

CAŁKOWE KRYTERIUM OCENY DYNAMICZNOŚCI OBIEKTÓW MECHANICZNYCH

CZESŁAW CEMPEL (POZNAŃ)

1. WSTĘP

W teorii regulacji automatycznej szeroko rozpowszechnione są kryteria całkowe oceny układów sterowania. Używa się ich do oceny procesów przejściowych [1 i 2] oraz do oceny reakcji układu na wymuszenie białym szumem. Reakcję tę określa się jako ruchliwość lub mobilność układu [3] lub, co wydaje się najwłaściwsze «podatność szerokopasmową». Powstaje pytanie, czy transpozycja tych metod na obiekty mechaniczne da kryterium oceny adekwatne do ich zachowania się pod wpływem możliwych obciążeń. Istotny jest również problem prostego eksperymentalnego określenia tego kryterium.

2. OCENA DYNAMICZNOŚCI PRZY WYMUSZENIACH KRÓTKOTRWAŁYCH

Rozważmy dowolny liniowy obiekt mechaniczny zredukowany do układu dyskretnego z wymuszeniem we współrzędnej x_s . Macierzowo-operatorowe równanie ruchu takiego obiektu może mieć postać

$$(2.1) \quad U(s)X(s) = F(s), \quad \begin{aligned} X(s) &= \text{col} \{x_1(s), \dots, x_n(s)\}, \\ F(s) &= \text{col} \{0, \dots, f_s(s), \theta, \dots, 0\}, \end{aligned}$$

gdzie s jest parametrem transformacji Laplace'a.

Zakładamy, że obiekt jest asymptotycznie stateczny, tzn. że wszystkie pierwiastki zespolone sprzężone macierzy dynamicznej $U(s)$ mają ujemne części rzeczywiste, $\text{Re } \lambda_r < 0$, $r = 1, \dots, n$. Transformate odpowiedzi obiektu w r -tej współrzędnej można obliczyć z (2.1) na podstawie wzorów Cramera:

$$(2.2) \quad x_r(s) = (-1)^{r+s} \frac{\Delta_{rs}(s)}{\Delta(s)} f_s(s) = \alpha_{rs}(s) f_s(s), \quad r = 1, \dots, n.$$

We wzorze tym $\Delta_{rs}(s)$ jest minorem macierzy $U(s)$, powstałym przez wykreślenie r -tej kolumny i s -tego wiersza, $\Delta(s)$ jej wyznacznikiem, a $\alpha_{rs}(s)$ operatorową receptancją obiektu mierzoną we współrzędnej r przy pobudzaniu we współrzędnej s -tej.

W przypadku optymalizacji całościowej obiektu dogodnie jest przyjąć miarę jego dynamiczności w postaci formy kwadratowej [4]

$$(2.3) \quad V^2 = \sum_1^n a_r x_r^2(t),$$

gdzie a_r oznacza współczynniki wagi kwadratów amplitud drgań przemieszczenia (prędkości lub przyspieszenia) poszczególnych współrzędnych obiektu. Forma kwadratowa (2.3) może przedstawiać energię sprężystą, kinetyczną, moc dysypowaną w obiekcie lub też może odzwierciedlać zagadnienie wibroizolacji siłowej, przemieszczeniowej itp.

Przy dowolnym charakterze procesu wymuszającego drgania $f(t)$, obliczenia za pomocą formy (2.3) mogą być bardzo złożone. Stąd też właściwą miarę dynamiczności obiektu dogodnie jest zdefiniować biorąc pod uwagę czas trwania τ procesu $f(t)$. Zanalizujemy ten fakt bardziej szczegółowo.

Weźmy wpieryw pod uwagę wymuszenia krótkotrwałe $f(t) \neq 0$, $0 < t \leq \tau$. Energię tego procesu obrazuje całka w dziedzinie czasu $\int_0^{\tau} f^2(t) dt < \infty$ i jak łatwo zauważyć przyjmuje ona zawsze wartości skończone. Na podstawie twierdzenia RAYLEIGHA [5] możemy przejść z dziedziny czasu do dziedziny częstości na podstawie wzoru

$$(2.4) \quad \int_0^{\tau} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(i\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |f(i\omega)|^2 d\omega < \infty,$$

przy czym wielkości $|f(i\omega)|^2$ przedstawia rozkład energii procesu w skali częstości i nazywana jest jego widmem energii, a $f(i\omega)$ jest transformatą Fouriera funkcji $f(t)$.

Ograniczoność energii procesu wejściowego przy założeniu obiektu statecznego implikuje ograniczoność całki z formy kwadratowej (2.3):

$$(2.5) \quad A = \int_0^{\tau} V^2 dt = \sum_1^n a_r \int_0^{\tau} x_r^2(t) dt < \infty.$$

Stosując do powyższego związku twierdzenie Rayleigha mamy

$$(2.6) \quad A = \sum_1^n a_r \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |x_r(i\omega)|^2 d\omega.$$

Jak wiadomo $x_r(i\omega)$ jest transformatą Fouriera odpowiedzi obiektu statecznego na wymuszenie o skończonej energii, wobec czego wyrażenie to można otrzymać wprost ze wzoru (2.2) przyjmując $s = i\omega$ [6]. W związku z tym otrzymujemy

$$(2.7) \quad A = \sum_1^n a_r \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\alpha_{rs}(i\omega)|^2 |f_s(i\omega)|^2 d\omega.$$

Obliczenie otrzymanego wskaźnika jakości obiektu dynamicznego wymaga znajomości modułu receptancji i widma energetycznego procesu wejściowego, co jest znacznie prostsze niż obliczenie formy kwadratowej (2.3). Ponieważ współczynniki wagi a_r nie zależą od parametrów układu, wobec tego do oceny dynamiczności obiektu przy dowolnym wymuszeniu krótkotrwałym istotne są całki

$$(2.8) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\alpha_{rs}(i\omega)|^2 |f_s(i\omega)|^2 d\omega = J_{rs}.$$

Geometryczną interpretację tych całek przedstawiono na rys. 1 jako iloczyn wspólnych pól pod krzywymi kwadratu modułu receptancji i widma energii.

Przy danych funkcjach podcałkowych (2.8) możemy te całki znaleźć za pomocą wzorów w pracy [7], a tym samym określić analitycznie wskaźnik dynamiczności obiektu A (2.7). Dalszym krokiem może być optymalizacja wskaźnika A w przestrzeni parametrów obiektu $\beta_1, \dots, \beta_{3n}$ podług zależności

$$(2.9) \quad \text{Min}_{(\beta_1, \dots, \beta_{3n})} \left[\sum_1^n a_r J_{rs} \right] = A_0(\beta_{10}, \dots, \beta_{3n0}),$$

$$a_i \leq \beta_i \leq b_i, \quad i = 1, \dots, 3n.$$

W efekcie optymalizacji otrzymamy obiekt o minimalnym procesie przejściowym przy danym wymuszeniu krótkotrwałym. To minimum może mieć istotne znaczenie z punktu widzenia dokładności działania, wibroizolacji, kumulacji uszkodzeń przy dużych poziomach obciążeń itp. Jeśli zakres możliwych typów obciążeń krótkotrwałych obiektu jest duży, to obliczenie całek (2.8) może być bardzo kłopotliwe. Na podstawie twierdzenia o wartości średniej możemy jednak napisać

$$(2.10) \quad J_{rs} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\alpha_{rs}(i\omega)|^2 |f_s(i\omega)|^2 d\omega \leq |f_s(i\omega_0)|^2 \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\alpha_{rs}(i\omega)|^2 d\omega,$$

$$|f_s(i\omega_0)|^2 \geq |f_s(i\omega)|^2, \quad 0 \leq \omega < \infty,$$

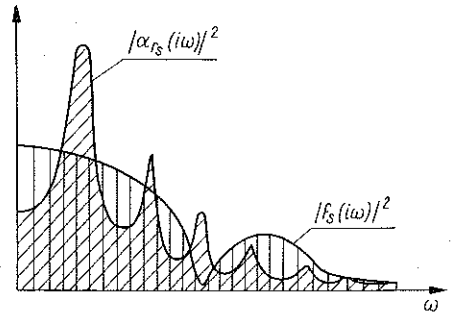
gdzie ω_0 jest wartością częstości, dla której energetyczne widmo wymuszenia ma swe maksimum.

Powyższe warunki oznaczają, że górna granica wartości całki nie zależy od rodzaju pobudzenia (od charakteru widma pobudzenia), lecz tylko od własności obiektu. Wobec tego minimum całki z kwadratu modułu receptancji daje minimum J_{rs} dla wszystkich możliwych rodzajów obciążeń. Ze względu na to całkę możemy uznać za istotne kryterium dynamiczności obiektu; przez analogię do terminologii w układach sterowania [3] nazwiemy ją mobilnością μ_{rs} :

$$(2.11) \quad \mu_{rs} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\alpha_{rs}(i\omega)|^2 d\omega, \quad J_{rs} \leq \mu_{rs} \text{Max}_{\omega} |f_s(i\omega)|^2.$$

Zauważmy jeszcze, że mobilność jest odpowiedzią obiektu na wymuszenie impulsem jednostkowym; gdyż dla $f_s(t) = \delta(t - t_0)$ mamy $|f_s(i\omega)|^2 = 1$ tak, że dla tego typu pobudzenia zachodzi równość $J_{rs} = \mu_{rs}$. Sytuacja ta jest odzwierciedleniem faktu, że każdy przebieg wymuszający można otrzymać jako granicę odpowiedniego ciągu impulsów jednostkowych.

Tak więc doszliśmy do stwierdzenia, że najlepszą miarą dynamiczności obiektu przy obciążeniach krótkotrwałych jest jego mobilność zdefiniowana wzorem (2.11), wskaźnik zaś jakości A (2.7) może być oszacowany od góry jako funkcja mobilności w odpowiednich współrzędnych (2.10).



Rys. 1

3. WYMUSZENIE DŁUGOTRWAŁE

Oprócz procesów wymuszających krótkotrwałych obiekt mechaniczny może być poddany wymuszeniu procesami o długim czasie trwania, $0 < \tau \leq \infty$. Energia tych procesów w sensie (2.4) jest nieskończona, lecz można w tym przypadku zdefiniować «średnią moc» (dla drgań jest to średni kwadrat amplitudy) procesu według zależności

$$(3.1) \quad f^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt < \infty.$$

Jak łatwo zauważyć, moc procesów krótkotrwałych w sensie (3.1) jest zerowa. Stosując do (3.1) twierdzenia Rayleigha w sensie granicznym mamy

$$(3.2) \quad f^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \int_0^\infty |f(i\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G(\omega) d\omega,$$

gdzie $G(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} |f(i\omega)|^2 / T$ jest gęstością widmową mocy procesu wymuszającego [8 i 9]. Przedstawia ona rozkład mocy procesu w skali częstości.

Przeprowadzając z kolei podobne rozważania dla procesów o skończonej mocy jak dla procesów o skończonej energii, na podstawie (2.7) otrzymamy

$$(3.3) \quad B = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{T} = \sum_1^n a_r \frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^\infty |\alpha_{rs}(i\omega)|^2 |f_s(i\omega)|^2 d\omega = \\ = \sum_1^n a_r \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |\alpha_{rs}(i\omega)|^2 G_s(\omega) d\omega.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$(3.4) \quad \bar{J}_{rs} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |\alpha_{rs}(i\omega)|^2 G_s(\omega) d\omega,$$

otrzymamy uogólnione kryterium dynamiczności obiektu mechanicznego przy wymuszeniu długotrwałym:

$$(3.5) \quad B = \sum_1^n a_r \bar{J}_{rs}.$$

Jak łatwo zauważyć z (3.5), (3.4), (2.2), wielkość B przedstawia ważoną sumę średnich kwadratów amplitud drgań w poszczególnych współrzędnych obiektu i może być przedmiotem minimalizacji w przestrzeni parametrów obiektu $\beta_1, \dots, \beta_{3n}$,

$$(3.6) \quad \text{Min}_{(\beta_1, \dots, \beta_{3n})} \left[\sum_1^n a_r \bar{J}_{rs} \right] = B_0(\beta_{10}, \dots, \beta_{3n0}), \quad a_i \leq \beta_i \leq b_i, \quad i=1, \dots, 3n.$$

Minimalizacja wskaźnika dynamiczności B wynika na ogół z tych samych powodów, co w przypadku obciążenia krótkotrwałego, co więcej, całki składowe wskaźników

A i B , (2.8) i (3.4), są tego samego rodzaju. Korzystając z twierdzenia o wartości średniej dla całki (3.4) mamy

$$(3.7) \quad \bar{J}_{rs} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\alpha_{rs}(i\omega)|^2 G_s(\omega) d\omega \leq \frac{G_s(\omega_0)}{\pi} \int_0^{\infty} |\alpha_{rs}(i\omega)|^2 d\omega = G_s(\omega_0) \mu_{rs},$$

$$G_s(\omega_0) \geq G_s(\omega), \quad 0 \leq \omega < \infty,$$

czyli jej wartość maksymalna zależy podobnie jak dla (2.11) od mobilności obiektu μ_{rs} .

Tak więc doszliśmy do stwierdzenia, że odpowiedź obiektu mechanicznego na dowolne wymuszenie krótkotrwałe lub długotrwałe determinowana jest tym samym całkowym wskaźnikiem jakości, jakim jest mobilność μ_{rs} . Tym samym optymalizacja odpowiedzi obiektu sprowadza się do określenia optymalnych mobilności.

4. OKREŚLENIE MOBILNOŚCI OBIEKTU

Rozważmy zagadnienie wyznaczania mobilności obiektu μ_{rs} w dowolnych współrzędnych r, s . Z równości definicyjnych dla wymuszenia krótkotrwałego (2.11) i długo trwałego (3.7) wynika, że wielkości te można wyznaczyć stosując w pierwszym przypadku proces o stałym widmie energii, w drugim zaś proces o stałym widmie mocy. Odpowiada to odpowiednio pobudzeniu impulsem Diraca oraz białym szumem. Weźmy więc pod uwagę obiekt pobudzony we współrzędnej s wymuszeniem:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} f_{s1}(t) = S_0 \delta(t - t_0) &\rightarrow |f_{s1}(i\omega)|^2 = S_0^2, \\ f_{s2}(t) &\rightarrow G_{s2}(\omega) = G_0, \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \end{aligned}$$

Obliczając odpowiednio całki (2.11) i (3.7) lub wskaźniki A i B dla jednej współrzędnej mamy

$$(4.2) \quad \begin{aligned} A = \bar{J}_{rs} &= \frac{S_0^2}{\pi} \int_0^{\infty} |\alpha_{rs}(i\omega)|^2 d\omega = S_0^2 \mu_{rs}, \\ B = \bar{J}_{rs} = \bar{x}_r^2 &= \frac{G_0}{\pi} \int_0^{\infty} |\alpha_{rs}(i\omega)|^2 d\omega = G_0 \mu_{rs}. \end{aligned}$$

Jak widać, między wskaźnikami A i B dla dowolnego obiektu istnieje prosta odpowiedź. Przyjmując zaś impuls jednostkowy $S_0 = 1$ i jednostkową gęstość widmową mocy (lub dzieląc przez S_0^2 i G_0), możemy z pomiaru tych wielkości wyznaczyć wartość μ_{rs} . Przy okazji warto wspomnieć, że jeśli $\alpha_{rs}(i\omega)$ jest receptancją obiektu, to jednostki wielkości występujących w (4.2) są następujące:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} [|\alpha_{rs}(i\omega)|] &= \frac{m}{N}, \quad [S_0] = Ns, \quad [A] = m^2 s, \\ [G_0] &= \frac{N^2}{Hz}, \quad [\bar{x}_r^2] = m^2, \quad [B] = m^2, \quad [\mu_{rs}] = \frac{m^2}{sN^2}. \end{aligned}$$

Wróćmy jednak do zagadnienia określenia tej wielkości. Zwróćmy przy tym uwagę na fakt, że wymuszenia (4.1) określające prosty sposób pomiaru mobilności

(4.2), nie dadzą się jednak zrealizować fizycznie: pierwsze ze względu na zerowy czas trwania impulsu, a drugie ze względu na nieskończony przedział częstotliwości widma G_0 . W praktycznej realizacji tych wymuszeń impuls ma skończony czas trwania $\sigma \neq 0$, a gęstość widmowa szumu ma ograniczone pasmo $G_0 \neq 0$, $0 \leq \omega \leq \omega_g$. Tak więc wymuszenia dające się zrealizować fizycznie zamiast (4.1) będą miały postać

$$(4.4) \quad \begin{aligned} f_{s1}(t) &= f_0 \varphi(\tau, t), & |f_{s1}(i\omega)|^2 &= f_0^2, \\ f_{s2}(t) &\rightarrow G_{s2}(\omega) = G_0, \end{aligned}$$

gdzie $0 \leq \omega \leq \omega_g$.

Interesujące jest pytanie, jaki błąd w określeniu mobilności za pomocą (4.2) spowoduje zmiana granic całkowania, wynikająca z wymuszeń o ograniczonym widmie mocy i energii (4.4). Weźmy więc pod uwagę całkę występującą we wzorach (4.2) w przedziale $[0, \omega_g]$. Uwzględniając wzór na receptancję (2.2) możemy napisać

$$(4.5) \quad |\alpha_{rs}(i\omega)|^2 = \left| \frac{\Delta_{rs}(i\omega)}{A(i\omega)} \right|^2 = \left| \frac{\Delta_{rs}(i\omega)}{(\omega_1^2 + 2i\xi_1\omega_1\omega - \omega^2) \dots (\omega_n^2 + 2i\xi_n\omega_n\omega - \omega^2)} \right|^2.$$

Wiadomo, że dla wielomianów o współczynnikach rzeczywistych $|W(i\omega)|^2 = W(i\omega)W(-i\omega)$. Uwzględniając to i pamiętając, że stopień wielomianu licznika nie jest większy od $n-2$, mianownik zaś nie większy od n oraz że $\xi_k < 1$, $k=1, \dots, n$, możemy dokonać rozkładu (4.5):

$$(4.6) \quad |\alpha_{rs}(i\omega)|^2 = \frac{\Delta_{rs}(i\omega)\Delta_{rs}(-i\omega)}{[(\omega - \omega^2)^2 + 4\xi_1^2\omega_1^2\omega^2] \dots [(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_n^2\omega_n^2\omega^2]} = \\ = \frac{D_1^{rs} + \omega^2 C_1^{rs}}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_1^2\omega_1^2\omega^2} + \dots + \frac{D_n^{rs} + \omega^2 C_n^{rs}}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_n^2\omega_n^2\omega^2}.$$

W takim razie

$$(4.7) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_g} |\alpha_{rs}(i\omega)|^2 d\omega = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_g} \frac{(D_k^{rs} + \omega^2 C_k^{rs}) d\omega}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_k^2\omega_k^2\omega^2}.$$

Całkę stojącą pod znakiem sumy łatwo wyznaczyć otrzymując [10]

$$(4.8) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_g} \frac{(D_k^{rs} + \omega^2 C_k^{rs}) d\omega}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_k^2\omega_k^2\omega^2} = \frac{D_k^{rs}}{4\xi_k\omega_k^3} I_1\left(\frac{\omega_g}{\omega_k}, \xi_k\right) + \frac{C_k^{rs}}{4\xi_k\omega_k} I_2\left(\frac{\omega_g}{\omega_k}, \xi_k\right),$$

gdzie

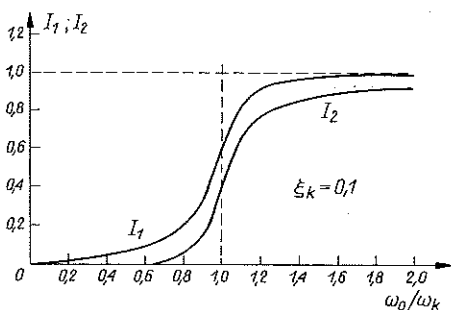
$$I_1\left(\frac{\omega_g}{\omega_k}, \xi_k\right) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\xi_k \frac{\omega_g}{\omega_k}}{1 - \left(\frac{\omega_g}{\omega_k}\right)^2} + \frac{\xi_k}{2\pi\sqrt{1-\xi_k^2}} \ln \frac{1 + \left(\frac{\omega_g}{\omega_k}\right)^2 + 2\sqrt{1-\xi_k^2} \frac{\omega_g}{\omega_k}}{1 + \left(\frac{\omega_g}{\omega_k}\right)^2 - 2\sqrt{1-\xi_k^2} \frac{\omega_g}{\omega_k}},$$

$$I_2\left(\frac{\omega_g}{\omega_k}, \xi_k\right) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\xi_k \frac{\omega_g}{\omega_k}}{1 - \left(\frac{\omega_g}{\omega_k}\right)^2} - \frac{\xi_k}{2\pi\sqrt{1-\xi_k^2}} \ln \frac{1 + \left(\frac{\omega_g}{\omega_k}\right)^2 + 2\sqrt{1-\xi_k^2} \frac{\omega_g}{\omega_k}}{1 + \left(\frac{\omega_g}{\omega_k}\right)^2 - 2\sqrt{1-\xi_k^2} \frac{\omega_g}{\omega_k}}.$$

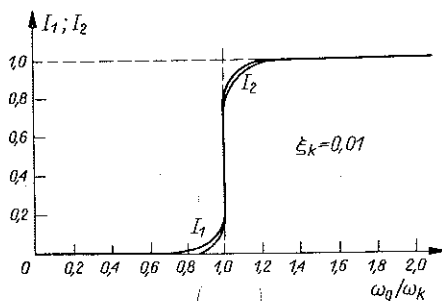
Zachowanie się funkcji granic I_1 i I_2 jako funkcji ω_g/ω_k i stopnia tłumienia ξ_k przedstawiono na rys. 2 i 3. Z rysunków i z analizy wzorów (4.8) wynika, że funkcje granic mają następujące własności:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} I_1 \left(\frac{\omega_g}{\omega_k}, \xi_k \right) &= \begin{cases} 1, & \frac{\omega_g}{\omega_k} \rightarrow \infty, \xi_k \neq 0, \\ \approx 1, & \frac{\omega_g}{\omega_k} > 2, \xi_k < 0,1. \end{cases} \\ I_2 \left(\frac{\omega_g}{\omega_k}, \xi_k \right) & \end{aligned}$$

Tak więc dla $\omega_g/\omega_k > 2$ i dla powszechnie spotykanych w dynamice układów mechanicznych przedziałów stopni tłumienia $\xi_k = 0,1$ do $0,01$ — funkcje granic I_1 i I_2 są prawie równe jedności, przybliżając się do niej asymptotycznie w miarę wzrostu argumentu ω_g/ω_k .



Rys. 2



Rys. 3

Biorąc obecnie pod uwagę powyższe własności funkcji granic (4.9) oraz wzory (4.8), (4.7) i (4.2) możemy napisać wzory na określenie mobilności obiektu mechanicznego jako funkcji i swych parametrów.

Dla wymuszeń definicyjnych (4.1)

$$(4.10) \quad \mu_{rs} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\alpha_{rs}(i\omega)|^2 d\omega = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4\xi_k \omega_k} \left[\frac{D_k^{rs}}{\omega_k^2} + C_k^{rs} \right]$$

oraz dla wymuszeń realizowanych fizycznie (4.4)

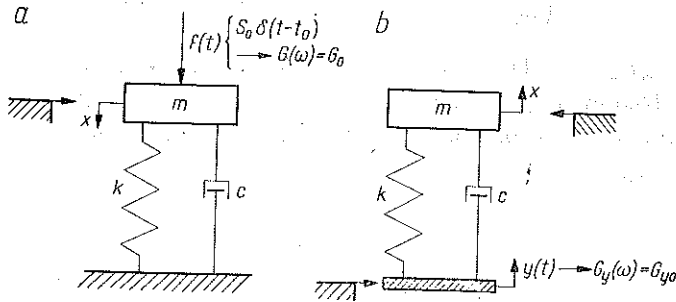
$$(4.11) \quad \mu_{rs} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\alpha_{rs}(i\omega)|^2 d\omega \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_g} |\alpha_{rs}(i\omega)|^2 d\omega, \quad \omega_g > 2\omega_n.$$

Ze wzorów tych wynika, że wartość mobilności, określona za pomocą białego szumu i szumu pasmowego, jest prawie taka sama, jeśli tylko górna granica pasma szumowego ω_g jest większa co najmniej dwukrotnie od największej częstości własnej obiektu ω_n . Podobne stwierdzenie odnosi się do widma energetycznego pojedynczego impulsu.

Ponadto wzór (4.10) pozwala stwierdzić, jaki przyczynęk do ogólnej mobilności obiektu dają drgania z poszczególnymi częstościami $\omega_k, k=1, \dots, n$. Zależność ta

(4.10) może być bardzo pomocna przy optymalizacji obiektu, gdyż wielkości ξ_{ck} , ω_k , można łatwo wyznaczyć pomiarowo, a z wymiaru wielkości $[D_k^{rs}] = (ms^{-2} N^{-1})^2 = kg^{-2}$, $[C_k^{rs}] = (ms^{-1} N^{-1})^2 = s^2 kg^{-2}$ wynika, że współczynniki te obrazują wpływ rozkładu mas, sztywności i tłumienia na ruch w k -tej postaci drgań obiektu.

W celu ilustracji powyższych wyników obliczmy wskaźniki dynamiczności A i B , mobilności oraz współczynniki D_k^{rs} , C_k^{rs} dla dwu wariantów pracy układu z rys. 4.



Rys. 4

Łatwo sprawdzić, że transmitancja przemieszczenia x układu z rys. 4a wynosi

$$(4.12) \quad \alpha_{11}(i\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + i\omega c}$$

Wobec tego obliczając wskaźniki A i B (4.2) za pomocą wzorów podanych w pracy [7] mamy

$$(4.13) \quad A = S_0^2 \frac{1}{2ck}, \quad B = \bar{x}^2 = G_0^2 \frac{1}{2ck}, \quad \mu_{11} = \frac{1}{2ck}$$

Tak więc mobilność układu o jednym stopniu swobody, która określa amplitudę drgań B przy wymuszeniu szerokopasmowym i szybkość zanikania procesu przejściowego A przy wymuszeniu impulsowym, zależy wyłącznie od wielkości tłumienia i sprężystości w układzie. Zwróćmy jeszcze uwagę na fakt, że wprowadzając częstości drgań układu $\omega_1^2 = k/m$ do wyrażenia na mobilność (4.13) mamy $\mu_{11} = 1/m^2 \cdot 1/4\xi_1 \omega_1^3$; skąd $D_1^{11} = 1/m^2$. Przechodząc do układu z rys. 4b przy wymuszeniu kinematycznym, jako transmitancję przemieszczenia x i kwadrat jej modułu otrzymamy

$$(4.14) \quad \beta_{11}(i\omega) = \frac{k + i\omega c}{k - m\omega^2 + i\omega c}, \quad |\beta_{11}(i\omega)|^2 = \frac{\omega_1^4 + 4\xi_1^2 \omega_1^2 \omega^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)^4 + 4\xi_1^2 \omega_1^2 \omega^2},$$

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \frac{c}{m} = 2\xi_1 \omega_1.$$

Porównanie ogólnego wzoru na mobilność układu (4.10) i (4.7) z powyższymi wzorami daje

$$(4.15) \quad \mu_{11} = \frac{1}{4\xi_1 \omega_1} \left[\frac{D_1^{11}}{\omega_1^2} + C_1^{11} \right], \quad D_1^{11} = \omega_1^4, \quad C_1^{11} = 4\xi_1^2 \omega_1^2.$$

W takim razie wskaźnik dynamiczności układu B wyniesie

$$(4.16) \quad B = \bar{x}^2 = G_{y0} \mu_{11} = G_{y0} \frac{\omega_1}{4\xi_1^2} [1 + 4\xi_1^2] = \frac{1}{2} G_{y0} \left[\frac{k}{c} + \frac{c}{m} \right].$$

Z powyższego wyniku widać, że amplituda drgań układu (wskaźnik B) przy kinematycznym wymuszeniu szerokopasmowym, jak i mobilność zależą od trzech parametrów układu m, k, c . Jeśli m jest np. masą amortyzowanego obiektu, to łatwo sprawdzić, że minimum przemieszczenia otrzymamy dla $c^2 = km$, tzn. dla optymalnej mobilności $\mu_{11 \text{ opt}} = \sqrt{k/m}$; wtedy

$$B = \bar{x}_{\text{min}}^2 = G_{y0} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Stosując otrzymany wynik np. do amortyzacji pojazdów kołowych możemy w świetle powyższych rozważań stwierdzić, że jeśli tylko widmo profilu drogi ma częstotść graniczną $\omega_g > 2\omega_1$, to minimum amplitudy drgań otrzymamy dla tłumienia krytycznego w układzie, gdyż $C^2 = km = C_{kr}^2$. Podobne stwierdzenie odnosi się do minimum procesu przejściowego w układzie przy wymuszeniu pojedynczym impulsem, którego widmo energetyczne jest płaskie w granicach $\langle 0, \omega_g \rangle$, gdzie $\omega_g > 2\omega_1$.

Z przytoczonych wyżej przykładów wynika, że wprowadzone pojęcie mobilności jako podatności szerokopasmowej charakteryzuje dobrze zachowanie się obiektu przy wymuszeniach szerokopasmowych i może być podstawą do jego optymalizacji. Stąd też istotnej wagi nabiera zagadnienie pomiaru mobilności, a także zagadnienie generacji wymuszenia testowego, realizowanego fizycznie.

5. WYMUSZENIE PRÓBKOWANE

W monografii [3] wykazano, że biały szum można traktować jako przypadkowy dotok impulsów jednostkowych o średniej zerowej. Z drugiej strony twierdzenie o próbkowaniu [5] mówi, że każdy proces o ograniczonym widmie $0 \leq \omega \leq \omega_g$ może być odwzorowany przez swe wartości, brane w punktach o odległości czasowej nie przekraczającej $\theta \leq \pi/\omega_g$. Ponieważ w naszym wypadku zamiast szumu białego można użyć szumu pasmowego $0 \leq \omega \leq \omega_g$, przeto możemy go aproksymować potokiem impulsów prostokątnych naprzemiennych o czasie trwania τ i postaci

$$(5.1) \quad f(t) = f_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [H(t - n\theta) - H(t - n\theta - \tau)], \quad H(y) = \begin{cases} 1, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

Transformacja Laplace'a tego procesu impulsowego przedstawia się następująco:

$$(5.2) \quad f(s) = f_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-sn\theta} \frac{1 - e^{-s\tau}}{s}.$$

Przebieg obliczeń zmiernych do gęstości widmowej przedstawiono niżej:

$$\begin{aligned}
 |f(i\omega)|^2 &= f_0^2 \left(\sum_{r=0}^{l \rightarrow \infty} (-1)^r e^{-i\omega r \theta} \frac{[1 - e^{-i\omega \tau}]}{i\omega} \right) \left(\sum_{n=0}^{l \rightarrow \infty} (-1)^n e^{i\omega n \theta} \frac{[1 - e^{i\omega \tau}]}{-i\omega} \right) = \\
 (5.3) \quad &= f_0^2 \frac{\sin^2 \frac{\omega \tau}{2}}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2} \left\{ l + \sum_r \sum_{n \neq r}^{l \rightarrow \infty} (-1)^{r+n} \cos \omega(n-r) \theta \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |f(i\omega)|^2 = \\
 &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l\theta} \left\{ l + \sum_r \sum_{n \neq r}^{l \rightarrow \infty} (-1)^{r+n} \cos \omega(n-r) \theta \right\} f_0^2 \frac{\sin^2 \frac{\omega \tau}{2}}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2} = \\
 &= f_0^2 \frac{\sin^2 \frac{\omega \tau}{2}}{\theta \left(\frac{\omega}{2}\right)^2} \left\{ 1 + \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \sum_r \sum_{n \neq r}^l (-1)^{r+n} \cos \omega(n-r) \theta \right\} = \\
 &= f_0^2 \frac{\sin^2 \frac{\omega \tau}{2}}{\theta \left(\frac{\omega}{2}\right)^2} = \frac{(f_0 \tau)^2}{\theta} \frac{\sin^2 \frac{\omega \tau}{2}}{\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)^2}.
 \end{aligned}$$

Jeśli teraz obierzemy czas próbkowania θ taki, że $\theta < \pi/\omega_g$, a czas trwania impulsu τ taki, że $\sin^2 \omega \tau / 2 / (\omega \tau / 2)^2 \approx 1$, $0 \leq \omega \leq \omega_g$, to gęstość widmowa w tym zakresie będzie stała i wyniesie

$$(5.4) \quad G(\omega) \approx G_0 = \frac{(f_0 \tau)^2}{\theta} = \frac{S_0^2}{\theta}, \quad 0 \leq \omega \leq \omega_g.$$

Tak więc wykazaliśmy, że zamiast szumu pasmowego można do określenia mobilności wykorzystać ciąg impulsów prostokątnych naprzemiennych o określonym czasie powtarzania θ i czasie trwania τ . Fakt ten ma istotne znaczenie z punktu widzenia generacji procesu wymuszającego, gdyż w świetle powyższego zamiast szumu pasmowego można do określenia mobilności użyć odpowiedniego ciągu uderzeń dwustronnych.

6. ZAKOŃCZENIE

Na podstawie powyższych rozważań można dojść do wniosku, że wskaźniki całkowite, a w szczególności mobilność obiektu mechanicznego, mogą być podstawą do jego oceny dynamicznej. Wyprowadzony ogólny wzór na mobilność dowolnego obiektu informuje o wielkości przyczynków wnoszonych przez poszczególne częstotliwości drgań ω_k i stopnie tłumienia ξ_k , $k = 1, \dots, n$. Okazuje się również, że wielkość tę można wyznaczyć stosując procesy wymuszające o ograniczonym widmie, a w przypadku najprostszym ciąg dwustronnych uderzeń.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. М. А. Аизерман, *Теория автоматического регулирования*, Наука, с. 250 – 282, Москва 1966.
2. P. NOWACKI, L. SZKLARSKI, H. GÓRECKI, *Podstawy teorii układu regulacji automatycznej*, tom I, 237 – 248, PWN, Warszawa 1970
3. Ф. А. Михайлов и другие, *Динамика непрерывных систем с детерминированными и случайными параметрами*, Наука, 302, 389, Москва 1971.
4. А. А. Фельдбаум, *Интегральные критерии качества регулирования*, Автоматика и телемеханика, 1, 1948.
5. R. BRACEWELL, *Przekształcenie Fouriera i jego zastosowanie*, WNT, 128, 213, Warszawa 1968.
6. J. OSIŃSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, WNT, Warszawa 1965.
7. В. С. Пугачев, *Теория случайных функций*, Физматгиз, 863, 1962.
8. W. W. SOŁODNIKOW, *Dynamika statystyczna liniowych układów sterowania automatycznego*, WNT, 108, Warszawa 1964.
9. Е. Скучик, *Простые и сложные колебательные системы*, МИР, 353, Москва 1971.
10. J. В. ROBERTS, *The response of a simple oscillator to band-limited noise*, J. Sound. Vibr., 2, 115 – 126, 1963.

Резюме

КРИТЕРИЙ ДИНАМИЧНОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

В статье предложен новый интегральный критерий, оценивающий динамичность механических объектов, и называемый критерием мобильности. Показано, что мобильность может быть экспериментально определена при помощи вынуждающих процессов с ограниченным спектром. В простейшем случае это может быть последовательность двусторонних ударов.

SUMMARY

INTEGRAL ESTIMATION CRITERION OF DYNAMICS OF MECHANICAL OBJECTS

In this paper is proposed a new integral criterion of dynamics of mechanical objects, called the "mobility criterion". It is shown that mobility may be determined experimentally by means of excitation processes with a limited frequency band, in the simplest case consisting of a series of two-sided impacts

INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI POZNAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 czerwca 1972 r.