

PODSTAWY TEORII PLASTYCZNEGO PŁYNIĘCIA
CIAŁ DYSKRETYZOWANYCH

MICHAŁ KLEIBER (WARSZAWA)

WSTĘP

Stworzenie metody elementów skończonych, wiążącej w sposób ścisły formułowanie równań ośrodka ze sposobem ich rozwiązywania, jest niewątpliwie przykładem bardzo udanego spojrzenia na mechanikę ciał odkształcalnych. Metoda ta jest obecnie szeroko stosowana w wielu inżynierskich problemach dotyczących bardzo szerokiego zakresu zagadnień, dając przeważnie rozwiązania o zupełnie dostatecznej dokładności. Doceniając korzyści płynące ze stosowania tej metody nie można jednakże nie dostrzec również jej wad. W metodzie elementów skończonych bowiem precyzję matematyczną zastępować należy w wielu przypadkach inżynierską intuicją, co, aczkolwiek daje dotychczas dobre rezultaty, trudno uznać za sytuację zadowalającą. Dlatego też wszelkie prace zmierzające do uściślenia podstaw metody oraz umożliwiające skuteczną ocenę dokładności rozwiązań należy uznać za bardzo potrzebne. Ostatnio ścisły i precyzyjny formalizm w tego typu zagadnieniu podany został w pracach [1 - 5]. Rozpatruje się w nich tzw. ciała dyskretyzowane jako pewne modele ośrodka ciągłego, otrzymane w procesie «dyskretyzacji». Opis ośrodka przy użyciu wielkości «dyskretnych» (tj. przy dokonanej odpowiednio podziale ośrodka na elementy) jest mniej szczegółowy niż przy użyciu do opisu funkcji ciągłych (choć tak szczegółowy, jak tego zażądamy), ale równie ogólny: wszystkie własności materiału są odpowiednio uwzględniane w obu modelach. Różnice polegają raczej na formalnym aspekcie, przeniesienie zaś pojęć z modelu ciągłego na dyskretny jest w wielu przypadkach oczywiste i łatwe. Pewne argumenty przemawiające za stosowaniem metod dyskretyzacyjnych są zupełnie ogólnej natury: matematyczne narzędzia algebry wydają się być efektywniejsze od metod rachunku różniczkowego i całkowego, poza tym są one niewątpliwie korzystniejsze w obliczeniach numerycznych. W teorii plastyczności dochodzi jeszcze jeden ważny argument, wynikający z faktu, że teoria ta korzysta zarówno z równań jak i z nierówności algebraicznych. Własności i procedury rozwiązujące układy algebraicznych równań i nierówności są zaś ostatnio przedmiotem skutecznych badań kilku gałęzi nowoczesnej matematyki, np. teorii programowania, teorii gier i teorii badań operacyjnych.

W świetle tych uwag wydaje się więc celowe rozwinięcie mechaniki ciał dyskretyzowanych i późniejsze wykorzystanie rezultatów matematycznej teorii programowania i dziedzin pokrewnych.

Zauważmy, że jako szczególnie ważny przykład zastosowania mechaniki ciał dyskretyzowanych uznać należy zagadnienia dotyczące ciał opisywanych za pomocą funkcji niegładkich lub nawet nieciągłych, jakimi są np. powłoki siatkowe (ruszty, ramy itp.) [7–9].

Wyprowadzone równania ośrodka dyskretyzowanego zastosowano dotychczas do rozwiązań wielu zadań z zakresu teorii sprężystości [4]. Próbie rozszerzenia teorii na zagadnienia związane z teorią plastycznego płynięcia materiałów i teorią nośności granicznej konstrukcji poświęcona jest praca niniejsza.

2. PODSTAWOWE POJĘCIA I RÓWNANIA RUCHU DLA CIAŁ DISKRETYZOWANYCH

Dzieląc myślowo rozpatrywany ośrodek ciągły na otwarte i rozłączne podzbiory (tzw. elementy skończone) otrzymujemy punkt wyjścia do dalszych rozważań prowadzących do pojęcia ciała dyskretyzowanego. Zakładamy, że ruch każdego elementu skończonego może być z dostateczną dokładnością opisany za pomocą tzw. funkcji kształtu [6] przez ruch pewnej skończonej liczby cząstek materialnych, należących zwykle do domknięcia tego elementu. Te materialne cząstki nazwiemy cząstkami ciała dyskretyzowanego. Dowolną cząstkę oznaczmy przez d , a zbiór wszystkich cząstek ciała dyskretyzowanego przez D . Zakładamy ponadto:

1) rozkład masy w ośrodku ciągłym może być aproksymowany przez masy skoncentrowane jedynie w cząstkach ciała dyskretyzowanego;

2) każda cząstka ma n stopni swobody (gdzie n jest takie samo dla dowolnego $d \in D$), a współrzędne uogólnione $q^a(d, \tau)$ ($a=1, \dots, n$) cząstki $d \in D$ są dla każdego $d \in D$ składowymi wektora w n -wymiarowej przestrzeni wektorowej V^n ;

3) cząstki $d \in D$ oddziałują na siebie wyłącznie w pewnych podzbiorach $E \subset D$, z których każdy jest przyporządkowany wzajemnie jednoznacznie jednemu elementowi skończonemu i wyznacza jego ruch za pomocą danej funkcji kształtu.

Zbiór cząstek określających ruch danego elementu skończonego nazwiemy elementem dyskretnym i oznaczamy przez E , a zbiór wszystkich elementów dyskretnych przez ε , $E \in \varepsilon$.

Z punktu widzenia geometrii ciało dyskretyzowane jest więc parą (D, ε) , gdzie D jest zbiorem cząstek, a ε pokryciem D elementami dyskretnymi $E \in \varepsilon$. Oznaczmy ponadto przez ε_d zbiór wszystkich elementów dyskretnych zawierających cząstkę d , przez $E_{d'} = \{d', f_A d'\}$ zbiór złożony z d' oraz $f_A d'$, $A=I, II, \dots, m$, a przez D_d podzbiór D pokryty przez ε_d .

Niech $T_a(d', \tau)$ oznacza uogólnioną siłę wewnętrzną, działającą na cząstkę d' z elementu dyskretnego $E_{d'} \in \varepsilon_d$; $-T_a^A(d', \tau)$ uogólnioną siłę wewnętrzną działającą na cząstkę $f_A d'$ z elementu $E_{d'} \in \varepsilon_d$; $-t_a(d, \tau)$ wypadkową siłę wewnętrzną działającą na element dyskretny E_d , pochodzącą z oddziaływań między cząstkami w E_d :

$$(2.1) \quad t_a(d, \tau) = T_a(d, \tau) - \sum_{A=1}^m T_a^A(d, \tau), \quad m = \max(\bar{\bar{E}}_d, \bar{\bar{e}}_d),$$

$r_a(d, \tau)$ oznacza wartość uogólnionej siły bezwładności,

$$r_a(d, \tau) = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial T}{\partial q^a}$$

dla danego ruchu $q^a(d, \tau)$ cząstki $d \in D$, $T = T(d, q(d, \tau), \dot{q}(d, \tau))$ energię kinetyczną cząstki $d \in D$, $f_a(d, \tau)$ zewnętrzną siłę uogólnioną działającą na $d \in D$.

Mamy wtedy [1], równania ruchu w postaci

$$(2.2) \quad \Delta_A T_a^A + t_a + f_a = r_a, \quad d \in D.$$

Elementarną pracę wykonywaną przez siły wewnętrzne w danym elemencie dyskretnym E napisać można w postaci [5]

$$\begin{aligned} \delta L(E) &= -T_a(d, \tau) \delta q^a(d, \tau) + \sum_A T_a^A(d, \tau) \delta q^a(f_A d, \tau) = \\ &= -T_a(d, \tau) \delta q^a(d, \tau) + \sum_A T_a^A(d, \tau) \delta q^a(d, \tau) + \sum_A T_a^A(d, \tau) \delta \Delta_A q^a(d, \tau). \end{aligned}$$

Wykorzystując (2.1) otrzymamy

$$(2.3) \quad \delta L = T_a^A \delta \Delta_A q^a - t_a \delta q^a.$$

Postać ta jest niezmiennicza względem grupy transformacji lokalnego układu współrzędnych [5].

3. RÓWNIANIA KONSTITUTYWNE

Równania konstytutywne dla dyskretyzowanego ciała sprężystego zostały sformułowane w pracy [1] oraz wielokrotnie wykorzystywane w pracach [7-8]⁽¹⁾. Postulując istnienie potencjału sprężystego $\varepsilon = \varepsilon(d, q^a(d, \tau), \Delta_A q^a(d, \tau))$ otrzymujemy [1-5]

$$(3.1) \quad T_a^A(d, \tau) = \frac{\partial \varepsilon(d, \dots)}{\partial \Delta_A q^a(d, \tau)}, \quad t_a(d, \tau) = -\frac{\partial \varepsilon(d, \dots)}{\partial q^a(d, \tau)}.$$

Obierzmy współrzędne uogólnione $q^a(d, \tau)$ cząstki $d \in D$ w taki sposób, aby warunek $q^a = 0$ odpowiadał stanowi naturalnemu⁽²⁾ oraz przyjmijmy, że pod danym obciążeniem odchylenia od stanu naturalnego są niewielkie (przyjmujemy więc teorię geometrycznie liniową).

Powyższe założenia usprawiedliwiają postulowanie następującej równości, podstawowej dla proponowanej teorii:

$$(3.2) \quad q^a = q_{\text{spr}}^a + q_{\text{pl}}^a,$$

⁽¹⁾ Pełny wykaz literatury znajduje się w pracy [4].

⁽²⁾ Jeśli cząstkę d potraktujemy jako ciało sztywne, to $a=1, 2, \dots, 6$, a współrzędne uogólnione $q^a(d, \tau)$ można np. przyjąć następująco (por. (4.1)):

$$q^a(d, \tau) = \delta_k^a u^k(d, \tau) + \delta_k^{a-3} v^k(d, \tau), \quad k=1, 2, 3,$$

gdzie u^k, v^k są składowymi wektorów przemieszczenia i małego obrotu cząstki d , odniesionymi do prostokątnego układu współrzędnych w przestrzeni fizycznej.

zachodzącej dla każdej cząstki $d \in D$. Wielkości $q_{\text{spr}}^a(d, \tau)$ opisują tu ruch wywołujący w ciele dyskretnym efekty sprężyste, a $q_{\text{pl}}^a(d, \tau)$ efekty plastyczne (nieodwracalne). Postulat (3.2), z którego wynika w ramach teorii liniowej, że odkształcenie całkowite jest sumą odkształcenia sprężystego i plastycznego, jest analogiczny do przyjmowanego w klasycznej teorii małych przemieszczeń sprężysto-plastycznych⁽³⁾.

Rozwiązanie problemu polega w tej sytuacji na określeniu deformacji plastycznej i dodaniu jej do deformacji sprężystej, obliczonej z układu równań (2.1), (3.1). Z (3.2) wynika

$$(3.3) \quad \Delta_A q^a(d, \tau) = \Delta_A q_{\text{spr}}^a(d, \tau) + \Delta_A q_{\text{pl}}^a(d, \tau).$$

Aby określić plastyczne odkształcenia danego elementu skończonego, należy przy danej funkcji kształtu znać uogólnione przemieszczenia q_{pl}^a odpowiednich cząstek d , $f_A d$ ($A=I, \dots, m$) ciała dyskretyzowanego, czyli funkcję $q_{\text{pl}}^a(d, \tau)$ i jej przyrosty $\Delta_A q_{\text{pl}}^a(d, \tau)$.

W celu określenia funkcji $q_{\text{pl}}^a(d, \tau)$ i $\Delta_A q_{\text{pl}}^a(d, \tau)$ (dalej ograniczymy się jedynie do zagadnień quasi-statycznych) wprowadzimy pojęcia dyskretnego warunku plastyczności i dyskretnego potencjału plastycznego. Przyjmijmy, że dla każdego elementu dyskretnego $E \in \varepsilon$ można określić skalarną, różniczkowalną funkcję w postaci $\Phi = \Phi(d, T_a^A(d, \tau), t_a(d, \tau))$, $d \in E$, taką, że $\Phi \leq 0$, przy czym

$$(3.4) \quad \Phi < 0,$$

gdy element E może być traktowany jako sprężysty;

$$(3.5) \quad \Phi = 0, \quad \dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial T_a^A} \dot{T}_a^A + \frac{\partial \Phi}{\partial t_a} \dot{t}_a = 0,$$

gdy nastąpiło uplastycznienie elementu E i mamy proces obciążenia;

$$(3.6) \quad \dot{\Phi} = 0, \quad \Phi < 0,$$

gdy element jest odciążany ze stanu plastycznego (i zachowuje się w sposób sprężysty).

Zwróćmy uwagę, że w tym miejscu dokonujemy jedynego przybliżenia w stosunku do klasycznej teorii, stwierdzenie bowiem o uplastycznieniu się elementu E nie jest jednoznaczne i zależy od przyjętej postaci funkcji Φ (tzn. dla danego klasycznego warunku plastyczności, np. Treski czy Hubera-Misesa można tu wprowadzić wiele różnych funkcji Φ , opisujących uplastycznienie całego elementu dyskretnego). Pomimo że w wielu szczególnych przypadkach (por. p. 4) problem ustalenia postaci funkcji Φ daje się łatwo rozwiązać, a przy dostatecznie gęstym podziale na elementy skończone jego wpływ na rozwiązanie powinien być niewielki, to jednak sprawa ta w konkretnych zagadnieniach brzegowych wymaga niewątpliwie dalszych badań. Zaznaczaliśmy poprzednio, że wielkości q^a , $\Delta_A q^a$ traktujemy jako składowe wektorów z n -wymiarowej przestrzeni V^n , a wielkości T_a^A , t_a jako składowe wekto-

⁽³⁾ Taka addytywność nie zachodzi dla dużych przemieszczeń sprężysto-plastycznych przy zwykłych definicjach miar odkształceń sprężystych i plastycznych (por. [11 i 12]).

rów z przestrzeni V^{*n} . Przyjmijmy dla wygody w dalszych rozważaniach następujące oznaczenia:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} (q^a, \Delta_1 q^a, \dots, \Delta_m q^a) &= (q^a, \Delta_\Lambda q^a) \in V^{(\Lambda+1)m} = \mathcal{K}, \\ &\Lambda=1, \dots, m \\ (t_a, T_a^1, \dots, T_a^m) &= (t_a, T_a^\Lambda) \in V^{(\Lambda+1)m} = \mathcal{K}^*. \\ &\Lambda=1, \dots, m \end{aligned}$$

Warunek plastyczności $\Phi = \Phi(d, \dots)$ możemy wówczas interpretować jako powierzchnię w przestrzeni \mathcal{K}^* . Przy przyjętych oznaczeniach na analogicznej drodze do drogi stosowanej w klasycznej teorii plastyczności możemy dojść do sformułowania podstawowych własności dyskretyzowanego ciała plastycznego. W szczególności z założenia o stateczności materiału, które przybierze tu postać

$$(3.8) \quad \dot{T}_a^\Lambda \Delta_\Lambda \dot{q}_{pl}^a - t_a \dot{q}_{pl}^a = 0$$

oraz z (3.5)₂ wynikają równania

$$(3.9) \quad \Delta_\Lambda \dot{q}_{pl}^a = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial T_a^\Lambda}, \quad \dot{q} = -\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial t_a},$$

gdzie λ jest skalarnym mnożnikiem. Równanie (3.9) przedstawia tzw. stowarzyszone prawo płynięcia w ujęciu dyskretyzowanym, które stwierdza, że powierzchnia płynięcia plastycznego Φ jest potencjałem dla uogólnionych prędkości odkształceń.

Z (2.3) mamy

$$(3.10) \quad L_{pl} = T_a^\Lambda \Delta_\Lambda \dot{q}_{pl}^a - t_a \dot{q}_{pl}^a = \left(T_a^\Lambda \frac{\partial \Phi}{\partial T_a^\Lambda} + t_a \frac{\partial \Phi}{\partial t_a} \right) \lambda > 0,$$

gdź prędkość zmiany energii odkształcenia plastycznego powinna być dodatnia przy obciążeniu ze względu na nieodwracalność odkształceń plastycznych. Jeżeli założymy, że powierzchnia płynięcia w przestrzeni \mathcal{K}^* a) jest wypukła, b) otacza początek układu współrzędnych (odpowiadający stanowi beznaprężeniowemu), to

$$T_a^\Lambda \frac{\partial \Phi}{\partial T_a^\Lambda} + t_a \frac{\partial \Phi}{\partial t_a} > 0 \quad \text{przy} \quad \dot{\Phi} = 0.$$

Stąd oraz z (3.10) wynika, że

$$\lambda = 0, \quad \text{gdy} \quad \Phi < 0 \quad \text{lub} \quad \dot{\Phi} = 0 \quad \text{i} \quad \dot{\Phi} < 0;$$

$$\lambda > 0, \quad \text{gdy} \quad \Phi = 0 \quad \text{i} \quad \dot{\Phi} = 0.$$

Dodajmy, że powierzchnia $\Phi(d_1, \dots) = 0$ w przestrzeni \mathcal{K}^* niekoniecznie musi mieć jednoznacznie określone pochodne $\partial \Phi / \partial t_a$, $\partial \Phi / \partial T_a^\Lambda$. W takim przypadku można przeprowadzić takie samo rozumowanie jak w klasycznej teorii plastyczności [10].

We wprowadzonym wyżej ujęciu formalnym można również sformułować wszystkie definicje i twierdzenia znane w klasycznej teorii nośności granicznej. I tak np. pole naprężeń uogólnionych $T_a^\Lambda(d)$ i $t_a(d)$, $d \in D$ nazwiemy statycznie dopuszczalnym, jeśli spełnione są następujące warunki:

a) T_a^Λ i t_a spełniają dla wszystkich $d \in D$ równania równowagi (2.2), a na brzegu D odpowiednie warunki brzegowe [4];

b) dla wszystkich $d \in D$ spełniony jest warunek

$$\Phi(d, T_a^A, t_a) \leq 0.$$

Jak widać, w definicji tej nie występują w ogóle wielkości uogólnionych przemieszczeń q^a i $\Delta_A q^a$. Wykorzystując twierdzenia teorii nośności granicznej [10], na podstawie tego faktu możemy oszacować rzeczywistą wartość obciążenia granicznego konstrukcji bez rozpatrywania kinematyki zagadnienia (statyczna metoda określania nośności granicznej). Przykłady poszukiwania obciążenia granicznego tą metodą podamy w następnym rozdziale.

4. PRZYKŁADY ROZWIĄZAŃ W TEORII NOŚNOŚCI GRANICZNEJ CIAŁ DYSKRETYZOWANYCH

Na podstawie wprowadzonych wyżej pojęć zajmiemy się analizą nośności granicznej płyt i rusztów. W tym celu napiszemy najpierw równania równowagi (2.2) dla przypadku zagadnienia płaskiego z obciążeniem prostopadłym do płaszczyzny konstrukcji, czyli dla tzw. zagadnienia «płytowego». Podstawiając do (2.2) następujące wielkości [8]:

$$\begin{aligned} T_a^A &= \delta_a^k t_k^A + \delta_{a-3}^k m_k^A, \\ t_a &= \delta_{a-3}^k \varepsilon_{km}^n l_A^m t_n^A, \\ f_a &= \delta_a^k f_k + \delta_{a-3}^k m_k, \\ q^a &= \delta_k^a u^k + \delta_k^{a-3} v^k, \\ a &= 1, \dots, 6, \quad k = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (4.1)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_A t_k^A + f_k &= 0, \\ \bar{\Delta}_A m_k^A + \varepsilon_{km}^n l_A^m t_n^A + m_k &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Wszystkie wielkości odniesione są teraz do kartezjańskiego prostokątnego układu współrzędnych w przestrzeni fizycznej.

Wprowadzając ogólny układ współrzędnych [2] oraz oznaczając bazy w każdej z przestrzeni $V_d^n(d)$ przez $\mathbf{g}_1(d)$, $\mathbf{g}_2(d)$, $\mathbf{n}(d)$, otrzymamy równania równowagi opisujące zagadnienie płytowe w postaci [8]

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_A t^A + f &= 0, \\ \bar{\delta}_A m^{KA} + e_{,M}^K l_A^M t^A + m^K &= 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

gdzie

$$\begin{aligned} t_k^A &= t^{KA} g_{Kk} + t^A n_k, \\ m_k^A &= m^{KA} g_{Kk} + m^A n_k, \\ l_A^k &= l_A^K g_K^k + l_A n^k, \\ f_k &= f^K g_{Kk} + f n_k, \\ m_k &= m^K g_{Kk} + m n_k, \\ e_{,M}^K &= \varepsilon_{km}^n g^{Kk} g_M^m n_n, \quad K = 1, 2, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Symbol $\bar{\delta}_A$ oznacza operator różnicowania absolutnego w dwuwymiarowej podprzestrzeni przestrzeni $V_d^3(d)$ [2].

Równania równowagi (4.2) [a zatem również równania (4.3)] można napisać w innej, równoważnej postaci, nieco inaczej definiując składowe stanu odkształcenia [4, 7 i 8].

Tę postać równań równowagi przytoczymy również, niekiedy bowiem jest ona wygodniejsza w zastosowaniach do konkretnych problemów:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \bar{\delta}_A t^A + f &= 0, \\ \bar{\delta}_A n^{KA} + \frac{1}{2} e_{,M}^K (l_A^M t^A + \bar{l}_A^M t^A) + m^K &= 0, \end{aligned}$$

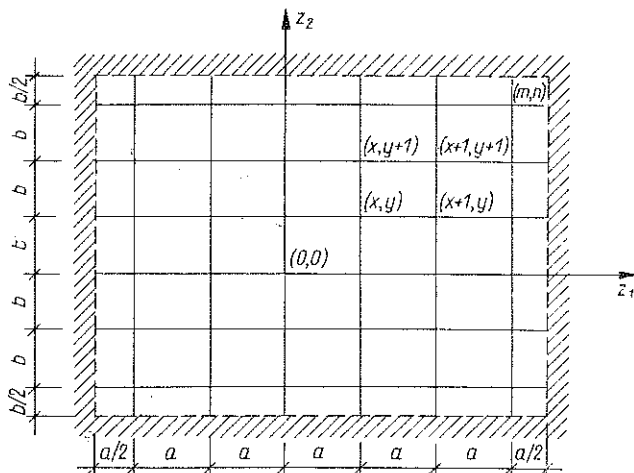
gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(d) &= \varphi(f_{-A} d), \\ \bar{l}_A^M(d) &= \bar{l}_A^m(d) g_m^M(d), \\ n^{KA} &= m^{KA} - \frac{1}{2} e_{,M}^K t^A l_A^M. \end{aligned}$$

oraz gdzie $\varphi: D \rightarrow R$ oznacza dowolną funkcję rzeczywistą.

4.1. Ruszt prostokątny zbudowany z dwu rodzin prostopadłych belek

Jako pierwszy przykład zastosowania powyższej teorii rozpatrzmy prosty ruszt prostokątny (rys. 1).



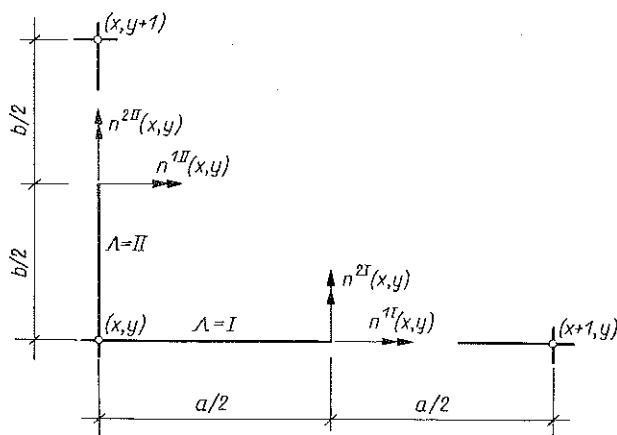
Rys. 1

Założmy, że belki są przegubowo podparte na brzegach, a sztywno połączone ze sobą w węzłach rusztu. Przyjmijmy ponadto dla ustalenia uwagi, że osie układu współrzędnych przebiegają wzdłuż belek (rys. 1), a każda z obu rodzin $A=I$, $A=II$ ma parzystą liczbę równoodległych od siebie belek⁽⁴⁾.

⁽⁴⁾ Rozpatrzenie przypadku, w którym w jednej lub w obu rodzinach jest nieparzysta liczba belek, nie przedstawia żadnych trudności.

Problem określania intensywności obciążenia granicznego dla takiej konstrukcji był rozpatrywany w pracach [13 i 14]. Podane tam rozwiązania otrzymano jednakże przy bardzo silnym założeniu upraszczającym, zakładając brak sztywności skrętnej w belkach rusztu. W ten sposób otrzymana tam wartość obciążenia granicznego musi być znacznie mniejsza od obciążenia rzeczywistego.

Skorzystajmy w naszych rozważaniach z układu równań (4.5). Składowe t^A , n^{kA} mają w tym przypadku prosty sens fizyczny: są one składowymi sił wewnętrznych w środkowych przekrojach belek obu rodzin (rys. 2).



Rys. 2

Z równań (4.5), eliminując siły poprzeczne t^A otrzymamy w formie rozwiniętej następujące równanie⁽⁵⁾:

$$(4.6) \quad \frac{1}{b} \bar{\Delta}_{II}^2 n^{1II} + \bar{\Delta}_I \bar{\Delta}_{II} \left(\frac{1}{b} n^{1I} - \frac{1}{a} n^{2II} \right) - \frac{1}{a} \bar{\Delta}_I^2 n^{2I} = qab,$$

gdzie q jest równomiernym obciążeniem rusztu wyrażonym w kG/m^2 , przekazywanym wyłącznie na węzły konstrukcji. Rozkład momentów zginających i skręcających w środkowych przekrojach odcinków belek rusztu przyjmiemy w następującej postaci (można sprawdzić, że obrane funkcje dają dla praktycznie stosowanych rusztów statycznie dopuszczalne pola momentów):

$$(4.7) \quad \begin{aligned} n^{2I} &= m_0^I (1 - \xi^2), & n^{1II} &= -m_0^{II} (1 - \eta^2), \\ n^{1I} &= \tilde{m}_0^I \xi \eta, & n^{2II} &= -\tilde{m}_0^{II} \xi \eta, \end{aligned}$$

gdzie $\xi = x/m$, $\eta = y/m$, $2m$ oznacza liczbę belek w rodzinie II-ej, $2n$ liczbę belek w rodzinie I-ej, m_0^A graniczny moment zginający w belkach rodziny Λ -ej, $\Lambda = I, II$ oraz \tilde{m}_0^A graniczny moment skręcający w belkach rodziny Λ -ej, $\Lambda = I, II$.

⁽⁵⁾ Zwróćmy uwagę na podobieństwo tego wzoru do klasycznego równania równowagi elementu płyty, powstającego z równań równowagi po wyeliminowaniu sił poprzecznych. Inne znaki przy składnikach po lewej stronie wzoru (4.6) wynikają z przyjętej tu konwencji znakowania.

Łatwo stwierdzić, analizując rys. 1 i 2 oraz wzór (4.7), że przyjęte pole momentów spełnia następujące warunki stanu granicznego:

- 1) osiągnięcia przez momenty zginające w środkach rozpiętości belek rusztu odpowiednich wartości granicznych, charakteryzujących obie rodziny;
- 2) osiągnięcia przez momenty skręcające wartości granicznych w tych przekrojach belek obu rodzin, które są najbliższe narożom rusztu.

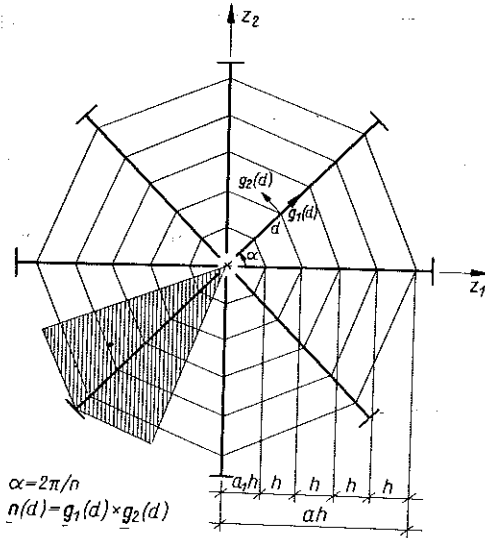
Podstawiając (4.7) do (4.6) otrzymamy po prostych rachunkach

$$(4.8) \quad q = \frac{1}{a^2 b^2} \left[\frac{2m_0^{II} a}{n^2} + \frac{2m_0^I b}{m^2} + \frac{\tilde{m}_0^I a + \tilde{m}_0^{II} b}{mn} \right].$$

W przypadku braku sztywności skrętnej belek w obu rodzinach mamy $\tilde{m}_0^I = \tilde{m}_0^{II} = 0$, a wzór (4.8) pokrywa się z rozwiązaniem uzyskanym w pracy [13]. Ponieważ \tilde{m}_0^I i \tilde{m}_0^{II} są dodatnie, więc (4.8) daje większą wartość obciążenia granicznego od proponowanej w pracy [13] i jest rozwiązaniem bliższym rzeczywistości.

4.2. Nośność graniczna rusztu gwiazdzistego z n-krotną osią symetrii

Jako drugi przykład rozpatrzmy ruszt pokazany na rys. 3. Parametry geometryczne tego zadania wskazują, że najwygodniej będzie rozpatrzyć zadanie w układzie



Rys. 3

współrzędnych ogólnych [2], zwanym dalej układem biegunowym. W tym celu wprowadzmy lokalne bazy wektorowe $g_K(d)$ i $\mathbf{n}(d)$ ($K=1, 2$) (rys. 3). Nie jest to jedyny możliwy sposób wprowadzenia układu biegunowego: inaczej niż w geometrii różniczkowej pod pojęciem «układ biegunowy» kryje się tu kilka możliwości opisu, różniących się przy praktycznym ich wykorzystaniu.

Składowe poszczególnych wektorów, występujących w rozważaniach geometrycznych, odniesione do płaskiego układu współrzędnych kartezjańskich (z^k), $k=1, 2$, wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} &= x^1 h [\cos \alpha x^2, \sin \alpha x^2], & \Delta_I \mathbf{r} &= h [\cos \alpha x^2, \sin \alpha x^2], \\
 \Delta_{II} \mathbf{r} &= 2x^1 h \sin \frac{\alpha}{2} \left[-\sin \alpha \left(x^2 + \frac{1}{2} \right), \cos \alpha \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) \right], \\
 \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}^1 &= [\cos \alpha x^2, \sin \alpha x^2], & \mathbf{g}_2 = \mathbf{g}^2 &= [-\sin \alpha x^2, \cos \alpha x^2]. \\
 \Delta_I \mathbf{g}_1 &= 0, & \Delta_I \mathbf{g}_2 &= 0, \\
 \Delta_{II} \mathbf{g}_1 &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left[-\sin \alpha \left(x^2 + \frac{1}{2} \right), \cos \alpha \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) \right], \\
 \Delta_{II} \mathbf{g}_2 &= -2 \sin \frac{\alpha}{2} \left[\cos \alpha \left(x^2 + \frac{1}{2} \right), \sin \alpha \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) \right], \\
 \bar{\Delta}_I \mathbf{g}_1 &= 0, & \bar{\Delta}_I \mathbf{g}_2 &= 0, \\
 \bar{\Delta}_{II} \mathbf{g}_1 &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left[-\sin \alpha \left(x^2 - \frac{1}{2} \right), \cos \alpha \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) \right], \\
 \bar{\Delta}_{II} \mathbf{g}_2 &= -2 \sin \frac{\alpha}{2} \left[\cos \alpha \left(x^2 - \frac{1}{2} \right), \sin \alpha \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) \right],
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

gdzie $x^1 = a_1 - 1, a_1, \dots, a - 1, a$; $x^2 = 0, 1, \dots, n - 1, n$; a_1, a oznaczają dowolne liczby naturalne takie, że $a_1 < a$, $n = 2\pi/\alpha$ liczbę belek promieniowych oraz h długość segmentów belek promieniowych (rys. 3). Wykorzystując (4.4) oraz wzory podane w pracach [2 i 8] otrzymujemy

$$e_{KL} = e^{KL} = e_K{}^L = e^K{}_L = \epsilon_{KL},$$

gdzie ϵ_{kl} oznacza dwuwamiarowy symbol permutacyjny,

$$\begin{aligned}
 I_1 &= h [\cos \alpha x^2, \sin \alpha x^2], \\
 I_{II} &= 2x^1 h \sin \frac{\alpha}{2} \left[-\sin \alpha \left(x^2 + \frac{1}{2} \right), \cos \alpha \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) \right], \\
 I_1^1 &= h, & I_1^2 &= 0, & I_{II}^1 &= -2x^1 h \sin^2 \frac{\alpha}{2}, & I_{II}^2 &= x^1 h \sin \alpha, \\
 G_{II1}^1 &= -2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, & G_{II2}^1 &= -\sin \alpha, & G_{II1}^2 &= \sin \alpha, & G_{II2}^2 &= -2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \\
 G_{III}^2 &= 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, & G_{2II}^1 &= -\sin \alpha, & G_{III}^1 &= \sin \alpha, & G_{2II}^2 &= 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

Pozostałe G_{LA}, G_{AL} są równe zeru.

Skorzystamy z równań równowagi (4.5), w których

$$\bar{l}_A^k(d) = \bar{l}_A^k(d) g_K^k(a), \quad l_A^k(d) = l_A^k(f_{-A} d).$$

Przy tym podstawieniu znajdziemy

$$\begin{aligned}
 \bar{l}_I &= h [\cos \alpha x^2, \sin \alpha x^2], \\
 \bar{l}_{II} &= 2x^1 h \sin \frac{\alpha}{2} \left[-\sin \alpha \left(x^2 - \frac{1}{2} \right), \cos \alpha \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) \right], \\
 (4.11) \quad \bar{l}_I^1 &= h, \quad \bar{l}_I^2 = 0, \\
 \bar{l}_{II}^1 &= 2x^1 h \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \bar{l}_{II}^2 = x^1 h \sin \alpha.
 \end{aligned}$$

Rozpatrzmy typowy element rozważanego rusztu i działające na niego siły wewnętrzne (rys. 4). Z warunków symetrii (rozpatrywać będziemy jedynie obciążenia mające n -krotną oś symetrii i przyłożone do węzłów rusztu) wynika, że

$$\begin{aligned}
 (4.12) \quad n^{II} &= 0, \quad n^{2II} = n^{1II} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \\
 t^{II} &= 0, \quad \Delta_{II} \varphi = \bar{\Delta}_{II} \varphi = 0.
 \end{aligned}$$

dla dowolnej funkcji $\varphi: D \rightarrow R$.

Równanie (4.5)₁ napiszemy w postaci

$$(4.13) \quad \bar{\Delta}_I t^I + f = 0,$$

gdzie f oznacza siłę przyłożoną do węzła d , a (4.5)₂ w postaci

$$(4.14) \quad \bar{\Delta}_A n^{KA} + G_{LA}^K(d) n^{LA} (f_{-A} d) + \frac{1}{2} \in^K_M [l_I^M(d) t^I(d) + \bar{l}_I^M(d) \bar{t}^I(d)] = 0.$$

Dla $K=1$ mamy stąd

$$\begin{aligned}
 \bar{\Delta}_A n^{1A} + G_{LA}^1 n^{LA} (f_{-A} d) = 0, \quad G_{1II}^1 n^{1II} + G_{2II}^1 n^{2II} = 0, \\
 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} n^{1II} - \sin \alpha n^{2II} = 0,
 \end{aligned}$$

a więc po wykorzystaniu (4.12)₁ równanie to spełnione jest tożsamościowo. Dla $K=2$ otrzymujemy

$$(4.15) \quad \bar{\Delta}_I n^{2I} + \sin \alpha \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) n^{1II} - \frac{1}{2} (ht^I + h\bar{t}^I) = 0.$$

Pisząc w postaci rozwiniętej (4.13) dostaniemy

$$t^I(d) - t^I(f_{-1} d) + f = 0,$$

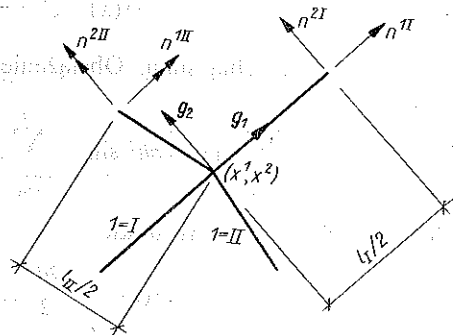
czyli

$$t^I(d) - \bar{t}^I(d) + f = 0,$$

co po wstawieniu do (4.15) daje

$$(4.16) \quad \bar{\Delta}_I n^{2I} + n^{1II} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) \sin \alpha - \frac{1}{2} h (2t^I + f) = 0.$$

Jest to podstawowe równanie problemu, które musi być rozwiązane wraz z odpowiednimi warunkami stanu granicznego i warunkami brzegowymi.



Rys. 4

Przyjmijmy, że ruszt obciążony jest w sposób ciągły równomiernie rozłożonym obciążeniem b , przekazywanym na węzły konstrukcji, oraz jest podparty jedynie na brzegu zewnętrznym. Obciążenie dowolnego węzła można określić w następujący sposób:

$$(4.17) \quad f(x) = bh^2 x \sin \alpha, \quad x \equiv x^I,$$

tzn. jako obciążenie zebrane z obszaru zakreskowanego (rys. 3). Równanie (4.13) przybierze postać

$$t^I(x) - t^I(x-1) = -bh^2 x \sin \alpha.$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$(4.18) \quad t^I(x) = C - \frac{bh^2 \sin \alpha}{2} (x^2 + x),$$

gdzie C jest dowolną stałą. Obciążenie z całego płata rusztu (tj. jego $1/n$ części) wynosi

$$(4.19) \quad \sum_{x=a_1}^a f(x) = bh^2 \sin \alpha \sum_{x=a_1}^a x = \frac{bh^2 \sin \alpha}{2} (a^2 - a_1^2 + a - a_1).$$

Stałą C obliczymy z warunku

$$t^I(a) = -\frac{bh^2}{2} \sin \alpha (a^2 - a_1^2 + a + a_1),$$

co daje

$$(4.20) \quad C = \frac{bh^2 \sin \alpha}{2} (a_1^2 - a).$$

Wstawiając (4.20) do (4.18) otrzymujemy

$$(4.21) \quad t^I(x) = \frac{bh^2 \sin \alpha}{2} (a_1^2 - a_1 - x^2 - x)$$

(funkcja ta spełnia oczywiście również drugi warunek brzegowy $t^I(a_1-1)=0$).

Jeśli wykorzystamy (4.17) i (4.21), to równanie (4.16) przybierze postać

$$(4.22) \quad \bar{A}_I n^{2I} + n^{1II} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) \sin \alpha + \frac{bh^3}{2} \sin \alpha (x^2 - a_1^2 + a_1) = 0.$$

Zakładając, że promieniowe belki rusztu są swobodne na brzegu wewnętrznym rusztu, przegubowo zaś podparte na brzegu zewnętrznym, równanie (4.22) należy rozwiązać wraz z następującymi warunkami brzegowymi:

$$(4.23) \quad n^{2I}(a) = 0, \quad n^{2I}(a_1 - 1) = 0.$$

Równocześnie należy spełnić w pewnych obszarach warunek stanu granicznego. Przyjmując, że przy odpowiednich stosunkach długości l_I/l_{II} pierwsze osiągną wartość graniczną momenty zginające w środkach belek «obwodowych» (tj. rodziny II-ej), warunek stanu granicznego przedstawimy w prostej postaci

$$(4.24) \quad n^{1II} = m_0^{II} \cos \frac{\alpha}{2},$$

gdzie m_0^{II} jest zginającym momentem granicznym dla belek II-iej rodziny. Wykorzystując (4.24) równanie (4.22) przedstawimy w następującej postaci

$$(4.25) \quad \bar{A}_1 n^{21} + 2m_0^{\text{II}} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{bh^3}{2} (x^2 - a_1^2 + a_1) \sin \alpha = 0.$$

Równanie (4.25) jest niejednorodnym różnicowym równaniem zwyczajnym pierwszego rzędu na niewiadomą funkcję $n^{21}(x)$. Rozwiązanie tego równania zawierać będzie jedną stałą dowolną. Stałą tę oraz poszukiwaną wartość obciążenia granicznego b obliczymy z dwu warunków brzegowych (4.23).

Łatwo stwierdzić, że rozwiązanie równania (4.25) ma postać

$$(4.26) \quad n^{21}(x) = D - \frac{bh^3 \sin \alpha}{12} [2x^3 + 3x^2 + (1 - 6a_1^2 + 6a_1)x] - 2m_0^{\text{II}} x \sin \frac{\alpha}{2},$$

określającą moment zginający w środkach rozpiętości segmentów belek I-iej rodziny. Z warunku $n^{21}(a_1 - 1) = 0$ dostaniemy

$$D = \frac{bh^3 \sin \alpha}{12} (-4a_1^3 + 9a_1^2 - 5a_1) + 2m_0^{\text{II}} (a_1 - 1) \sin \frac{\alpha}{2},$$

a z warunku $n^{21}(a) = 0$ wynika, że

$$(4.27) \quad b = \frac{12m_0^{\text{II}}(a - a_1 + 1)}{h^3 \cos \frac{\alpha}{2} [a(a+1)(2a+1) + a_1(a_1 - 1)(-5 + 4a_1 + 6a)]}.$$

Dla $a_1 = 1$ otrzymujemy

$$(4.28) \quad b = \frac{12 m_0^{\text{II}}}{h^3 \cos \frac{\alpha}{2} (a+1)(2a+1)}.$$

Zauważmy, że w każdym konkretnym zadaniu należy sprawdzić, czy spełniony jest warunek

$$|n^{21}(x)| \leq m_0^{\text{I}},$$

gdzie $n^{21}(x)$ jest określone za pomocą wzoru (4.26), a m_0^{I} jest granicznym momentem zginającym w belkach I-iej rodziny; należy również sprawdzić, czy nie jest przekroczony warunek stanu granicznego w przekrojach przywęzłowych belek obu rodzin [15 i 16]. Jedynie bowiem w przypadku spełnienia tych warunków przyjęte pole momentów zginających jest statycznie dopuszczalne. Zwróćmy wreszcie uwagę na fakt, że we wzorach (4.27) i (4.28), określających nośność graniczną rusztu, w mianowniku występuje czynnik $\cos \alpha/2$. Pozornie jest to sprzeczne z intuicją, przy wzroście bowiem kąta α (czyli «osłabianiu» rusztu) mamy zgodnie z (4.27) i (4.28) wzrost jego nośności. Paradoks ten związany jest z faktem, że przy wzroście kąta α zmniejsza się obszar zajmowany przez ruszt, a tym samym obciążenie całkowite konstrukcji (będące iloczynem obciążenia jednostkowego b i pola powierzchni rusztu). Zaobserwowane zjawisko wydaje się jednak ciekawe i może być wykorzystane przy projektowaniu przekryć rusztowych.

Autor wyraża swoją głęboką wdzięczność Panu Profesorowi Cz. WOŹNIAKOWI za pomoc i dyskusje prowadzone w trakcie pisania pracy.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Cz. WOŹNIAK, *Basic concepts of the theory of discrete elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **19**, 10, 1971.
2. Cz. WOŹNIAK, *Basic concepts of the difference geometry*, Annal. Polon. Math., **28**.
3. Cz. WOŹNIAK, *Discrete elasticity*, Arch. Mech. Stos., **23**, 6, 1971.
4. Cz. WOŹNIAK, *Discrete elastic Cosserat systems*, Arch. Mech. Stos., **25**, 2, 1973.
5. Cz. WOŹNIAK, *Basic concepts of mechanics of discretized bodies*, MTiS No. 4, 1972.
6. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
7. S. KONIECZNY, Cz. WOŹNIAK, *Lattice-type structure as the problem of discrete elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **19**, 11 - 12, 1971.
8. M. KLEIBER, *Statics of elastic lattice-type shells*, Arch. Mech. Stos., **25**, 2, 1973.
9. M. KLEIBER, *The approximate methods in the theory of elastic lattice-type shells*, Arch. Mech. Stos., **25**, 2, 1973.
10. W. OLSZAK, P. PERZYNA, A. SAWCZUK i inni, *Teoria plystyczności*, PWN, Warszawa 196.
11. A. H. LEE, *Elastic-plastic deformation at finite strain*, J. Appl. Mech., **36**, 1, 1969.
12. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, *A general theory of elastic-plastic continuum*, Arch. Rat. Mech. Anal., **18**, 4, 1965.
13. M. GRIGORIAN, *A lower-band solution to the collapse of uniform rectangular grids on simple supports*, Int. J. Mech. Sci., **13**, 755 - 776, 1971.
14. THEIN WAH, R. LEE, CALCOTE, *Structura analysis by finite difference calculus*, Van Nestraud Reinkold Company, 1970.
15. M. KWIECIŃSKI, M. KLEIBER, *Limit of polar grids treated as plane fibrous bodies*, Arch. Inż. Łąd., **17**, 2, 1971.
16. M. KWIECIŃSKI, M. KLEIBER, *A minimum weight design of grids*, Arch. Inż. Łąd., **18**, 2, 1972.

Резюме

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ДИСКРЕТИЗУЕМЫХ ТЕЛ

В работе сформулированы основы теории пластического течения дискретизуемых тел. Дискретизуемое тело понимается как приближенная модель сплошной среды, возникающая в процессе дискретизации. В качестве приложения рассматриваемой теории приводятся решения задачи о несущей способности двух типов плоских стержневых систем.

SUMMARY

FOUNDATIONS OF PLASTIC FLOW OF DISCRETIZED BODIES

The paper formulates the foundations of the theory of plastic flow of discretized bodies. Under the notion of a discretized body we understand an approximate model of continuous media derived in the process of discretization. The solution of the problem of the load carrying capacity of two types of plane gridworks serves as an example of application of the theory.

ZAKŁAD TEORII KONSTRUKCJI
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 maja 1972 r.