

## OSIADANIE POWIERZCHNI PÓLPRZESTRZENI KONSOLIDUJĄCEJ POD DZIAŁANIEM OBCIĄŻENIA STYCZNEGO

ZENON KOŃCZAK (POZNAŃ)

### WSTĘP

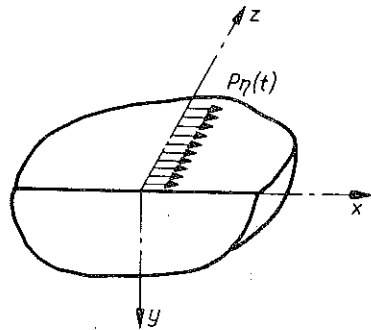
Celem niniejszej pracy jest wyprowadzenie wzoru na osiadanie powierzchni półprzestrzeni konsolidującej. Za podstawę rozważań przyjmujemy teorię przepływu cieczy przez porowate ośrodki odkształcalne, sformułowaną przez BIOTA [1].

Zajmiemy się przypadkiem płaskiego stanu odkształcenia szkieletu. Przyjmujemy, że rozważana półprzestrzeń obciążona jest w chwili  $t=0$  nagle przyłożonym do jej powierzchni obciążeniem stycznym, rozłożonym równomiernie wzdłuż linii. Założymy, że ciecz może wypływać swobodnie przez powierzchnię ograniczającą półprzestrzeń.

Za punkt wyjściowy przyjmujemy układ podstawowych równań liniowej teorii konsolidacji wyrażony w przemieszczeniach. Przy rozwiązaniu tego układu równań wykorzystamy metodę W. DERSKIEGO podaną w pracy [3].

### 1. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Przyjmujemy, że odkształcenie zachodzi równoległe do płaszczyzny  $xy$ . Oś  $y$  jest skierowana normalnie do płaszczyzny ograniczającej półprzestrzeń (rys. 1). Oś  $x$  leży w płaszczyźnie ograniczającej półprzestrzeń. Obciążenie jest przyłożone wzdłuż linii przechodzącej przez początek układu współrzędnych i ma zwrot zgodny z dodatnim zwrotem osi  $x$ .



Rys. 1

W przypadku płaskiego stanu odkształcenia układ podstawowych równań liniowej teorii konsolidacji wyrażony w przemieszczeniach ma postać [3]:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} NV^2u + (M+N) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} &= -\frac{H}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \\ NV^2v + (M+N) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= -\frac{H}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \quad H=Q+R, \quad M=\frac{AR-Q^2}{R}. \end{aligned}$$

Układ ten uzupełnia równanie przepływu cieczy przez porowaty ośrodek odkształcalny [3]

$$(1.2) \quad C\nabla^2\sigma = \frac{\dot{\sigma}}{R} - \frac{H\dot{\varepsilon}}{R}, \quad C = \frac{k}{f^2}, \quad \sigma = -pf.$$

W równaniach (1.1) i (1.2)  $u$  i  $v$  są współzrędnymi wektora przemieszczenia szkieletu,  $\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$  jest dylatacją szkieletu,  $C$  współczynnikiem przepuszczalności ośrodka dla cieczy,  $k$  współczynnikiem prędkości przepływu Darcy'ego,  $f$  porowatością rozważanego ośrodka,  $\sigma$  hydrostatycznym stanem naprężenia przenoszonym przez ciecz, a  $p$  parciem cieczy.  $A$ ,  $N$ ,  $Q$  i  $R$  są stałymi rozważanego ośrodka, określonymi przez BIOTA i WILLISA [2].

Układ równań (1.1) i (1.2) rozwiążemy przy następujących warunkach brzegowych:

$$(1.3) \quad \sigma(x, 0, t) = 0, \quad \sigma_{yy}(x, 0, t) = 0, \quad \sigma'_{yx}(x, 0, t) = -P\delta(x)\eta(t),$$

przy czym  $\delta(x)$  jest funkcją Diraca, a  $\eta(t)$  funkcją Heaviside'a.

Warunki początkowe sformułujemy w oparciu o pracę [4] W. DERSKIEGO i I. KISIELA. W naszych rozważaniach podobnie jak wspomniani autorzy przyjmujemy, że istnieją odkształcenia natychmiastowe i że wraz z nimi wystąpi natychmiastowe parcie cieczy  $\sigma$  różne od zera. A zatem

$$(1.4) \quad \sigma(x, y, 0) = \sigma^{(0)}(x, y), \quad u(x, y, 0) = u^{(0)}(x, y), \quad v(x, y, 0) = v^{(0)}(x, y).$$

Występujące w warunkach początkowych funkcje miejsca muszą spełniać układ równań

$$(1.5) \quad \begin{aligned} NV^2u^{(0)} + (M+N)\frac{\partial\varepsilon^{(0)}}{\partial x} &= -\frac{H}{R}\frac{\partial\sigma^{(0)}}{\partial x}, \\ NV^2v^{(0)} + (M+N)\frac{\partial\varepsilon^{(0)}}{\partial y} &= -\frac{H}{R}\frac{\partial\sigma^{(0)}}{\partial y}, \quad \nabla^2\sigma^{(0)} = 0. \end{aligned}$$

Rozwiązanie układu równań (1.5) musi spełniać warunki brzegowe (1.3).

Istnienie funkcji  $\sigma^{(0)}$ ,  $u^{(0)}$ ,  $v^{(0)}$  i  $\varepsilon^{(0)}$  można uwzględnić formłanie przy stosowaniu do układu równań (1.1) i (1.2) transformacji Laplace'a.

Po wykonaniu tej transformacji układ równań (1.1) i (1.2) przyjmuje postać

$$(1.6) \quad \begin{aligned} NV^2\tilde{u} + (M+N)\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial x} &= -\frac{H}{R}\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial x}, \\ NV^2\tilde{v} + (M+N)\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial y} &= -\frac{H}{R}\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial y}, \\ CV^2\tilde{\sigma} &= \frac{s}{R}\left(\tilde{\sigma} - \frac{1}{s}\sigma^{(0)}\right) - \frac{sH}{R}\left(\tilde{\varepsilon} - \frac{1}{s}\varepsilon^{(0)}\right), \end{aligned}$$

przy czym  $s = \gamma + i\beta$  jest zespolonym parametrem transformacji Laplace'a.

Rozwiązanie szczególne tego układu równań, odpowiadające funkcjom  $\sigma^{(0)}$  i  $\varepsilon^{(0)}$ , można przyjąć np. w postaci

$$(1.7) \quad \tilde{\sigma}^{(1)} = \frac{\sigma^{(0)}}{s}, \quad \tilde{\varepsilon}^{(1)} = \frac{\varepsilon^{(0)}}{s}.$$

Jak łatwo zauważyć [5]

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \tilde{\sigma}^{(1)} = \sigma^{(0)}, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} s \tilde{\varepsilon}^{(1)} = \varepsilon^{(0)}.$$

Rozwiązania szczególne (1.7) są tylko rozwiązaniami formalnymi, ponieważ nic nie wiemy o ich postaci. Ta postać jest określona przez rozwiązanie układu równań (1.5) i warunki brzegowe (1.3).

We wspomnianej już pracy [4] DERSKI i KISIEL wykazali, że rozwiązanie  $\sigma^{(0)}$ ,  $u^{(0)}$  i  $v^{(0)}$  otrzymuje się automatycznie mimo przyjęcia, że wartości tych funkcji są zerami w chwili  $t=0$ .

## 2. BUDOWA ROZWIĄZANIA

W dalszym ciągu będziemy się zajmować budową rozwiązania przetransformowanego układu równań (1.6), w których przyjmiemy  $\sigma^{(0)}=0$  i  $\varepsilon^{(0)}=0$ . Mamy zatem

$$(2.1) \quad \begin{aligned} NV^2 \tilde{u} + (M+N) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x} &= -\frac{H}{R} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial x}, \\ NV^2 \tilde{v} + (M+N) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial y} &= -\frac{H}{R} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial y}, \quad CV^2 \tilde{\sigma} = \frac{s \tilde{\sigma}}{R} - \frac{s H \tilde{\varepsilon}}{R}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie układu równań (2.1) musi spełniać przetransformowane warunki brzegowe (1.3), które po uwzględnieniu przedstawienia całkowitego funkcji Diraca mają postać

$$(2.2) \quad \tilde{\sigma}(x, 0, s) = 0, \quad \tilde{\sigma}_{,yy}(x, 0, s) = 0, \quad \tilde{\sigma}_{,xy}(x, 0, s) = -\frac{P}{2\pi s} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Układ równań (2.1) jest sprzężony za pośrednictwem funkcji  $\tilde{\varepsilon}$  i  $\tilde{\sigma}$ . Metodę rozprężenia takiego układu równań podał W. DERSKI [3]. Po zastosowaniu tej metody do układu równań (2.1) otrzymamy rozprężone równanie przepływu w postaci

$$(2.3) \quad \nabla^2 \nabla^2 \tilde{\sigma} = s K \nabla^2 \tilde{\sigma},$$

przy czym

$$K = \frac{R(M+2N)+H^2}{CR^2(M+2N)} = \frac{A+R+2(Q+N)}{C(AR-Q^2+2NR)}.$$

Rozwiązanie tego równania ma postać [3]

$$(2.4) \quad \tilde{\sigma} = \tilde{\varphi}_2 - \frac{\tilde{\varphi}_1}{sK},$$

przy czym  $\tilde{\varphi}_2$  jest rozwiązaniem równania Helmholtza

$$(2.5) \quad \nabla^2 \tilde{\varphi}_2 - sK \tilde{\varphi}_2 = 0,$$

a  $\tilde{\varphi}_1$  jest funkcją harmoniczną.

Funkcje  $\tilde{\varphi}_1$  i  $\tilde{\varphi}_2$  przyjmujemy w postaci całek wykładniczych Fouriera:

$$(2.6) \quad \tilde{\varphi}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha, s) e^{-\alpha y} e^{-i\alpha x} d\alpha$$

oraz

$$(2.7) \quad \tilde{\varphi}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha, s) e^{-y\sqrt{\alpha^2 + sK}} e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Po podstawieniu funkcji  $\tilde{\varphi}_1$  i  $\tilde{\varphi}_2$  wyrażonych wzorami (2.6) i (2.7) do wzoru (2.4) mamy

$$(2.8) \quad \tilde{\sigma} = \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha, s) e^{-y\sqrt{\alpha^2 + sK}} e^{-i\alpha x} d\alpha - \frac{1}{sK} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha, s) e^{-\alpha y} e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

$A(\alpha, s)$  i  $B(\alpha, s)$  są tutaj chwilowo nieznanymi funkcjami parametrów  $\alpha$  i  $s$ .

Wykorzystanie pierwszego z warunków brzegowych (2.2) prowadzi do związku

$$(2.9) \quad B(\alpha, s) = \frac{A(\alpha, s)}{sK},$$

co pozwala na wyeliminowanie  $B(\alpha, s)$  ze wzoru (2.8). Otrzymujemy

$$(2.10) \quad \tilde{\sigma} = \frac{1}{sK} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha, s) (e^{-y\sqrt{\alpha^2 + sK}} - e^{-\alpha y}) e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Dla zbudowania rozwiązania szczególnego równań przemieszczeniowych (2.1) wprowadzimy transformatę Laplace'a funkcji potencjału przemieszczenia dyfuzyjnego zdefiniowaną związkami

$$(2.11) \quad \tilde{u}_1 = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x}, \quad \tilde{v}_1 = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y}.$$

Po wykorzystaniu związków (2.11) układ równań (2.1) sprowadza się do jednego równania Poissona [3]:

$$(2.12) \quad \nabla^2 \tilde{\Phi} = -K_1 \tilde{\sigma}, \quad K_1 = \frac{H}{R(M+2N)}.$$

Rozwiązanie równania (2.12) ma postać [3]

$$(2.13) \quad \tilde{\Phi} = \frac{K_1}{sK} (\tilde{\varphi}_3 - \tilde{\varphi}_2),$$

przy czym  $\tilde{\varphi}_3$  jest funkcją biharmoniczną i taką, że

$$(2.14) \quad \nabla^2 \tilde{\varphi}_3 = \tilde{\varphi}_1.$$

Funkcję  $\tilde{\varphi}_3$  przyjmujemy w postaci następującej całki wykładniczej Fouriera:

$$(2.15) \quad \tilde{\varphi}_3 = \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha, s) \alpha y e^{-\alpha y} e^{-\alpha x} d\alpha.$$

Wykorzystując warunek (2.14) eliminujemy ze wzoru (2.15) nieznaną funkcję parametrów  $C(\alpha, s)$  i mamy

$$(2.16) \quad \tilde{\varphi}_3 = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{2\alpha} A(\alpha, s) e^{-\alpha y} e^{-\alpha x} d\alpha.$$

Po podstawieniu wyrażeń (2.7) i (2.16) do wzoru (2.13) oraz uwzględnieniu związku (2.9) otrzymujemy

$$(2.17) \quad \tilde{\Phi} = - \frac{K_1}{sK} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha, s) \left( \frac{1}{sK} e^{-y\sqrt{\alpha^2 + sK}} + \frac{y}{2\alpha} e^{-\alpha y} \right) e^{-\alpha x} d\alpha.$$

Za pomocą rozwiązania (2.11) nie możemy w ogólności spełnić wszystkich warunków brzegowych. Ponadto rozwiązanie to nie spełnia również wyjściowego układu równań (2.1). Celem spełnienia warunków brzegowych i równań (2.1) do rozwiązania szczególnego (2.11) dodamy rozwiązanie jednorodnego układu równań

$$(2.18) \quad N\nabla^2 \tilde{u}_2 + (M+N) \frac{\partial \tilde{e}_2}{\partial x} = 0, \quad N\nabla^2 \tilde{v}_2 + (M+N) \frac{\partial \tilde{e}_2}{\partial y} = 0.$$

Rozwiązanie układu równań (2.18) przyjmujemy w postaci transformaty Laplace'a funkcji GALERKINA [6] zakładając, że  $\tilde{\chi}_x = \tilde{\chi}$  oraz  $\tilde{\chi}_y = \tilde{\chi}_z = 0$ . W tym przypadku składowe stanu przemieszczenia określone są wzorami

$$(2.19) \quad \tilde{u}_2 = \frac{M+2N}{N} \nabla^2 \tilde{\chi} - \frac{M+N}{N} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial x^2}, \quad \tilde{v}_2 = - \frac{M+N}{N} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial x \partial y},$$

przy czym funkcja  $\tilde{\chi}$  jest funkcją biharmoniczną. Poszukiwane rozwiązanie układu równań przemieszczeniowych (2.1) ma zatem postać sumy

$$\tilde{u} = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2, \quad \tilde{v} = \tilde{v}_1 + \tilde{v}_2.$$

Aby suma ta była istotnie rozwiązaniem układu równań (2.1), musi być spełnione równanie przepływu (2.1). Wprowadza to dodatkowy warunek wiążący funkcję  $\tilde{\chi}$  z funkcją  $\tilde{\varphi}_1$ :

$$(2.20) \quad CR\tilde{\varphi}_1 + sH \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \tilde{\chi} = 0.$$

Funkcję  $\tilde{\chi}$  przyjmujemy w postaci całki wykładniczej Fouriera:

$$\tilde{\chi} = \int_{-\infty}^{\infty} [D(\alpha, s) + \alpha y E(\alpha, s)] e^{-\alpha y} e^{-\alpha x} d\alpha.$$

Wykorzystanie warunku (2.20) pozwala wyrazić funkcję  $E(\alpha, s)$  przez  $A(\alpha, s)$  w następujący sposób:

$$E(\alpha, s) = -\frac{CRA(\alpha, s)}{2His\alpha^3}.$$

Stąd

$$(2.21) \quad \tilde{\chi} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ D(\alpha, s) - \frac{CRy}{2His\alpha^2} A(\alpha, s) \right] e^{-\alpha y} e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

$D(\alpha, s)$  jest tutaj chwilowo nie znaną funkcją parametrów  $\alpha$  i  $s$ .

### 3. WYZNACZENIE TRANSFORMATY ROZWIĄZANIA

Funkcje (2.17) oraz (2.21) określają składowe stanu naprężenia i za ich pośrednictwem muszą spełniać przetransformowane warunki brzegowe (2.2). Warunki te, po wykorzystaniu związków fizycznych i geometrycznych dla ośrodka porowatego wypełnionego cieczą [1 i 3] oraz uwzględnieniu związków (2.11) i (2.19), prowadzą do układu równań

$$(3.1) \quad \left[ \frac{(M+2N)CR}{sH} - \frac{2NK_1}{s^2K^2} \right] A(\alpha, s) + 2(M+N)i\alpha^3 D(\alpha, s) = 0,$$

$$\left[ \frac{NK_1 i}{sK} - \frac{NCR}{sHi} - 2(M+N) \frac{CR}{sHi} - \frac{2NK_1 i}{s^2K^2} \alpha \sqrt{\alpha^2 + sK} \right] \times$$

$$\times A(\alpha, s) - 2(M+N)\alpha^3 D(\alpha, s) = -\frac{P}{2\pi s}.$$

Z równań (3.1) wyznaczmy funkcje  $A(\alpha, s)$  i  $D(\alpha, s)$ . Mianowicie po obustronnym pomnożeniu drugiego z nich przez  $i$  oraz dodaniu stronami otrzymujemy

$$(3.2) \quad A(\alpha, s) = \frac{PK^2 is}{4\pi NK_1 (a_1 s + \alpha^2 - \alpha \sqrt{\alpha^2 + sK})},$$

przy czym

$$(3.3) \quad a_1 = \frac{K[CRK(M+N) + HNK_1]}{2H NK_1}.$$

Funkcję  $D(\alpha, s)$  wyznaczmy z równania (3.1):

$$(3.4) \quad D(\alpha, s) = \frac{A(\alpha, s)}{2(M+N)i\alpha^3} \left[ \frac{2NK_1}{s^2K^2} \alpha^2 - \frac{CR(M+2N)}{sH} \right].$$

Funkcje określone wzorami (3.2) i (3.4) mają budowę niewygodną do dalszych operacji. Rozłożymy je więc na składniki proste:

$$(3.5) \quad A(\alpha, s) = \frac{A_0 is}{a_1 (s + \kappa\alpha^2)} + \frac{A_0 i\alpha^2}{a_1^2 (s + \kappa\alpha^2)} + \frac{A_0 i\alpha \sqrt{\alpha^2 + sK}}{a_1^2 (s + \kappa\alpha^2)},$$

przy czym

$$(3.6) \quad A_0 = \frac{PK^2}{4\pi NK_1}, \quad \kappa = \frac{2a_1 - K}{a_1^2}.$$

Wyznaczone wzorami (3.4) i (3.5) funkcje  $A(\alpha, s)$  i  $D(\alpha, s)$  podstawiamy do wyrażeń (2.17) i (2.21) określających transformaty funkcji potencjału oraz funkcję Galerkina. W celu wyznaczenia transformat przemieszczeń wykorzystujemy wzory (2.11) i (2.19). Po odpowiednim zróżniczkowaniu funkcji  $\tilde{\Phi}$  i  $\tilde{\chi}$  oraz po przeprowadzeniu redukcji otrzymujemy

$$(3.7) \quad \tilde{u} = \frac{K_1}{K^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha i}{s^2} A(\alpha, s) e^{-y\sqrt{\alpha^2+sK}} e^{-i\alpha x} d\alpha + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{s} A(\alpha, s) \left( A_1 y + \frac{A_2}{\alpha} \right) e^{-\alpha y} e^{-i\alpha x} d\alpha + \frac{M+N}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 D(\alpha, s) e^{-\alpha y} e^{-i\alpha x} d\alpha,$$

oraz

$$(3.8) \quad \tilde{v} = \frac{K_1}{K^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\alpha^2+sK}}{s^2} A(\alpha, s) e^{-y\sqrt{\alpha^2+sK}} e^{-i\alpha x} d\alpha + \\ + A_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\alpha, s)}{s} \left( y - \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\alpha y} e^{-i\alpha x} d\alpha - \frac{M+N}{N} \int_{-\infty}^{\infty} i\alpha^2 D(\alpha, s) e^{-\alpha y} e^{-i\alpha x} d\alpha,$$

przy czym

$$(3.9) \quad A_1 = \frac{K_1}{2K} + \frac{CR(M+N)}{2HN}, \quad A_2 = \frac{CR(M+2N)}{HN}.$$

#### 4. WYZNACZENIE FUNKCJI OSIADANIA POWIERZCHNI PÓLPRZESTRZENI

W dalszych rozważaniach interesować nas będzie wyłącznie przemieszczenie powierzchni w kierunku osi  $y$ . Na podstawie wzoru (3.8), po uwzględnieniu wyrażeń określonych wzorami (3.4) i (3.5), możemy napisać

$$(4.1) \quad [\tilde{v}]_{y=0} = \bar{A}_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ie^{-i\alpha x}}{\alpha(s+\kappa\alpha^2)} d\alpha + \bar{A}_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\alpha e^{-i\alpha x}}{s(s+\kappa\alpha^2)} d\alpha + \\ + \bar{A}_3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\sqrt{\alpha^2+sK}}{s(s+\kappa\alpha^2)} e^{-i\alpha x} d\alpha,$$

przy czym

$$(4.2) \quad \bar{A}_1 = \frac{A_0}{a_1} \left( \frac{CR}{2H} - \frac{K_1}{2K} \right), \quad \bar{A}_2 = \frac{A_0}{a_1^2} \left( \frac{CR}{2H} + \frac{K_1}{2K} - \frac{K_1}{K^2} a_1 \right), \\ \bar{A}_3 = \frac{A_0}{a_1^2} \left( \frac{CR}{2H} - \frac{K_1}{2K} + \frac{K_1}{K^2} a_1 \right).$$

Dla rozpatrywanego przypadku obciążenia funkcja osiadania powierzchni jest antysymetryczna względem osi pionowej oraz rzeczywista. Wobec tego, uwzględniając że

$$e^{-i\alpha x} = \cos(\alpha x) - i \sin(\alpha x),$$

wzór (4.1) piszemy w postaci

$$(4.3) \quad [\tilde{v}]_{y=0} = 2\bar{A}_1 \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha(s+\kappa\alpha^2)} d\alpha + 2\bar{A}_2 \int_0^\infty \frac{\alpha \sin(\alpha x)}{s(s+\kappa\alpha^2)} d\alpha + \\ + 2\bar{A}_3 \int_0^\infty \frac{\sqrt{\alpha^2+sK}}{s(s+\kappa\alpha^2)} \sin(\alpha x) d\alpha.$$

Po odwróceniu transformacji Laplace'a, wykonaniu całkowania względem  $\alpha$  oraz uwzględnieniu oznaczeń (3.3), (3.6) i (4.2) otrzymujemy

$$(4.4) \quad [v]_{y=0} = \frac{P}{8\pi N} \left\{ A\pi \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right) - \frac{M}{M+N} \pi \operatorname{sign} x + \frac{M+2N}{M+N} i[(1-\kappa K)I_{xt}^* - I_{xt}] \right\},$$

przy czym

$$(4.5) \quad A = \frac{M}{M+N} + \frac{2RN}{R(M+N)+H^2}, \\ I_{xt}^* = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau} \sqrt{\tau(1-\kappa K)+\kappa Kt}} \exp\left(-\frac{x^2 K}{4[\tau(1-\kappa K)+\kappa Kt]}\right) \times \\ \times \operatorname{erf}\left(\frac{ix\sqrt{K}}{2\sqrt{\tau(1-\kappa K)+\kappa Kt}}\right) d\tau,$$

$$(4.6) \quad I_{xt} = \int_0^t \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{x^2 K}{4\tau}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{ix\sqrt{K}}{2\sqrt{\tau}}\right) d\tau.$$

We wzorach (4.4), (4.5) i (4.6)  $\operatorname{erf} \xi$  oraz  $\operatorname{erf}(\zeta i)$  są funkcjami błędu odpowiednio argumentu rzeczywistego i urojonego; zdefiniowane są wzorami

$$\operatorname{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-z^2} dz, \quad \operatorname{erf}(\zeta i) = \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^\zeta e^{-z^2} dz.$$

Wykażemy obecnie, że występujące we wzorze (4.4) całki  $I_{xt}^*$  i  $I_{xt}$  są zbieżne dla  $t \geq 0$ . Do badania całek zastosujemy kryterium Cauchy'ego ([7], str. 253).

Przystąpimy do badania pierwszej z nich. Dla ułatwienia dowodu wykonamy podstawienie  $1/\sqrt{\tau} = \beta$ , które prowadzi do wyniku

$$I_{xt}^* = \int_{1/\sqrt{t}}^\infty \frac{2}{\beta^2 \sqrt{\frac{1-\kappa K}{\beta^2} + \kappa Kt}} \exp\left(-\frac{x^2 K}{4\left[\frac{1-\kappa K}{\beta^2} + \kappa Kt\right]}\right) \times \\ \times \operatorname{erf}\left(\frac{ix\sqrt{K}}{2\sqrt{\frac{1-\kappa K}{\beta^2} + \kappa Kt}}\right) d\beta.$$



Zgodnie z wymienionym kryterium zbadamy, czy granica wyrażenia podcałkowego ma wartość skończoną. Oczywiście

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[ \frac{2}{\sqrt{\frac{1-\kappa K}{\beta^2} + \kappa K t}} \exp\left(-\frac{x^2 K}{4\left[\frac{1-\kappa K}{\beta^2} + \kappa K t\right]}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{ix\sqrt{K}}{2\sqrt{\frac{1-\kappa K}{\beta^2} + \kappa K t}}\right) \right] = \\ = \frac{2}{\sqrt{\kappa K t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{ix}{2\sqrt{\kappa t}}\right) < \infty$$

dla wszystkich wartości  $t$ . A zatem całka jest bezwzględnie zbieżna.

Podobnie możemy wykazać zbieżność całki (4.6). Wykonujemy podstawienie  $x\sqrt{K}/2\sqrt{\tau} = \beta$ ; otrzymujemy

$$I_{xt} = \int_{\frac{x\sqrt{K}}{2\sqrt{\tau}}}^{\infty} \frac{2}{\beta} e^{-\beta^2} \operatorname{erf}(i\beta) d\beta.$$

Badając granicę wyrażenia podcałkowego stwierdzamy, że

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} [2\beta e^{-\beta^2} \operatorname{erf}(i\beta)] = \frac{2i}{\sqrt{\pi}} < \infty,$$

a więc całka (4.6) jest także bezwzględnie zbieżna.

Zajmiemy się teraz rozważaniem występujących we wzorze (4.4) całek dla różnych wartości zmiennej  $x$ . Łatwo zauważyć, że granice wyrażen podcałkowych całek (4.5) i (4.6) dążą do zera przy  $x \rightarrow 0$ . Dla wartości  $x$  różnych od zera całki (4.5) i (4.6) mają wartości skończone.

Obecnie sprawdzimy osiadanie wyrażone wzorem (4.4), gdy  $t \rightarrow 0$ . Wyżej wykazaliśmy, że całki (4.5) i (4.6) dla  $t=0$  dążą do zera. Występująca we wzorze (4.4) funkcja błędu dąży do jedności. Zatem przy  $t=0$  osiadanie określone wzorem (4.4) wynosi

$$(4.7) \quad [v]_{t=0} = \frac{PR}{4[R(M+N)+H^2]} \operatorname{sign} x.$$

Zbadamy teraz osiadanie wyrażone wzorem (4.7), gdy  $f \rightarrow 0$ . W tym celu wzór (4.7) napiszemy w postaci

$$[v]_{t=0} = \frac{P \operatorname{sign} x}{4\left[(M+N) + \frac{H^2}{R}\right]}.$$

Uwzględnienie równań określających stałe ośrodka [2] pozwala stwierdzić, że  $H^2/R=0$ . A zatem

$$(4.8) \quad [v]_{t=0} = \frac{P}{4(M+N)} \operatorname{sign} x.$$

W dalszym ciągu zbadamy przebieg osiadania określonego wzorem (4.4) dla  $t \rightarrow \infty$ . W tym celu ponownie zanalizujemy kolejno wyrażenia wchodzące w skład tego wzoru. Jak wiadomo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right] = 0.$$

Wyrażenie podcałkowe w całce  $I_{xt}^*$  dąży do zera, co wynika ze wzoru (4.5).

Zajmiemy się teraz całką (4.6). Przeprowadzenie dyskusji nad tą całką w postaci (4.6) jest trudne, w związku z czym musimy przedstawić ją w innej wygodniejszej postaci. Wyjdziemy ze wzoru (4.3). Całka (4.6) wynika z obliczenia ostatniego z wyrazów wzoru (4.3):

$$(4.9) \quad 2\bar{A}_3 \int_0^\infty \frac{\sqrt{\alpha^2 + sK}}{s(s + \kappa\alpha^2)} \sin(\alpha x) d\alpha.$$

Po zniesieniu niewymierności i odwróceniu transformacji Laplace'a z jednoczesnym zastosowaniem twierdzenia o splocie z (4.9) otrzymujemy

$$(4.10) \quad \frac{2\bar{A}_3}{\kappa\sqrt{K}\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{\alpha^2}{K}\tau} \sin(\alpha x) d\tau d\alpha - \frac{2\bar{A}_3}{\kappa\sqrt{K}\sqrt{\pi}} (1 - \kappa K) \times \\ \times \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{\alpha^2}{K}[(1 - \kappa K)\tau + \kappa K t]} \sin(\alpha x) d\tau d\alpha.$$

Interesująca nas całka (4.6) wynika z pierwszego wyrazu wyrażenia (4.10). Jeśli dokonamy w nim podstawienia  $\alpha\sqrt{\tau}/\sqrt{K} = \beta$  i wykonamy całkowanie względem  $\beta$ , to otrzymamy

$$(4.11) \quad \frac{2\bar{A}_3}{\kappa} \int_0^\infty \operatorname{erf} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{K}} \sqrt{t} \right) \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} d\alpha.$$

Łatwo stwierdzić już, że

$$(4.12) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2\bar{A}_3}{\kappa} \int_0^\infty \operatorname{erf} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{K}} \sqrt{t} \right) \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} d\alpha = \frac{P(M+2N)}{8N(M+N)} \operatorname{sign} x.$$

Zatem dla  $t \rightarrow \infty$  osiadanie powierzchni określone wzorem (4.4) wynosi

$$(4.13) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v = v_\infty = \frac{P}{4(M+N)} \operatorname{sign} x.$$

Otrzymane rozwiązanie pokrywa się z rozwiązaniem analogicznego zadania brzegowego teorii sprężystości [6] przy uwzględnieniu, że  $M$  i  $N$  odpowiadają stałym Lamégo  $\lambda$  i  $\mu$ . Wynika to z określenia stałych ośrodka [2].

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. A. BIOT, *General solutions of the equations of elasticity and consolidation of a porous material*, J. Appl. Phys., **23**, 91–96, 1956.
2. M. A. BIOT, D. G. WILLIS, *The elastic coefficients of the theory of consolidation*, J. Appl. Phys., **24**, 594–601, 1957.
3. W. DERSKI, *A method of solving of the system equations of consolidation theory*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **12**, 10, 1964.
4. W. DERSKI, I. KISIEL, *O warunkach początkowych w zagadnieniach teorii konsolidacji*, Arch. Hydr., **16**, 1, 31–37, 1969.
5. G. DOETSCH, *Praktyka przekształcenia Laplace'a*, PWN, 1964.
6. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, 1970.
7. W. I. SMIRNOW, *Matematyka wyższa*, PWN, **2**, 1960.

## Резюме

ОСЕДАНІЕ ПОВЕРХНОСТІ ПОЛУПРОСТРАНСТВА В УМОВИХ  
КОНСОЛІДАЦІЇ ПОД ВОДІЙСТВИЕМ КАСАТЕЛЬНОГО НАГРУЖЕННЯ

В работе рассмотрен случай плоского деформированного состояния грунтового скелета полупространства, нагруженного касательным усилием, приложенным к поверхности. Рассуждения основаны на линейной теории течения жидкости в пористых деформируемых средах, предложенной Био.

В результате решения системы уравнений линейной теории консолидации получена формула, определяющая оседание полупространства в функции времени. Выведена зависимость между полученным решением и решением для аналогичной краевой задачи в рамках теории упругости.

Полученное решение для единичной интенсивности нагрузки является функцией Грина и может быть использовано для построения решения при произвольном распределении нагрузки по краю полупространства и при её зависимости от времени.

## SUMMARY

## SELF-CONSOLIDATION OF A HALFSPACE UNDER TANGENTIAL LOAD

In the paper is considered the case of plane strain of the skeleton of a consolidating halfspace loaded by a tangential force at the surface. The considerations are based on the linear theory of flow of a liquid through porous, deformable media, as formulated by M. A. Biot. As a result of the solution of the linear consolidation theory, the formula is derived which determines the setting of the surface of a consolidation halfspace as a function of time. The solution is compared with the solution of an analogous boundary value problem of elasticity.

The solution derived corresponds to a unit load and constitutes a Green function; thus it may be used to the construction of solutions in the cases of arbitrary, also time-dependent, loading of the surface.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA  
INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 5 lutego 1973 r.*