stanie stwierdzić, czy budowa i własności mechaniczne piaskowców w obu przypadkach są identyczne.

Do obliczeń przyjmujemy wartości średnie: moduł sprężystości $E=372\,500$ kG/cm², współczynnik Poissona $\nu=0,15$ oraz współczynnik przepływu $c=50$ m/dobę i otrzymujemy $N=162\,000$ kG/cm², $M=-78\,659$ kG/cm². Dla tych

danych obliczono występujące we wzorze (5.2) wartości oznaczeń skracających. Po podstawieniu tych wartości do wzoru (5.2) oraz przyjęciu $r_0=10$ m otrzymujemy

$$(6.1) \quad w = 0,723 \cdot 10^{-9} P \left[\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \operatorname{erfc} \left(0,317 \frac{\rho}{\sqrt{t}} \right) + \right. \\ \left. + 0,512 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-0,1062 \frac{\rho^2}{t}} I_0 \left(0,1062 \frac{\rho^2}{t} \right) - 0,133 I_{0t} \right],$$

gdzie

$$(6.2) \quad I_{\rho r} = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{1}{\tau + 0,903 t} e^{-\frac{0,192 \rho^2}{\tau + 0,903 t}} d\tau, \quad \rho = \frac{r}{r_0}.$$

Występujące we wzorze (6.1) funkcje wyznaczamy za pomocą tablic liczbowych, przyjmując $\rho = 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0$. Całkę określoną wzorem (6.2) rozwiązujemy numerycznie metodą trapezów. Przyjmujemy przy tym dla $t = 1$ s przedział $\Delta t = 0,1$ s, a dla $t = 1$ h. $\Delta t = 360$ s.

Na rys. 2 pokazano wykonane na podstawie powyższych obliczeń wykresy osiadania powierzchni półprzestrzeni.

7. UWAGI KOŃCOWE

Rozwiązanie przeprowadzono dla przypadku obciążenia półprzestrzeni siłą skupioną. Oparto je na sformułowanej przez Biota teorii przepływu cieczy przez porowate ośrodki odkształcalne bez żadnych założeń upraszczających. Otrzymane rozwiązanie dla siły $P = 1$ jest funkcją Greena dla względnego osiadania powierzchni półprzestrzeni.

W ostatecznym wyniku otrzymano wzór na osiadanie powierzchni półprzestrzeni w stosunkowo prostej postaci [wzór (5.2)]. Na podstawie tego wzoru można wnioskować o zachowaniu się obciążonej powierzchni w czasie. W p. 6 podano przykład liczbowy oraz wykresy obrazujące osiadanie powierzchni w chwili czasu $t = 0, t = 1$ s, $t = 1$ h i $t \rightarrow \infty$. Obliczenia przeprowadzono przyjmując jako podłoże piaskowiec. Na podstawie analizy wzoru (5.2) oraz na podstawie wykresów można stwierdzić, że wyrażone nimi osiadanie ma w otoczeniu punktu $r = 0$ osobliwość typu $1/r$. Przy rozpatrywaniu osiadania jako funkcji czasu osobliwości nie występują. Osiadanie ma wartości skończone zarówno dla t skończonego jak i dla t dążącego do nieskończoności z wyjątkiem punktu $r = 0$.

McNAMEE i GIBSON podali rozwiązanie dla naszego przypadku obciążenia półprzestrzeni [15], ale dla ośrodka nieściśliwego. W związku z tym wyniki uzyskane przez McNAMEE i GIBSONA nie są porównywalne z wynikami niniejszej pracy.

Otrzymane rozwiązanie, jako funkcja Greena, może służyć do budowy rozwiązania dla dowolnie rozłożonego obciążenia brzegu.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. A. BIOT, *General theory of three-dimensional consolidation*, J. Appl. Phys., **12**, 155–164, 1941.
2. M. A. BIOT, *Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena*, J. Appl. Phys., **25**, 1385–1391, 1954.
3. M. A. BIOT, *General solutions of the equations of elasticity and consolidation of a porous material*, J. Appl. Phys., **23**, 91–96, 1956.
4. M. A. BIOT, D. G. WILLIS, *The elastic coefficients of the theory of consolidation*, J. Appl. Mech., **24**, 594–601, 1957.

5. W. DERSKI, *A method of solving of the system equations of consolidation theory*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **12**, 489 – 493, 1964.
6. W. DERSKI, I. KISIEL, *O warunkach początkowych w zagadnieniach teorii konsolidacji*, Arch. Hydrot., **16**, 1, 31 – 37, 1969.
7. G. DOETSCH, *Praktyka przekształcenia Laplace'a*, PWN, Warszawa 1964.
8. I. FATT, *Compressibility of sandstones at low to moderate pressures*, Bull. Amer. Ass. Petr. Geol., **42**, 8, 1958.
9. I. FATT, *The Biot-Willis elastic coefficients for a sandstones*, J. Appl. Mech., **26**, ser. E, 296 – 297, 1959.
10. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, изд. 4-е, Гос. Изд. Физ.-Мат. Лит., Москва 1962.
11. J. MANDEL, *Consolidation des sols*, Géotechnique, **7**, 3, 1953.
12. J. MANDEL, *Tassement d'un couche d'argile saturée d'eau sous effect d'une force concentrée a la surface du sol*, Proc. 3th. ICOMEF, **2**, 1953.
13. N. W. McLACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1964.
14. J. McNAMEE, R. E. GIBSON, *Displacement functions and linear transform applied to diffusion through porous elastic media*, J. Appl. Math., **13**, 98 – 111, 1960.
15. J. McNAMEE, R. E. GIBSON, *Plane strain and axially symmetric problems of the consolidation of a semi-infinite clay stratum*, J. Appl. Math., **13**, 210 – 227, 1960.
16. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.
17. J. OSIŃSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, WNT, Warszawa 1956.
18. A. SAŁUSTOWICZ, J. GALANKA, *Mechanika górotworu*, AGH, 1960.
19. W. I. SMIRNOW, *Matematyka wyższa*, **2**, PWN, Warszawa 1960.

Резюме

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ КОНСОЛИДАЦИИ В СЛУЧАЕ
ПОВЕРХНОСТИ ПРОНИЦАЕМОЙ ДЛЯ ЖИДКОСТИ

Предметом представленных рассуждений является консолидирующее полупространство нагруженное сосредоточенной силой приложенной к его поверхности. Рассуждения опираются на линейной теории течения жидкости через пористую деформируемую среду, сформулированную Биотом. В результате решения системы уравнений линейной теории консолидации получена формула позволяющая определить оседание поверхности полупространства в функции времени. В работе обсуждены начальные условия задачи, которые удовлетворены полученным решением. Известные решения принятым начальным условиям не удовлетворяют. В работе указана связь между полученным решением и решением Буссинеска, известным из теории упругости.

Полученное решение для $P=1$ является функцией Грина и как такое может служить для построения решения для произвольно распределенной на границе нагрузки, изменяющейся во времени.

Качественную иллюстрацию решения дают приведенные диаграммы, выполненные для песчаника насыщенного жидкостью для моментов времени $t=0$, $t=1$ сек, $t=1$ час и $t \rightarrow \infty$.

SUMMARY

AXI-SYMMETRIC PROBLEM OF CONSOLIDATION
IN THE CASE OF FLUID-PERMEABLE SURFACE

The object of considerations is a consolidating halfspace loaded at the surface by a concentrated force. The theory is based on a linear theory of fluid flow through a porous deformable medium as formulated by Biot. Solution of the system of equations of the linear consolidation theory yields

a formula making it possible to determine the settlement of a consolidating halfspace as a function of time. Initial conditions of the problem, satisfied by the solution, are discussed; the conditions are not fulfilled by the solutions known earlier. The relation between the solution presented and that by Boussinesq (known from elasticity) is shown.

At $P=1$ the solution derived becomes Green's function and thus may be used to construct the solutions for arbitrarily distributed, time-dependent loading of the surface.

A qualitative illustration of the solution is presented in the form of graphs made for fluid-saturated sandstone, for times $t=0$, $t=1$ s., $t=1$ h. and t tending to infinity.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 lutego 1973 r.
