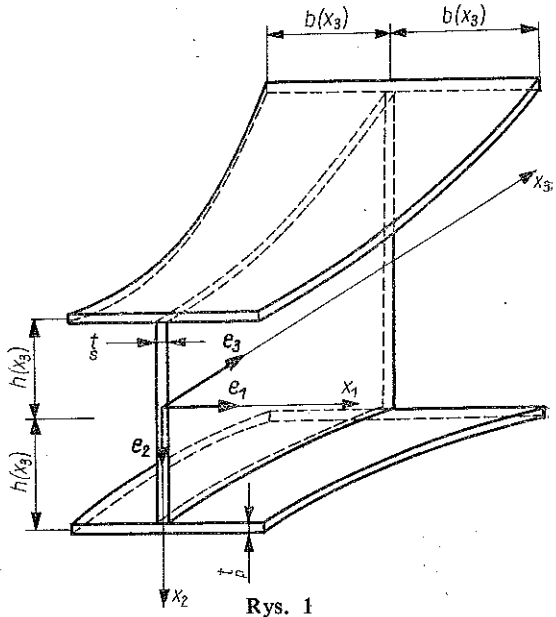


DUŻE SKRĘCANIE BISYMETRYCZNEGO PRĘTA CIENKOŚCIENNEGO  
O ZMIENNYM PRZEKROJU DWUTEOWYM

PIOTR WILDE, JERZY WEKESER (GDAŃSK)

## 1. OPIS GEOMETRYCZNY ZAGADNIENIA

W pracy rozważa się duże obroty przekrojów poprzecznych pręta wokół osi  $x_3$ . W wyprowadzeniach przyjmuje się założenia teorii profili cienkościennych czyli zakłada się, że kontur przekroju poprzecznego ulega paczeniu, ale jest nieodkształcalny w swojej płaszczyźnie oraz że kąty odkształcenia postaciowego w płaszczyznach środka i półek są równe zeru. Przeprowadzona analiza dotyczy pręta cienkościennego o dowolnych, bisymetrycznie zmiennych wymiarach środka oraz półek i mogła być opracowana dzięki przyjęciu trzech układów współrzędnych. Dwa z nich, ortonormalne, związane są z osią  $x_3$ : układ wersorów  $e_i$  opisuje nam punkty przekroju przed odkształceniem, a wprowadzenie wektorów jednostkowych  $L, N, M$  pozwala na opis zagadnienia po odkształceniu. Przyjęta zmienność przekroju poprzecznego pręta jest punktem wyjścia do zastosowania dodatkowo lokalnego, krzywoliniowego układu współrzędnych  $G_i$ .



Na rys. 1 pokazano przyjęty kartezjański układ odniesienia w konfiguracji początkowej.

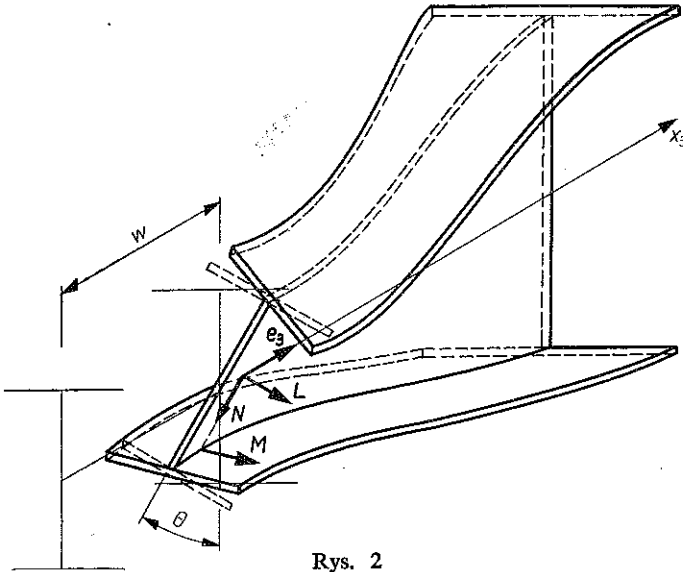
W konfiguracji aktualnej skręcaniu przekroju towarzyszy przesunięcie podłużne wzdłuż osi  $x_3$ . Tak więc stan przemieszczeń opisany jest przez kąt obrotu  $\theta(x_3)$  oraz przemieszczenie  $w(x_3)$ , co pokazuje rys. 2.

Punkty na środku dwuteownika opisane są przed odkształceniem następującym wektorem wodzącym:

$$(1.1) \quad \mathbf{r} = x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3.$$

Stąd wektory podstawowe dla przyjętej parametryzacji mają postać

$$(1.2) \quad \underset{s}{\mathbf{g}}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \underset{s}{\mathbf{g}}_3 = \mathbf{e}_3.$$



Rys. 2

Po przemieszczeniu promień wodzący punktów na środku w układzie konwekcyjnym jest określony wzorem

$$(1.3) \quad \underset{s}{\mathbf{R}} = x_2 \mathbf{N} + (x_3 + w) \mathbf{e}_3,$$

gdzie  $\mathbf{N}$  (zgodnie z założeniem o braku odkształceń postaciowych) jest wektorem prostopadłym do wektora  $\mathbf{e}_3$  i jednostkowym.

Wektor  $\mathbf{N}$  określony jest przez bazy w ciele nieodkształconym wyrażeniem (rys. 3):

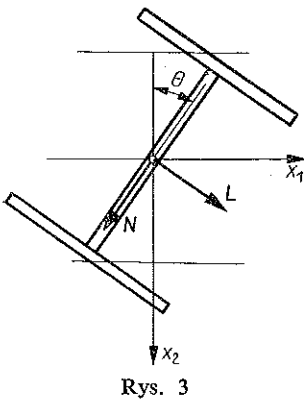
$$(1.4) \quad \mathbf{N} = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2.$$

Na podstawie przyjętej parametryzacji wektory podstawowe, opisujące punkty na środku, po odkształceniu są następujące:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \underset{s}{\mathbf{G}}_2 = \underset{s}{\mathbf{R}}_{,2} &= \mathbf{N}, \\ \underset{s}{\mathbf{G}}_3 = \underset{s}{\mathbf{R}}_{,3} &= -x_2 \theta' (\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2) + \\ &+ (1+w') \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Dla uproszczenia zapisu korzystne jest wprowadzenie jednostkowego wektora  $\mathbf{L}$  prostopadłego zarówno do  $\mathbf{N}$  jak i  $\mathbf{e}_3$ . Z rys. 3 otrzymuje się

$$(1.6) \quad \mathbf{L} = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2.$$



Rys. 3

Podstawiając powyższe do wzoru (1.5)<sub>2</sub> otrzymuje się wektor podstawowy  $\mathbf{G}_3$  w następującej postaci:

$$(1.7) \quad \mathbf{G}_3 = -x_2 \theta' \mathbf{L} + (1+w') \mathbf{e}_3.$$

Punkty leżące na półce dolnej przed odkształceniem określone są następującym wektorem wodzącym:

$$(1.8) \quad \mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + h(x_3) \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3.$$

Stąd wektory podstawowe są następujące:

$$(1.9) \quad \mathbf{g}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{g}_3 = h' \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

Po przemieszczeniu w układzie konwekcyjnym promień wodzący punktów na półce jest określony za pomocą wzoru (rys. 2)

$$(1.10) \quad \mathbf{R} = x_1 \mathbf{M} + h(x_3) \mathbf{N} + (x_3 + w) \mathbf{e}_3.$$

Występujący tu jednostkowy wektor  $\mathbf{M}$  (zgodnie z przyjętym założeniem o braku odkształcalności postaciowej oraz o niezmienności konturu) musi być prostopadły do powierzchni środka po odkształceniu w miejscu przebicia tej powierzchni, a zatem musi być ortogonalny do dwóch wektorów leżących w płaszczyźnie stycznej. Mamy więc

$$(1.11) \quad [\mathbf{N} \times \mathbf{G}_3] \mathbf{M} = \mathbf{N} \times \mathbf{G}_3 (x_2 = h) = (1+w') \mathbf{L} + h\theta' \mathbf{e}_3.$$

Obliczając jego długość otrzymamy

$$(1.12) \quad \sqrt{(h\theta')^2 + (1+w')^2} \mathbf{M} = (1+w') \mathbf{L} + h\theta' \mathbf{e}_3.$$

Wektory podstawowe na powierzchni półki po odkształceniu przy przyjętej parametryzacji są następujące:

$$(1.13) \quad \mathbf{G}_1 = \mathbf{R}_{,1} = \mathbf{M} = \frac{1+w'}{\sqrt{(h\theta')^2 + (1+w')^2}} \mathbf{L} + \frac{h\theta'}{\sqrt{(h\theta')^2 + (1+w')^2}} \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{G}_3 = \mathbf{R}_{,3} = x_1 \mathbf{M}' + h' \mathbf{N} + h\mathbf{N}' + (1+w') \mathbf{e}_3.$$

Podstawiając do wyrażenia (1.13)<sub>2</sub> pochodną  $\mathbf{M}$  obliczoną na podstawie (1.12), pochodną  $\mathbf{N}$  obliczoną ze wzoru (1.4) przy wykorzystaniu oznaczenia (1.6) otrzymano ostatecznie  $\mathbf{G}_3$  w następującej postaci:

$$(1.14) \quad \mathbf{G}_3 = \left\{ -h\theta' + x_1 \left[ \frac{1+w'}{\sqrt{(h\theta')^2 + (1+w')^2}} \right]' \right\} \mathbf{L} +$$

$$+ \left\{ h' + x_1 \frac{\theta' (1+w')}{\sqrt{(h\theta')^2 + (1+w')^2}} \right\} \mathbf{N} + \left\{ 1+w' + x_1 \left[ \frac{h\theta'}{\sqrt{(h\theta')^2 + (1+w')^2}} \right]' \right\} \mathbf{e}_3.$$

Na podstawie wzorów (1.13)<sub>1</sub> i (1.14) można łatwo wykazać prostopadłość wektorów  $\mathbf{M}$  oraz  $\mathbf{G}_3$  dla każdej wartości  $x_1$ .

## 2. STAN ODKSZTAŁCENIA

Przyjęto do analizy tensor odkształcenia Greena  $\gamma_{ij}$  określony następującym wzorem [3]:

$$(2.1) \quad 2\gamma_{ij} = G_{ij} - g_{ij},$$

gdzie  $G_{ij}$ ,  $g_{ij}$  są tensorami metrycznymi, określonymi odpowiednio w ciele odkształconym i nieodkształconym w układzie konwekcyjnym. Tensor metryczny środniczka po odkształceniu opisany jest przez iloczyny skalarne wektorów podstawowych, określonych wzorami (1.5)<sub>1</sub> oraz (1.7). Ze względu na to, że układ L, N,  $e_3$  jest ortonormalnym układem wektorów, iloczyny te oblicza się w prosty sposób:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} G_{22} &= G_2 G_2 = 1, \\ G_{23} &= G_2 G_3 = 0, \\ G_{33} &= G_3 G_3 = (1+w')^2 + x_2^2 (\theta')^2. \end{aligned}$$

Otrzymany wynik jest zgodny z przyjętymi założeniami nieodkształcalności konturu  $\gamma_{22} = 0$  oraz braku odkształceń postaciowych  $\gamma_{23} = 0$ . Tak więc tylko jedna współrzędna tensora odkształceń jest różna od zera:

$$(2.3) \quad \gamma_{33} = \frac{1}{2} (G_{33} - 1) = w' + \frac{1}{2} (w')^2 + \frac{1}{2} x_2^2 (\theta')^2.$$

Tensor metryczny półki po odkształceniu określony jest na podstawie wektorów (1.13)<sub>1</sub> oraz (1.14) wzorami

$$(2.4) \quad \begin{aligned} G_{11} &= G_1 G_1 = 1, \\ G_{13} &= G_1 G_3 = 0, \\ G_{33} &= G_3 G_3 = (h')^2 + (h\theta')^2 + (1+w')^2 + \\ &+ x_1 \left\{ -2h\theta' \left[ \frac{1+w'}{\sqrt{(h\theta')^2 + (1+w')^2}} \right]' + \frac{2h'\theta'(1+w')}{\sqrt{(h\theta')^2 + (1+w')^2}} + \right. \\ &+ 2(1+w') \left[ \frac{h\theta'}{\sqrt{(h\theta')^2 + (1+w')^2}} \right]' \left. \right\} + x_1^2 \left\{ \left[ \left( \frac{1+w'}{\sqrt{(h\theta')^2 + (1+w')^2}} \right)' \right]^2 + \right. \\ &+ \frac{(\theta')^2 (1+w')^2}{(h\theta')^2 + (1+w')^2} + \left. \left[ \left( \frac{h\theta'}{\sqrt{(h\theta')^2 + (1+w')^2}} \right)' \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Współrzędne tensora metrycznego półki przed odkształceniem są następujące:

$$(2.5) \quad g_{11} = 1, \quad g_{13} = 0, \quad g_{33} = 1 + (h')^2.$$

Tensor odkształcenia półki ma również tylko jedną niezerową współrzędną

$$(2.6) \quad \gamma_{33} = \frac{1}{2} [G_{33} - 1 - (h')^2].$$

Podane powyżej zależności są poprawne dla odkształceń skończonych. Autorzy zakładają, że pręt cienkościenny jest wykonany z metalu i pracuje w obszarze liniowo sprężystym. W takim przypadku odkształcenia muszą być małe tak, aby naprężenia były mniejsze od granicy proporcjonalności, nie wyklucza to jednak dużych przemieszczeń. Przykładowo dostatecznie długi pręt można skrócić o duży kąt przy stosunkowo niskich naprężeniach. Można więc wprowadzić założenia upraszczające, że przemieszczenia wynikające z obrotu są duże, ale odkształcenia są małe. W wyrażeniu na odkształcenia w środku określone wzorem (2.3) występuje składnik liniowy  $w'$  oraz kwadrat pochodnej przemieszczenia, natomiast pochodna kąta skręcenia występuje tylko w kwadracie.

Przyjmijmy więc zasadę, że kwadrat  $\theta'$  jest wielkością tego samego rzędu co  $w'$  i pominiemy wszystkie wyższe potęgi. Oznacza to, że wyrażenie (2.3) na odkształcenie środka przyjmiemy w następującej postaci:

$$(2.7) \quad \gamma_{33} = w' + \frac{1}{2} x_2^2 (\theta')^2.$$

Analogiczne postępowanie zastosujemy do wzoru na odkształcenie w półkach. Przykładowo pokazano przekształcenia dla jednego składnika, gdzie użyto rozwinięcia dwumiennego:

$$(2.8) \quad \frac{1+w'}{\sqrt{1+2w'+(w')^2+(h\theta')^2}} \approx (1+w') \left[ 1 - w' - \frac{1}{2} (w')^2 - \frac{1}{2} (h\theta')^2 + \dots \right] = \\ = 1 - w' - \frac{1}{2} (w')^2 - \frac{1}{2} (h\theta')^2 + w' - (w')^2 - \frac{1}{2} w' (h\theta')^2 + \dots \approx 1 - \frac{1}{2} (h\theta')^2.$$

Podstawiając uproszczenia typu pokazanego we wzorach (2.7) i (2.8) do trzeciego równania (2.4), a następnie do wzoru (2.6) otrzymano

$$(2.9) \quad \gamma_{33} = w' + \frac{1}{2} (h\theta')^2 + x_1 \frac{(h^2 \theta')'}{h} + x_1^2 \cdot \frac{1}{2} \{ (\theta')^2 + [(h\theta')']^2 \}.$$

Te same uproszczenia można wprowadzić do wzorów na wektory podstawowe. Po prostych przekształceniach otrzymuje się

$$(2.10) \quad \mathbf{G}_1 = \mathbf{M} = \left[ 1 - \frac{1}{2} (h\theta')^2 \right] \mathbf{L} + h\theta' \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{G}_3 = \left\{ -h\theta' - x_1 \cdot \frac{1}{2} [(h\theta')']^2 \right\} \mathbf{L} + (h' + x_1 \theta') \mathbf{N} + [1 + w' + x_1 (h\theta')'] \mathbf{e}_3.$$

Jak łatwo sprawdzić, tensor metryczny obliczony na podstawie przybliżonych wzorów na wektory (2.10) po odrzuceniu wyrazów wyższych rzędów prowadzi do identycznego wyrażenia na  $\gamma_{33}$  z (2.9).

### 3. STAN NAPRĘŻENIA I SIŁY WEWNĘTRZNE

Przyjmuje się, że materiał jest liniowo-sprężysty. Naprężenia i siły wewnętrzne w przekroju poprzecznym pręta wyznaczmy na podstawie opisanego stanu odkształcenia opierając się na teorii powłok i używając notacji podanej w [3]. Ponieważ

określone już są składowe tensora odkształcenia dla całego przekroju, przeto łatwo jest wyznaczyć składowe tensora naprężeń błonowych:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} n^{\alpha\beta} &= DH^{\alpha\beta\rho\lambda} \gamma_{\rho\lambda}, \\ H^{\alpha\beta\rho\lambda} &= \frac{1}{2} [G^{\alpha\lambda} G^{\beta\rho} + G^{\alpha\rho} G^{\beta\lambda} + \nu (\varepsilon^{\alpha\rho} \varepsilon^{\beta\lambda} + \varepsilon^{\alpha\lambda} \varepsilon^{\beta\rho})], \\ D &= \frac{Et}{1-\nu^2}. \end{aligned}$$

W myśl przyjętych w p. 2 założeń upraszczających składowe tensora metrycznego kowariantnego dla środka można zgodnie z (2.2) napisać następująco:

$$(3.2) \quad G_{s\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+2w'+x_2^2(\theta')^2 \end{bmatrix},$$

gdzie  $\alpha, \beta$  przyjmują indeksy 1 i 2. Tak więc tensor metryczny kontrawariantny ma postać

$$(3.3) \quad G_s^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+2w'+x_2^2(\theta')^2} \end{bmatrix}.$$

Podstawiając (3.3) do wzorów (3.1) otrzymamy siły błonowe w przekroju  $x_3 = \text{const}$ :

$$(3.4) \quad n_s^{33} = \frac{D}{1+2w'+x_2^2(\theta')^2} \gamma_s^{33} = \frac{D\gamma_s^{33}}{1+2\gamma_s^{33}}.$$

Zważywszy, że  $\gamma_s^{33}$  jest wielkością bardzo małą w porównaniu z jednością (rzędu 1‰), po rozwinięciu wyrażenia  $1/(1+2\gamma_s^{33})$  w szereg dwumienny i uwzględnieniu pierwszych dwóch składników, otrzymamy

$$(3.5) \quad n_s^{33} = D\gamma_s^{33} (1 - 2\gamma_s^{33} + \dots) \approx D\gamma_s^{33}.$$

Na skutek przyjętych założeń upraszczających ( $\gamma_{22} = \gamma_{23} = 0$ ) rozważany pręt cienkościenny przestał być ciałem izotropowym. Stąd druga składowa sił błonowych  $n^{32}$  w przekroju  $x_3 = \text{const}$  nie może być wyznaczona ze związków fizycznych, lecz z równań równowagi. Składowe sił błonowych  $n^{33}$  i  $n^{32}$  za pośrednictwem baz  $G_2$  i  $G_3$  określają wektor wewnętrznych sił błonowych w przekroju  $x_3 = \text{const}$ :

$$(3.6) \quad \mathbf{t}_s = n_s^{33} \mathbf{G}_s^3 + n_s^{32} \mathbf{G}_s^2.$$

Po podstawieniu (1.5)<sub>1</sub>, (1.7) oraz (3.5) do wzoru (3.6) i uwzględniając (2.7) — wektor sił błonowych przedstawimy w postaci

$$(3.7) \quad \mathbf{t}_s = D \left[ w' + \frac{1}{2} x_2^2 (\theta')^2 \right] [-x_2 \theta' \mathbf{L} + (1+w') \mathbf{e}_3] + n^{32} \mathbf{N}.$$

Obliczmy składową tego wektora w kierunku osi  $x_3$  pamiętając o prostopadłości wektorów  $\mathbf{N}$  i  $\mathbf{e}_3$ . Jednocześnie w (3.7) odrzucimy wyższe potęgi pochodnej przemieszczeń:

$$(3.8) \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_3 \approx D \left[ w' + \frac{1}{2} x_2^2 (\theta')^2 \right].$$

Wypadkowa siła normalna jest całką funkcji (3.8) w przedziale wysokości całego środka:

$$(3.9) \quad P = \int_s \int_{-h}^h \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_3 dx_2.$$

Podstawiając (3.8) do (3.9) przy uwzględnieniu oznaczenia (3.1)<sub>3</sub> możemy napisać:

$$(3.10) \quad P = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ w' A + \frac{1}{2} (\theta')^2 I_{11} \right],$$

gdzie przez

$$(3.11) \quad A = \int_s \int_{-h}^h t dx_2$$

oznaczono pole przekroju poprzecznego środka oraz przez

$$(3.11)' \quad I_{11} = \int_s \int_{-h}^h x_2^2 t dx_2$$

moment bezwładności przekroju środka względem osi  $x_1$ .

Całkowity wektor momentu naprężeń powstałych w środku wyniesie

$$(3.12) \quad \mathbf{H} = \int_s \int_{-h}^h (x_2 \mathbf{N}) \times \mathbf{t} dx_2.$$

Do wyrażenia (3.12) możemy teraz podstawić (3.6) i po obliczeniu prostych iloczynów wektorowych moment naprężeń  $\mathbf{H}$  względem środka środka wyrazimy w postaci

$$(3.13) \quad \mathbf{H} = \int_s \int_{-h}^h x_2^2 n^{33} \theta' \mathbf{e}_3 dx_2 + \int_s \int_{-h}^h x_2 (1+w') n^{33} \mathbf{L} dx_2.$$

Moment skracający w przekroju  $x_3 = \text{const}$  obliczymy jako rzut wektora  $\mathbf{H}$  na kierunek osi  $x_3$ :

$$(3.14) \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{e}_3 = \int_s \int_{-h}^h x_2^2 n^{33} \theta' dx_2.$$

Można teraz do (3.14) podstawić funkcje (3.5), (2.7) i (3.1)<sub>3</sub>. Po wykonaniu elementarnych działań napiszemy symbolicznie

$$(3.15) \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{e}_3 = \frac{E\theta'}{1-\nu^2} \left[ w' I_{11} + \frac{1}{2} (\theta')^2 I_{1111} \right],$$

przy czym analogicznie do (3.11)' wprowadzono oznaczenie

$$(3.16) \quad I_{1111}^s = \int_{-h}^h x_2^4 t dx_2.$$

Moment zginający względem osi pokrywającej się z wektorem  $\mathbf{N}$  jest rzutem  $\mathbf{H}$  na  $\mathbf{L}$ :

$$(3.17) \quad \mathbf{HL} = \int_{-h}^h x_2 (1+w') n^{33} dx_2.$$

Wykonując podobne obliczenia jak w (3.15) można wykazać, że  $\mathbf{HL} = 0$ . Warto też zauważyć, że moment zginający względem osi pokrywającej się z wektorem  $\mathbf{L}$  jest również zerowy.

Przeprowadzimy obecnie analogiczne rozważania dla sił błonowych w półkach, przy czym ze względu na symetrię rozpatrywać będziemy tylko półkę dolną.

Wynikiem przyjętych uprzednio założeń jest istnienie tylko jednej niezerowej składowej tensora odkształcenia w półce (2.6). Zgodnie z (3.1) napiszemy

$$(3.18) \quad n^{33} = DH^{3333} \gamma_{33},$$

$$H^{3333} = \frac{1}{(g_{33} + 2\gamma_{33})^2} \approx \frac{1}{(g_{33})^2}.$$

Tak więc błonowe siły normalne wyrazimy w postaci

$$(3.19) \quad n^{33} = \frac{D\gamma_{33}}{(g_{33})^2}.$$

Analogiczny wzór na siły błonowe w przekroju  $x_3 = \text{const}$  otrzymano w pracy [1], przy czym zgodnie z (2.5)<sub>3</sub> kwadrat pochodnej wysokości środka w przypadku dwuteownika odpowiada wyrażeniu  $\beta^2$  dla przekroju dowolnego rozważanego w [1]. Naprężenia styczne  $n^{31}$  znajdziemy z równania równowagi

$$(3.20) \quad n^{\alpha 3}|_{\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 3,$$

które po rozwinięciu ma postać

$$(3.21) \quad n^{13}_{,1} + n^{33}_{,3} + n^{11} \Gamma_{11}^3 + n^{13} (3\Gamma_{13}^3 + \Gamma_{11}^1) + n^{33} (2\Gamma_{33}^3 + \Gamma_{13}^1) = 0.$$

Obliczenie różnych od zera symboli Christoffela i podstawienie ich do (3.21) da nam równanie równowagi, które w zwartej formie ma postać

$$(3.22) \quad [n^{13} (G_{33})^{\frac{3}{2}}]_{,1} = - (G_{33})^{\frac{1}{2}} [n^{33} G_{33}]_{,3}.$$

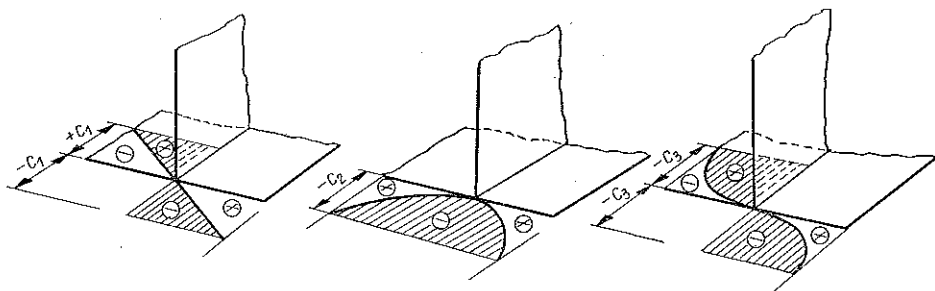


W celu otrzymania  $n^{13}$  jako funkcji znanych sił błonowych  $n^{33}$  należy scałkować (3.22) względem  $dx_1$ . Konsekwentnie pominiemy składniki rzędu  $(\gamma_{33})^2$ , a po uwzględnieniu (3.19) oraz (2.9) otrzymamy

$$(3.23) \quad n^{13} \frac{3}{p} (G_{33})^{\frac{3}{2}} = -D (g_{33})^{\frac{1}{2}} \left\{ \left[ \frac{w' + \frac{1}{2} (h\theta')^2}{g_{33}} \right]' x_1 + \right. \\ \left. + \left[ \frac{(h^2 \theta')'}{g_{33} h} \right] \frac{x_1^2}{2} + \left[ \frac{(\theta')^2 + [(h\theta)']^2}{2g_{33}} \right]' \frac{x_1^3}{3} \right\} + c(x_3).$$

Pierwszy i trzeci składnik tego wyrażenia reprezentują obciążenia samorównoważne. Wynika to z faktu, że funkcje te są nieparzyste, a więc przy obliczaniu wypadkowych sił normalnych i tnących dają składniki zerowe.

Na podstawie (3.23) można wyodrębnić trzy składowe stany z trzema stałymi  $c_1(x_3)$ ,  $c_2(x_3)$ ,  $c_3(x_3)$  tak dobranymi, aby w każdym ze stanów naprężenia na krawędzi były równe zeru oraz  $c_1(x_3) + c_2(x_3) + c_3(x_3) = c(x_3)$ . Poszczególne stany naprężeń wraz ze stałymi o podanych wyżej własnościach pokazano na rys. 4.



Rys. 4

Wyznaczenie stałych  $c_1$  i  $c_3$  nie jest na ogół potrzebne, chyba że interesuje nas lokalny rozkład naprężeń stycznych w półkach w przekroju  $x_3 = \text{const}$ . Niezbędną natomiast do dalszych obliczeń jest funkcja  $c_2(x_3)$ , którą obliczymy z warunku brzegowego żądając, aby wektor naprężenia w półce dla  $x_1 = b$  był zerowy. Przy dowolnie zmiennej szerokości półek  $2b(x_3)$  warunek ten prowadzi do równań

$$(3.24) \quad t^\beta = n^{\alpha\beta} v_\alpha = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 3,$$

przy czym  $v_\alpha$  są współrzędnymi jednostkowego wektora  $\mathbf{v}$  normalnego do krawędzi półki. Rozwijając (3.24) otrzymamy

$$(3.25) \quad [n^{13}]_{x_1=b} = -\frac{v_3}{v_1} [n^{33}]_{x_1=b}.$$

Wykorzystując wektor pozycyjny  $\mathbf{R}$  (1.10) można zbudować wektor styczny do konturu. Zapisując warunek jego ortogonalności do wektora  $\mathbf{v}$  otrzymuje się

$$(3.26) \quad [n^{13}]_{x_1=b} = \frac{b'}{g_{33}} [n^{33}]_{x_1=b}.$$

Równanie (3.23) z warunkiem brzegowym (3.26) po odrzuceniu naprężeń samorównoważnych oraz składników rzędu  $(\gamma_{33})^2$  ma teraz postać

$$(3.27) \quad n^{13} = \frac{D}{g_{33}} \left\{ \frac{1}{2} (b^2 - x_1^2) \left[ \frac{(h^2 \theta')'}{g_{33} h} \right] + \frac{bb' (h^2 \theta')'}{h (g_{33})^{7/2}} \right\}.$$

Po wyznaczeniu naprężeń możemy teraz przystąpić do obliczenia sił wewnętrznych w przekroju  $x_3 = \text{const}$ . W tym celu na bazie wektorów  $\mathbf{G}_1$  i  $\mathbf{G}_3$  zbudujemy wektor prostopadły  $\mathbf{K}$  na podstawie (2.10):

$$(3.28) \quad \mathbf{K} = \mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_3 = -[hh' \theta' + x_1 h(\theta')^2] \mathbf{L} - \left[ 1 + w' + \frac{1}{2} (h\theta')^2 + x_1 (h\theta')' \right] \mathbf{N} + \left\{ h' \left[ 1 - \frac{1}{2} (h\theta')^2 \right] + x_1 \theta' \right\} \mathbf{e}_3.$$

Przyjmijmy tylko liniowe przybliżenia wektorów  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{G}_1$ ,  $\mathbf{G}_3$ , ponieważ w dalszej części opracowania siły wewnętrzne będą wyznaczane w postaci iloczynów jednego z tych wektorów i  $\gamma_{33}$ . Części nieliniowe po pomnożeniu przez  $\gamma_{33}$  dałyby bowiem iloczyny, które pomijamy zgodnie z naszymi założeniami. Z wektorów (2.10) i (3.28) otrzymamy więc

$$(3.29) \quad \begin{aligned} \mathbf{K} &\approx -hh' \theta' \mathbf{L} - [1 + x_1 (h\theta')'] \mathbf{N} + (h' + x_1 \theta') \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{G}_1 &\approx \mathbf{L} + h\theta' \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{G}_3 &\approx -h\theta' \mathbf{L} + (h' + x_1 \theta') \mathbf{N} + [1 + x_1 (h\theta')'] \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Składowa tensora odkształcenia postaciowego (2.9) zawiera składnik pochodzący z teorii liniowej:

$$(3.30) \quad \gamma_{33} = x_1 \frac{(h^2 \theta')'}{h}.$$

W pełnej postaci (2.9) występują dodatkowo składniki zawierające skrócenie  $w$  i duży kąt skręcenia  $\theta$ , a pochodzące z teorii nieliniowej. Ta pełna postać ma oczywiście sens tylko wtedy, gdy jej wszystkie składniki są tego samego rzędu. Takie ujęcie problemu znajduje swoje potwierdzenie i uzasadnienie w pracy [2]. Należy jednak ponownie zaznaczyć, że rozpatrując zagadnienie w obszarze liniowo-sprężystym żądamy, aby w sumie współrzędna tensora odkształcenia postaciowego (2.9) była wielkością małą i stąd wynika konieczność pomijania składników rzędu  $(\gamma_{33})^2$ .

Wektor naprężenia pochodzący z sił błonowych  $n^{33}$  w przekroju  $x_3 = \text{const}$  wynosi

$$(3.31) \quad \mathbf{t} = n^{33} \sqrt{G_{33}} \mathbf{G}_3.$$

Uwzględnijmy tutaj (3.19) oraz pominiemy iloczyny rzędu  $(\gamma_{33})^2$ . Wtedy wypadkowy wektor naprężeń działających w płaszczyźnie da się napisać w postaci

$$(3.32) \quad \mathbf{P} = \int_{-b}^b D(g_{33}) \frac{3}{2} \gamma_{33} \{ -h\theta' \mathbf{L} + (h' + x_1 \theta') \mathbf{N} + [1 + x_1 (h\theta')'] \mathbf{e}_3 \} dx_1.$$

Wypadkowa siła normalna będzie iloczynem  $\mathbf{P} \mathbf{e}_3$ .

Podstawmy (2.9) do (3.32) i opuścimy iloczynny rzędu  $(\gamma_{33})^2$  powstające z mnożnika  $x_1 (h\theta)'$ . Pamiętając o zerowaniu się całek funkcji nieparzystych otrzymamy

$$(3.33) \quad \mathbf{P}e_3 = E^* \left[ w' + \frac{1}{2} (h\theta')^2 \right] A_p^* + \frac{1}{2} E^* \{ (\theta')^2 + [(h\theta)']^2 \} I_{22}^* ;$$

wprowadzono tu oznaczenia

$$(3.34) \quad E^* = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad A_p^* = \int_{-b}^b t^* dx_1, \\ I_{22}^* = \int_{-b}^b x_1^2 t^* dx_1, \quad t_p^* = t \left( \frac{g_{33}}{p} \right)^{-\frac{3}{2}},$$

Całkowitą siłę normalną w przekroju  $x_3 = \text{const}$  obliczymy przez dodanie siły normalnej ze środka (3.10) i dwóch półek (3.33):

$$(3.35) \quad P = E^* \left\{ w' A_p^* + \frac{1}{2} (\theta')^2 I_0^* + \frac{1}{2} [(h\theta)']^2 I_{22}^* \right\},$$

gdzie

$$A_p^* = A_s + 2A_p^*, \quad I_{22}^* = 2I_{22}^*, \\ I_0^* = I_{11} + 2h^2 A_p^* + 2I_{22}^*.$$

Warto zauważyć, że pominięto tutaj wpływ naprężeń stycznych  $n^{31}$  na wielkość siły normalnej.

W przekroju poprzecznym powstają również momenty od sił błonowych w półce. Moment sił normalnych względem środka półki obliczamy na podstawie (3.31), (3.19) oraz (3.28); wynosi on

$$(3.36) \quad \mathbf{t} \times x_1 \mathbf{G}_1 = -D \left( \frac{g_{33}}{p} \right)^{-\frac{3}{2}} \gamma_{33} \mathbf{K},$$

a jego składowa w kierunku  $\mathbf{N}$  na podstawie (3.36) i (3.29)<sub>1</sub> ma postać

$$(3.37) \quad (\mathbf{t} \times x_1 \mathbf{G}_1) \mathbf{N} = D \left( \frac{g_{33}}{p} \right)^{-\frac{3}{2}} x_1 \gamma_{33} [1 + x_1 (h\theta)'].$$

Stąd przez całkowanie w przedziale  $[-b, b]$  i po uwzględnieniu (2.9) otrzymuje się całkowity moment zginający z naprężeń  $n^{33}$  w półce:

$$(3.38) \quad H = E^* \left[ \frac{(h^2 \theta')}{h} I_{22}^* + (h\theta)' \left[ w' + \frac{1}{2} (h\theta')^2 \right] I_{22}^* + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (h\theta)' \{ (\theta')^2 + [(h\theta)']^2 \} I_{2222}^* \right],$$

gdzie

$$I_{2222}^* = \int_{-b}^b x_1^4 t^* dx_1.$$

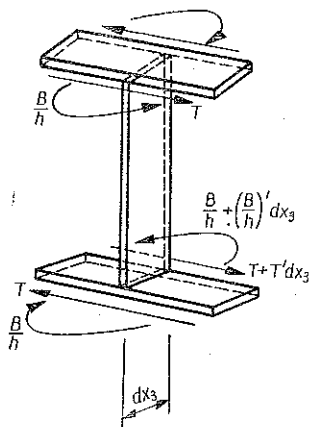
Moment skręcający naprężeń  $n^{33}$  względem środka środka można określić przez wyrażenie

$$(3.39) \quad \mathbf{t} \times (x_1 \mathbf{G}_1 + h\mathbf{N}) e_3.$$

Po obliczeniu prostych iloczynów mieszanych występujących w (3.39) oraz scałkowaniu tej wielkości otrzymuje się

$$(3.40) \quad \int_{-b}^b \mathbf{t} \times (x_1 \mathbf{G}_p + h\mathbf{N}) \mathbf{e}_3 dx_1 = E^* \left[ h^2 \theta' \left[ w' + \frac{1}{2} (h\theta')^2 \right] A_p^* + \right. \\ \left. + \theta' \left[ w' + \frac{1}{2} (h\theta')^2 \right] I_{p,22}^* + \frac{h'(h^2\theta')'}{h} I_{p,22}^* + \frac{h^2 \theta'}{2} \{(\theta')^2 + [(h\theta')']^2\} I_{p,22}^* + \right. \\ \left. + \frac{\theta'}{2} \{(\theta')^2 + [(h\theta')']^2\} I_{p,2222}^* \right].$$

Całkowity moment skręcający w dowolnym przekroju poprzecznym składa się z momentu skręcającego w środku (3.15), momentu skręcającego od naprężeń  $n^{33}$  w dwu półkach (3.40); mają również wpływ na jego wielkość naprężenia styczne  $n^{31}$ . Ten ostatni uwzględnimy rozpatrując równowagę wyciętego, uproszczonego elementu (rys. 5). Z warunku równowagi otrzymujemy



Rys. 5

$$(3.41) \quad T dx_3 = \left( \frac{B}{h} \right)' dx_3 \quad \text{lub} \quad Th = B' - B \frac{h'}{h},$$

gdzie wielkość oznaczoną przez  $B$  nazywamy bimomentem i definiujemy wyrażeniem  $B = 2Hh$ . Oczywiście mamy

$$(3.42) \quad T = \int_{-b}^b n^{31} \sqrt{G_{33}} dx_1.$$

Zatem całkowity moment skręcający wyniesie

$$(3.43) \quad H = B' - B \frac{h'}{h} + E^* \left\{ w' \theta' I_0^* + \frac{1}{2} (\theta')^3 I_{00}^* + 2 \frac{h'}{h} (h^2 \theta')' I_{p,22}^* + \right. \\ \left. + h^2 \theta' [(h\theta')']^2 I_{p,22}^* + \theta' [(h\theta')']^2 I_{p,2222}^* \right\} + GI_0 \theta',$$

gdzie

$$I_{00}^* = I_{1111} + 2h^4 A_p^* + 4h^2 I_{p,22}^* + 2I_{p,2222}^*.$$

Dodany tu składnik liniowy  $GI_0 \theta'$  pochodzi od czystego skręcania.

Metoda energetyczna przedstawiona w p. 4 potwierdza nam założenie, że wpływ zmiany kąta  $\theta' dx_3$  między dwoma sąsiednimi przekrojami wyciętego elementu na moment skręcający jest rzeczywiście nieznaczny i może być pomijany bez uszczerbku dla dokładności rozwiązania.

#### 4. ROZWIĄZANIE ENERGETYCZNE

Zastosowanie metody energetycznej pozwoli na sprawdzenie poczynionych założeń i wykonanych obliczeń. Konfrontacja obu rozwiązań umożliwi również znalezienie fizycznej interpretacji dokonanych uproszczeń.

Potencjalna energia sprężysta określona jest wzorem

$$(4.1) \quad I = \frac{1}{2} \int \int n^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} dS,$$

gdzie  $n^{\alpha\beta}$  są siłami błonowymi,  $\gamma_{\alpha\beta}$  odpowiednimi odkształceniami oraz  $dS$  polem elementu powierzchni.

Całkowita energia (4.1) zostanie przedstawiona w postaci sumy energii potencjalnej, zgromadzonej w środkniku i dwóch półkach. Siły błonowe określone są odpowiednio przez (3.5) oraz (3.19), natomiast elementy pola powierzchni wynoszą

dla środknika

$$dS = \sqrt{G} dx_2 dx_3 \approx (1 + \gamma_{33}) dx_2 dx_3,$$

dla półek

$$dS \cong \left[ (g_{33})_p^{\frac{1}{2}} + (g_{33})_p^{-\frac{1}{2}} \gamma_{33} \right] dx_1 dx_3.$$

Pominiemy trzecią potęgę odkształceń  $\gamma_{33}$ ; uwzględniając oznaczenia (3.34) otrzymamy

$$(4.2) \quad I = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-h}^h E^* (\gamma_{33})_s^2 t dx_2 dx_3 + \int_0^L \int_{-b}^b E^* (\gamma_{33})_p^2 t^* dx_1 dx_3.$$

Energia (4.2) po podstawieniu (2.7) i (2.9) przybiera postać

$$(4.3) \quad I = \frac{1}{2} E^* \int_0^L \left\{ (w')_s^2 A + w' (\theta')_s^2 I_{11} + \frac{1}{4} (\theta')_s^4 I_{1111} \right\} dx_3 + \\ + E^* \int_0^L \left[ \left[ w' + \frac{1}{2} (h\theta')^2 \right]_p^2 A^* + \left[ \frac{(h^2 \theta')'}{h} \right]_p^2 I_{22}^* + \right. \\ \left. + \left[ w' + \frac{1}{2} (h\theta')^2 \right] \{ (\theta')^2 + [(h\theta')']^2 \}_p I_{22}^* + \frac{1}{4} \{ (\theta')^2 + [(h\theta')']^2 \}_p^2 I_{2222}^* \right] dx_3.$$

W wyrażeniu tym za pomocą wprowadzonych uprzednio oznaczeń wykonano całkowanie: dla środknika w przedziale  $[-h, h]$ , a dla półek w przedziale  $[-b, b]$ .

Warunek na minimum funkcjonału (4.3) prowadzi do dwóch zależności, przy czym jedna z nich pokrywa się ściśle z (3.35). Jest to równoznaczne z warunkiem (4.4), ponieważ całkowita siła normalna równa jest zeru:

$$(4.4) \quad w' = -\frac{1}{2A^*} \{ (\theta')^2 I_0^* + [(h\theta')']^2 I_{22}^* \}.$$

Druga zależność sprowadza się do wzoru

$$(4.5) \quad H = B' + E^* \left[ w' \theta' I_0^* + \frac{1}{2} (\theta')^3 I_{00}^* + 4 \frac{h'}{h} (h^2 \theta')' I_{22}^* + (h\theta')' [2w' h' + \right. \\ \left. + h^2 \theta' (h\theta')' + h' (h\theta')^2 \right] I_{22}^* + (h\theta')' \{ (h\theta')' \theta' + h' (\theta')^2 + [(h\theta')']^2 h' \} I_{2222}^* \right]$$

przy czym

$$(4.6) \quad B = -E^* \left[ 2(h^2 \theta')' I_{22}^* + 2h(h\theta')' \left[ w' + \frac{1}{2}(h\theta')^2 \right] I_{22}^* + \right. \\ \left. + h(h\theta')' \{(\theta')^2 + [(h\theta)']^2\} I_{2222}^* \right].$$

Wielkość (4.6) jest bimomentem, ponieważ podzielona przez  $2h$  daje moment zginający w półce (3.38).

Korzystając z wyników p. 3 można w momencie skracającym (4.5) wyodrębnić składnik pochodzący od naprężeń  $n^{31}$ ; wynik ten będzie identyczny z (3.43).

Przez porównanie z (3.41) i (3.42) można również stwierdzić poprawność podanego wzoru na błonowe naprężenia styczne. Metoda energetyczna w pełni potwierdza więc rozważania dotyczące stanu naprężenia przy dużym skręcaniu pręta o bismetrycznie zmiennym przekroju dwuteowym.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. P. WILDE, *The torsion of thin-walled bars with variable cross-section*, Arch. Mech. Stos., 20, 4, 1968.
2. A. GHOBARAH, W. TSO, *A non-linear thin-walled beam theory*, Int. J. Mech. Sci., 13, 1971.
3. A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical elasticity*, Oxford 1968.

#### Резюме

#### БОЛЬШОЕ КРУЧЕНИЕ БИСИММЕТРИЧЕСКОГО ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ О ДВУТАВРОВОМ, ПЕРЕМЕННОМ СЕЧЕНИИ

В работе рассматривается состояние деформации и напряжений симметрического стержня двутаврового сечения в условиях больших перемещений. Состояние деформации описано при помощи угла кручения и продольного перемещения. Принимая упрощающие предположения теории тонкостенных стержней и опираясь на теорию оболочек получены основные уравнения большого кручения рассматриваемых стержней. Сравнение результатов непосредственных расчетов с результатами энергетического метода при употреблении вариационного анализа позволило провести расчеты и получить физическую интерпретацию сделанных упрощений.

#### SUMMARY

#### FINITE TORSION OF A DOUBLY SYMMETRIC THIN-WALLED BAR WITH VARIABLE I CROSS-SECTION

In the paper discussed is the state of strain and stress in a bar with a bisymmetrical, variable I cross-section subjected to a finite twist. The deformation is described by the angle of twist and by the longitudinal deformation. The simplifying assumptions of the theory of thin-walled fundamental equations of finite torsion are obtained. The equations are derived from the equilibrium conditions from the principle of minimum potential energy by means of the variational calculus. The comparison of results enables the discussion of the physical meaning of the simplifications assumed.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 lipca 1972 r.