

STATECZNOŚĆ PŁASKIEJ POSTACI ZGINANIA DŹWIGARÓW SIATKOWYCH O PASACH RÓWNOLEGLYCH

JAN MISIAK (WARSZAWA)

WSTĘP

Przedmiotem pracy jest zagadnienie stateczności płaskiej postaci zginania dźwigarów siatkowych o pasach równoległych. Zastosowano tu metodę obliczania wybożenia płytowego siatek płaskich, zaproponowaną przez H. FRĄCKIEWICZA w pracy [7]. Stosując tę metodę, opartą na teorii ośrodka dyskretnego, wprowadzonej przez H. FRĄCKIEWICZA w pracach [1 - 6], otrzymano przemieszczeniowe równania równowagi wybożonego dźwigara, stanowiące układ sześciu równań różnicowych liniowych o stałych współczynnikach. Układ ten rozwiązano metodą numeryczną dla znanych stosunków sztywności zginania i skręcania poszczególnych prętów dźwigara.

Sprowadzono problem do zagadnienia jednowymiarowego, co pozwoliło na znaczne uproszczenie warunków brzegowych i w konsekwencji na znaczne uproszczenie otrzymanych związków i równań. W tym celu uzależniono model geometryczny, stan odkształcenia, związki fizyczne, stan napięcia i równania równowagi od jednej zmiennej ξ^1 .

Pracę zilustrowano trzema przykładami, dla których obliczono wartości sił krytycznych.

1. MODEL GEOMETRYCZNY DŹWIGARA

Rozpatruje się regularny dźwigar prostokątny z przekątniowym wykrzyżowaniem, przedstawiony na rys. 1. Dźwigar w swej płaszczyźnie jest płaską kratownicą, zbudowaną z prostych prętów sprężystych, połączonych przegubowo w węzłach, tworzących siatkę trójkątną. Natomiast w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny dźwigara jest płytą siatkową o sztywnych węzłach. Węzłom leżącym zarówno na pasie dolnym jak i górnym dźwigara przypisuje się w pewien uporządkowany sposób liczbę ξ^1 ze zbioru liczb całkowitych. Liczby te tworzą krzywoliniową współrzędną ξ^1 . Dźwigar zanurzony jest w przestrzeni Euklidesa, sparametryzowanej kartezjańskim układem współrzędnych x^s ($s=1, 2$). Położenie poszczególnych węzłów dolnego i górnego pasa określone jest promieniami wektorami:

$$(1.1) \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{i}_1 a \xi^1 + \mathbf{i}_2 b, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{i}_1 a \xi^1 + \mathbf{i}_2 2b.$$

Promienie te pozwalają określić w dźwigarze lokalne bazy wektorowe e_s , e_3 i e_k , e_{III} oraz e^s , e^3 i e^k , e^{III} ($k=I, II$), a następnie obiekty: podstawowy g_{IJ} i wzajemny g^{IJ} . Wektorowe bazy podstawowe przedstawiają się w tym przypadku następująco:

$$(1.2) \quad e_1 = ai_1, \quad e_2 = bi_2, \quad e_3 = i_3,$$

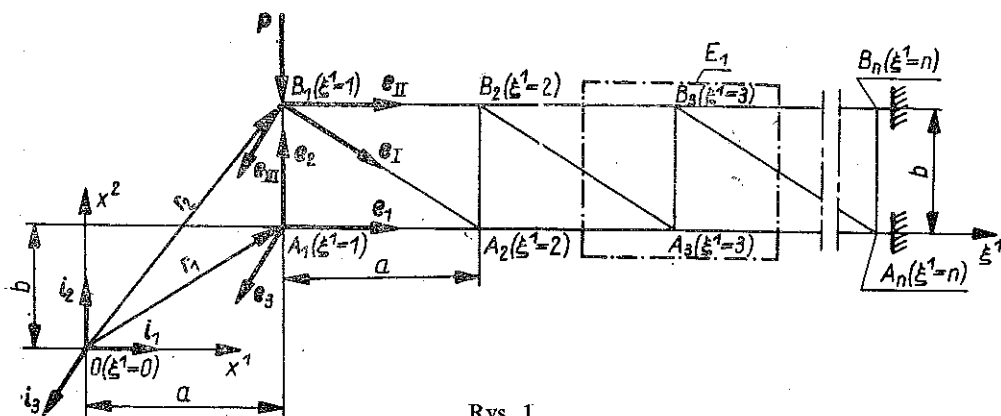
$$(1.3) \quad e_I = ai_1 - bi_2, \quad e_{II} = ai_1, \quad e_{III} = i_3.$$

Składowe obiektów podstawowych są równe:

$$(1.4) \quad g_{11} = a^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = b^2,$$

$$(1.5) \quad g_{II} = a^2 + b^2, \quad g_{I II} = a^2, \quad g_{III II} = a^2.$$

Powyższe składowe obiektów podstawowych tworzą macierz kwadratową o wyznaczniku $g = a^2 b^2$.



Rys. 1

Za pomocą wektorów baz podstawowych wyrazić można wektory baz wzajemnych:

$$(1.6) \quad e^1 = \frac{1}{a} i_1, \quad e^2 = \frac{1}{b} i_2, \quad e^3 = i_3,$$

$$(1.7) \quad e^I = \frac{1}{b} i_2, \quad e^{II} = \frac{ai_2 + bi_1}{ab}, \quad e^{III} = i_3.$$

Składowe obiektów wzajemnych są następujące:

$$(1.8) \quad g^{11} = \frac{1}{a^2}, \quad g^{12} = 0, \quad g^{22} = \frac{1}{b^2},$$

$$(1.9) \quad g^{II} = \frac{1}{b^2}, \quad g^{I II} = -\frac{1}{b^2}, \quad g^{III II} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}.$$

Współczynniki koneksji baz podstawowych i wzajemnych dla opisanego dźwigara siatkowego są tożsamościowo równe zeru.

2. STAN ODKSZTAŁCENIA

Proces odkształcenia dźwigara polega na zmianie konfiguracji, wywołanej przemieszczeniami jego elementów. Przemieszczenia elementów dźwigara składają się z przesunięć i obrotów. Przesunięcie wywołuje zmianę położenia elementu dźwigara, a obrót zmianę kierunków wektorów baz taką jednak, że moduły wektorów i kąty pomiędzy nimi pozostają stałe. W rezultacie dźwigar przyjmie nową konfigurację, którą nazwano konfiguracją aktualną.

2.1. Odkształcenie przesunięciowe

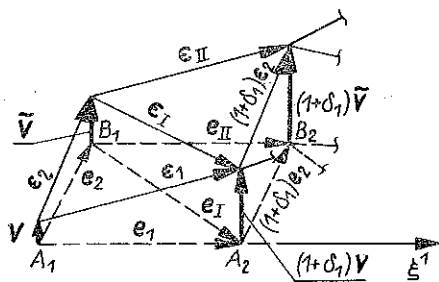
Opisano na rozpatrywanym dźwigarze pole wektorowe przemieszczeń jego węzłów $v_{(\xi^1)}$, $\tilde{v}_{(\xi^1)}$. Sposób tworzenia nowego dźwigara ilustruje rys. 2. Obiekty wektorowe tego pola można wyrazić przez składowe skalarne w bazie podstawowej lub wzajemnej:

$$(2.1) \quad v_{(\xi^1)} = v^\alpha e_\alpha = v_\alpha e^\alpha, \quad \tilde{v}_{(\xi^1)} = \tilde{v}^\alpha e_\alpha = \tilde{v}_\alpha e^\alpha,$$

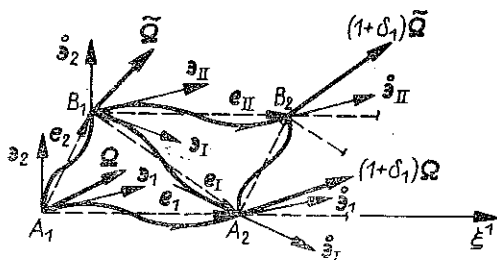
gdzie $\alpha = 1, 2, 3$.

W konfiguracji aktualnej wprowadza się następujące funkcje wektorowe baz podstawowych:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \epsilon_1 &= e_1 + \delta_1 v, & \epsilon_2 &= e_2 - v + \tilde{v}, \\ \epsilon_I &= e_I + (1 + \delta_1) v - \tilde{v}, & \epsilon_{II} &= e_{II} + \delta_1 \tilde{v}. \end{aligned}$$



Rys. 2



Rys. 3

2.2. Odkształcenie obrotowe

Opisuje się na rozpatrywanym dźwigarze pole wektorów obrotu $\Omega_{(\xi^1)}$, $\tilde{\Omega}_{(\xi^1)}$. Na rys. 3 pokazano dźwigar odkształcony obrotowo. Pole wektorowe obrotów węzłów dźwigara Ω i $\tilde{\Omega}$ traktuje się jako znaną funkcję współrzędnej ξ^1 , którą można wyrazić przez składowe w bazach podstawowej i wzajemnej konfiguracji początkowej:

$$(2.3) \quad \Omega = \Omega^\alpha e_\alpha = \Omega_\alpha e^\alpha, \quad \tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}^\alpha e_\alpha = \tilde{\Omega}_\alpha e^\alpha.$$

Według rys. 3 wektory obrotów Ω i $\tilde{\Omega}$ przekształcają dowolne wektory baz konfiguracji początkowej \mathbf{e}_s i \mathbf{e}_k na wektory baz konfiguracji aktualnej \mathfrak{e}_s i \mathfrak{e}_k . Wektory te są następujące:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \mathfrak{e}_1 &= \mathbf{e}_1 + \Omega^\alpha (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_1), & \mathfrak{e}_2 &= \mathbf{e}_2 + \Omega^\alpha (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_2), \\ \mathfrak{e}_I &= \mathbf{e}_I + \tilde{\Omega}^\alpha (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_I), & \mathfrak{e}_{II} &= \mathbf{e}_{II} + \tilde{\Omega}^\alpha (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_{II}). \end{aligned}$$

Przy definiowaniu obiektów odkształcenia, wywołanych polem wektorowym $\Omega_{(\xi^1)}$ i $\tilde{\Omega}_{(\xi^1)}$ potrzebne nam będą także wektory $\mathring{\mathfrak{e}}_s$ i $\mathring{\mathfrak{e}}_k$, powstałe przez obrót wektorów \mathbf{e}_s i \mathbf{e}_k o kąty określone wektorami $(1+\delta_1)\Omega$ i $(1+\delta_1)\tilde{\Omega}$. Wektory te są następujące:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \mathring{\mathfrak{e}}_1 &= \mathbf{e}_1 + (1+\delta_1)\Omega^\alpha (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_1), & \mathring{\mathfrak{e}}_2 &= \mathbf{e}_2 + \tilde{\Omega}^\alpha (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_2), \\ \mathring{\mathfrak{e}}_I &= \mathbf{e}_I + (1+\delta_1)\Omega^\alpha (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_I), & \mathring{\mathfrak{e}}_{II} &= \mathbf{e}_{II} + (1+\delta_1)\tilde{\Omega}^\alpha (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_{II}). \end{aligned}$$

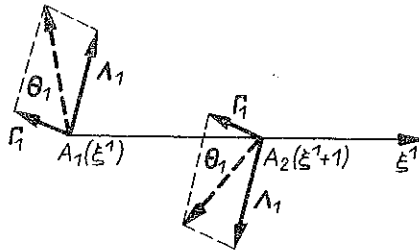
2.3. Odkształcenie całkowite

Odkształcenie całkowite rozpatrywanego dźwigara, składające się z odkształcenia przesunięciowego i obrotowego, określają w sposób jednoznaczny obiekty opisujące wygięcie łączników, spowodowane polem przesunięć węzłów $\mathbf{v}_{(\xi^1)}$ i $\tilde{\mathbf{v}}_{(\xi^1)}$ i polem ich obrotu $\Omega_{(\xi^1)}$, $\tilde{\Omega}_{(\xi^1)}$. Miarą ugięcia łączników będą wektory $\theta_s, \mathring{\theta}_s, \theta_k, \mathring{\theta}_k$, które dla małych odkształceń są wektorowymi miarami kątów pomiędzy wektorami $(\mathbf{e}_s, \mathfrak{e}_s)$, $(\mathbf{e}_k, \mathfrak{e}_k)$, $(\mathbf{e}_s, \mathring{\mathfrak{e}}_s)$, $(\mathbf{e}_k, \mathring{\mathfrak{e}}_k)$. Wektory $\theta_s, \mathring{\theta}_s, \theta_k, \mathring{\theta}_k$ wyrazić można wzorami następującymi:

$$(2.6) \quad \theta_s = \frac{\mathbf{e}_s \times \mathfrak{e}_s}{|\mathbf{e}_s| |\mathfrak{e}_s|}, \quad \mathring{\theta}_s = \frac{\mathbf{e}_s \times \mathring{\mathfrak{e}}_s}{|\mathbf{e}_s| |\mathring{\mathfrak{e}}_s|}, \quad \theta_k = \frac{\mathbf{e}_k \times \mathfrak{e}_k}{|\mathbf{e}_k| |\mathfrak{e}_k|}, \quad \mathring{\theta}_k = \frac{\mathbf{e}_k \times \mathring{\mathfrak{e}}_k}{|\mathbf{e}_k| |\mathring{\mathfrak{e}}_k|}.$$

2.4. Związki geometryczne

Dla łącznika A_1, A_2 , pokazanego na rys. 4, przedstawiono wektory $\theta_1, \mathring{\theta}_1$ jako liniową kombinację wektorów Γ_1, Λ_1 . W ogólnym przypadku, otrzymamy



Rys. 4

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \theta_s &= \Gamma_s + \Lambda_s, & \mathring{\theta}_s &= \Gamma_s - \Lambda_s, \\ \theta_k &= \Gamma_k + \Lambda_k, & \mathring{\theta}_k &= \Gamma_k - \Lambda_k. \end{aligned}$$

Wektory $\Gamma_s, \Lambda_s, \Gamma_k, \Lambda_k$ wyrazić można po uwzględnieniu zależności (2.6) następującymi wzorami:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \Gamma_s &= \frac{1}{2g_{ss}} \epsilon_s \times (\vartheta_s + \dot{\vartheta}_s), & \Lambda_s &= \frac{1}{2g_{ss}} \epsilon_s \times (\vartheta_s - \dot{\vartheta}_s), \\ \Gamma_k &= \frac{1}{2g_{kk}} \epsilon_k \times (\vartheta_k + \dot{\vartheta}_k), & \Lambda_k &= \frac{1}{2g_{kk}} \epsilon_k \times (\vartheta_k - \dot{\vartheta}_k). \end{aligned}$$

Podstawiając do wzorów (2.8) wektory (2.2) oraz wektory (2.4), (2.5) z dokładnością do wyrazów liniowych, otrzymamy

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{abe^2}{2g_{11}} [2\delta_1 v + ab (2\Omega^2 + \delta_1 \Omega^2)], & \Lambda_1 &= -\frac{a^2 b^2 e^2}{2g_{11}} \delta_1 \Omega^2, \\ \Gamma_2 &= \frac{abe^1}{2g_{22}} [2(v - \tilde{v}) + ab (\Omega^1 + \tilde{\Omega}^1)], & \Lambda_2 &= \frac{a^2 b^2 e^1}{2g_{22}} (\Omega^1 - \tilde{\Omega}^1), \\ \Gamma_{\text{I}} &= \frac{ab (e^1 + e^2)}{2g_{\text{I}}} [2(v + \delta_1 v - \tilde{v}) + ab (\Omega^1 + \delta_1 \Omega^1 + \Omega^2 + \delta_1 \Omega^2 + \tilde{\Omega}^1 + \tilde{\Omega}^2)], \\ \Lambda_{\text{I}} &= \frac{a^2 b^2 (e^1 + e^2)}{2g_{\text{I}}} [-(1 + \delta_1) (\Omega^1 + \Omega^2) + \tilde{\Omega}^1 + \tilde{\Omega}^2], \\ \Gamma_{\text{II}} &= \frac{abe^2}{2g_{\text{II}}} [2\delta_1 \tilde{v} + ab (2\tilde{\Omega}^2 + \delta_1 \tilde{\Omega}^2)], & \Lambda_{\text{II}} &= -\frac{a^2 b^2 e^2}{2g_{\text{II}}} \delta_1 \tilde{\Omega}^2. \end{aligned}$$

Wektory $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{\text{I}}, \Gamma_{\text{II}}$ opisują antysymetryczną część wygięcia łączników; wektory $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_{\text{I}}, \Lambda_{\text{II}}$ nazwano składowymi symetrycznego obiektu wygięcia łączników.

Skrećanie łączników wyraża się wzorami następującymi:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= \sqrt{g_{11}} \delta_1 \Omega^1, & \varphi_2 &= \sqrt{g_{22}} (\tilde{\Omega}^2 - \Omega^2), \\ \varphi_{\text{II}} &= \sqrt{g_{\text{II}}} \delta_1 \tilde{\Omega}^1, & \varphi_{\text{I}} &= \frac{1}{\sqrt{g_{\text{I}}}} [g_{11} (\Omega^1 + \delta_1 \Omega^1 - \tilde{\Omega}^1) - \\ & & & - g_{22} (\Omega^2 + \delta_1 \Omega^2 - \tilde{\Omega}^2)]. \end{aligned}$$

Wzory (2.9) i (2.10) stanowią układ związków geometrycznych dla rozpatrywanego dźwigara.

3. ZWIĄZKI FIZYCZNE I STAN NAPIĘCIA

Podobnie jak dla dźwigarów ciągłych, związki fizyczne określają zależności między składowymi płytowego stanu napięcia, a składowymi stanu odkształcenia. W monografii [6] wyprowadzono te związki zarówno dla składowych podstawowego jak i wzajemnego stanu napięcia. Dla składowych podstawowego stanu napięcia związki te wynikają wprost z teorii belek; w przypadku rozpatrywanego dźwigara są następujące:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} K_1 &= \frac{6a_1}{\sqrt{g_{11}}} \Gamma_1 = \frac{3a_1 b e^2}{a^2} [2(v_{(\xi^1+1)} - v_{(\xi^1)}) + ab (\Omega_{(\xi^1)}^2 + \Omega_{(\xi^1+1)}^2)], \\ G_1 &= \frac{2a_1}{\sqrt{g_{11}}} \Lambda_1 = -\frac{a_1 b^2 e^2}{a} [\Omega_{(\xi^1+1)}^2 - \Omega_{(\xi^1)}^2], \end{aligned}$$

(3.1)
[c.d.]

$$\kappa_1 = \frac{b_1}{\sqrt{g_{11}}} \varphi_1 = b_1 [\Omega_{(\xi^1+1)}^1 - \Omega_{(\xi^1)}^1],$$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{6a_2}{\sqrt{g_{22}}} \mathbf{\Gamma}_2 = \frac{3a_2 a \mathbf{e}^1}{b^2} [2(v_{(\xi^1)} - \tilde{v}_{(\xi^1)}) + ab(\Omega_{(\xi^1)}^1 + \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1)],$$

$$\mathbf{G}_2 = \frac{2a_2}{\sqrt{g_{22}}} \mathbf{\Lambda}_2 = \frac{a_2 a^2 \mathbf{e}^1}{b} [\Omega_{(\xi^1)}^1 - \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1],$$

$$\kappa_2 = \frac{b_2}{\sqrt{g_{22}}} \varphi_2 = b_2 [\tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2 - \Omega_{(\xi^1)}^2],$$

$$\mathbf{K}_I = \frac{6a_I}{\sqrt{g_{II}}} \mathbf{\Gamma}_I = \frac{3aba_I(\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2)}{(a^2 + b^2)^{1/2}} [2(v_{(\xi^1+1)} - v_{(\xi^1)}) + ab(\tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2 + \Omega_{(\xi^1+1)}^2 + \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1 + \Omega_{(\xi^1+1)}^1)],$$

$$\mathbf{G}_I = \frac{2a_I}{\sqrt{g_{II}}} \mathbf{\Lambda}_I = \frac{a^2 b^2 a_I(\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2)}{(a^2 + b^2)^{1/2}} [\tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1 - \Omega_{(\xi^1+1)}^1 + \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2 - \Omega_{(\xi^1+1)}^2],$$

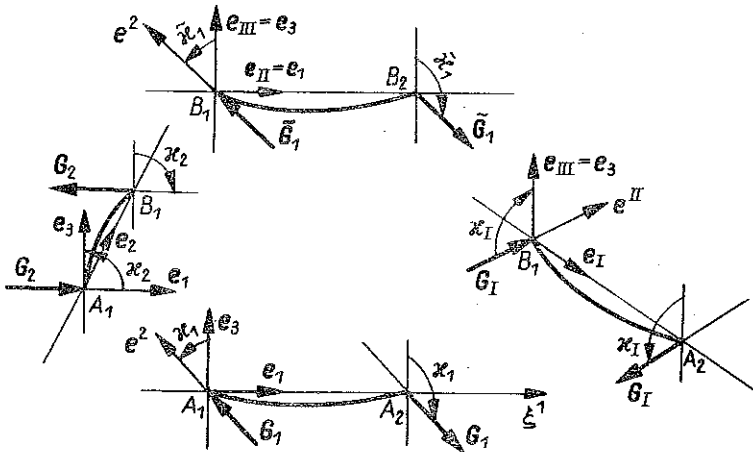
$$\kappa_I = \frac{b_I}{\sqrt{g_{II}}} \varphi_I = \frac{b_I}{(a^2 + b^2)^{1/2}} [a^2(\Omega_{(\xi^1+1)}^1 - \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1) - b^2(\Omega_{(\xi^1+1)}^2 - \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2)],$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_I = \frac{6a_{II}}{\sqrt{g_{II II}}} \mathbf{\Gamma}_{II} = \frac{3a_{II} b e^2}{a^2} [2(v_{(\xi^1+1)} - v_{(\xi^1)}) + ab(\tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2 + \tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^2)],$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_I = \frac{2a_{II}}{\sqrt{g_{II II}}} \mathbf{\Lambda}_{II} = -\frac{a_{II} b^2 \mathbf{e}^2}{a} [\tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^2 - \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2],$$

$$\tilde{\kappa}_I = \frac{b_{II}}{\sqrt{g_{II II}}} \varphi_{II} = b_{II} [\tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^1 - \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1],$$

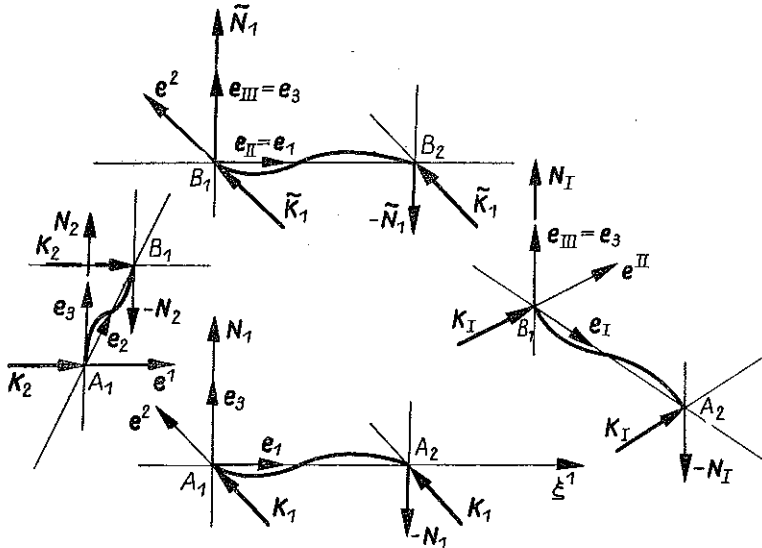
gdzie a_1, a_2, a_I, a_{II} oznaczają sztywności zginania łączników, b_1, b_2, b_I, b_{II} sztywności skręcania łączników.



Rys. 5

Na rys. 5 i 6 pokazano dodatnie zwroty składowych podstawowego stanu napięcia. Siły $N_1, N_2, \tilde{N}_1, \tilde{N}_1$ można wyrazić przez składowe w bazie podstawowej:

$$(3.2) \quad N_1 = N_1 e_3 = n_1^3 e_3, \quad N_2 = N_2 e_3 = n_2^3 e_3, \quad N_I = N_I e_3 = n_I^3 e_3, \\ \tilde{N}_1 = \tilde{N}_1 e_3 = \tilde{n}_1^3 e_3.$$



Rys. 6

Pisząc równania równowagi łączników wg rys. 6 i dokonując odpowiednich przekształceń z uwzględnieniem powyższych zależności (3.2), otrzymamy

$$(3.3) \quad 2K_1 = n_1^3 (e_1 \times e_3), \quad 2K_2 = n_2^3 (e_2 \times e_3), \\ 2\tilde{K}_1 = \tilde{n}_1^3 (e_1 \times e_3), \quad 2K_I = n_I^3 [(e_1 \times e_3) - (e_2 \times e_3)].$$

Momenty działające na początek łączników, jak przedstawiono na rys. 5 i 6, zostały wyrażone przez wektory $K_1, K_2, K_I, \tilde{K}_1, G_1, G_2, G_I, \tilde{G}_1$ oraz skalary $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_I, \tilde{\kappa}_1$. Następnie wyrażając je przez składowe w bazie podstawowej, otrzymamy

$$(3.4) \quad m_1^s = \left[(K_1 + G_1) e^s - \kappa_1 \frac{e_1 \cdot e^s}{\sqrt{g_{11}}} \right], \quad m_2^s = \left[(K_2 + G_2) e^s - \kappa_2 \frac{e_2 \cdot e^s}{\sqrt{g_{22}}} \right], \\ \tilde{m}_1^s = \left[(\tilde{K}_1 + \tilde{G}_1) e^s - \tilde{\kappa}_1 \frac{e_{II} \cdot e^s}{\sqrt{g_{II II}}} \right], \quad m_I^s = \left[(K_I + G_I) e^s - \kappa_I \frac{e_I \cdot e^s}{\sqrt{g_{II}}} \right].$$

Zaletą wprowadzonych powyżej obiektów napięcia jest to, że za ich pomocą otrzymuje się prosty zapis skalarowych równań równowagi dźwigara siatkowego.

4. METODA ROZWIĄZANIA

Zagadnienie stateczności płaskiej postaci zginania dźwigarów siatkowych polega na określeniu wartości obciążenia krytycznego, przy którym występuje przestrzenna, giętno-skrętna postać równowagi dźwigara. Jak stwierdzono we wstępie, do rozwiązania tego zagadnienia zastosowano przybliżoną metodę obliczania wyboczenia płytowego siatek płaskich, która została omówiona w pracy [7]. Dźwigar płaski, obciążony tarczowym układem sił, zastąpiono modelem składającym się ze sztywno-przegubowej tarczy i połączonej z nią płyty sprężystej. Wychylenie tego układu z konfiguracji tarczowej w konfigurację wyboczeniową typu płytowego powoduje, że w sztywno-przegubowej tarczy pojawiają się pewne niezrównoważone składowe, które zaczynają obciążać płytę w poszczególnych węzłach. Składowe te są funkcjami tarczowego stanu napięć (znanego z rozwiązania dźwigara jako kratownicy płaskiej) i założonego wychylenia płytowego. Rozwiązując następnie zagadnienie płyty poszukuje się takiej wartości zewnętrznego tarczowego obciążenia P , przy którym jest możliwa równowaga omawianego modelu w płytowej konfiguracji wyboczeniowej. Obliczona w ten sposób krytyczna wielkość siły P jest traktowana jako przybliżona wartość obciążenia krytycznego rozpatrywanego dźwigara siatkowego.

Zgodnie z przedstawionym wyżej schematem przy obliczaniu obciążenia płytowego, pochodzącego od napięć wewnętrznych w tarczy, zakładamy, że pręty tarczy połączone są z węzłami takimi przegubami, które umożliwiają istnienie w tarczy stanu napięć $\mathbf{T}_s, \tilde{\mathbf{T}}_k$ oraz nie powodują zginania prętów tarczy przy przejściu w konfigurację wyboczeniową typu płytowego.

4.1. Tarczowy stan napięcia

Rozpatruje się tarczę przedstawioną na rys. 1, obciążoną siłą brzegową P . Ze statyki węzła E_1 (rys. 1) otrzymano równania równowagi węzłów A_3, B_3 i brzegowego B_1 według rys. 7:

$$(4.1) \quad -\mathbf{T}_1 + \delta_1 \mathbf{T}_1 + (1 + \delta_1) \mathbf{T}_2 = 0,$$

$$(4.2) \quad (1 + \delta_1) \mathbf{T}_1 - (1 + \delta_1) \mathbf{T}_2 + \delta_1 \tilde{\mathbf{T}}_1 = 0,$$

$$(4.3) \quad \mathbf{T}_1 + \tilde{\mathbf{T}}_1 - \mathbf{P} = 0.$$

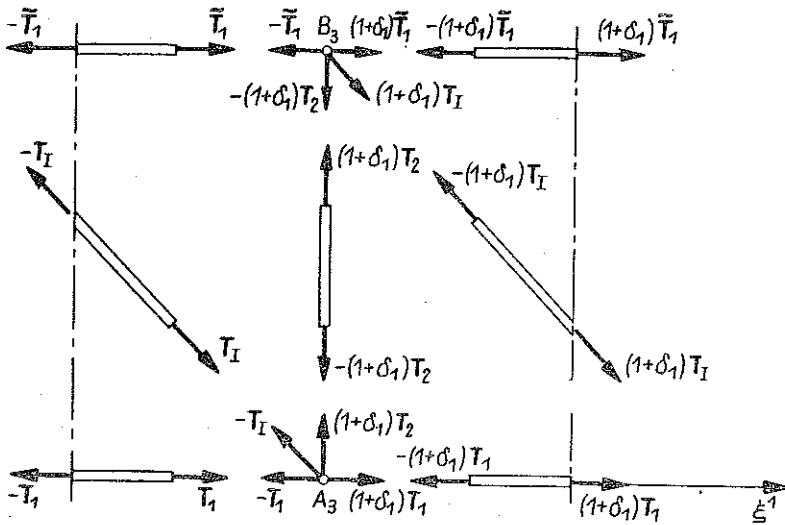
Po dokonaniu odpowiednich przekształceń otrzymuje się wartości na siły tarczowe:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} T_{1(\xi^1+1)} &= -P \frac{a}{b} \xi^1, & T_{2(\xi^1+1)} &= P, \\ \tilde{T}_{1(\xi^1)} &= P \frac{a}{b} \xi^1, & T_{1(\xi^1)} &= -\frac{P}{b} (a^2 + b^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

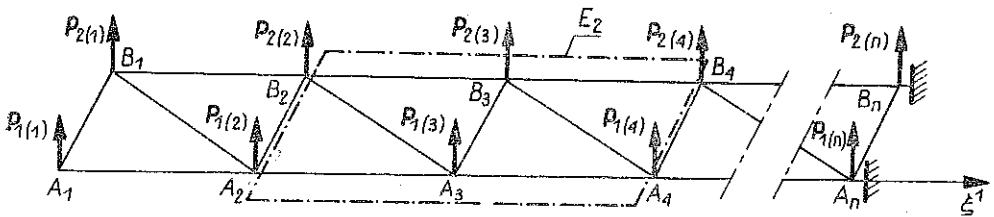
4.2. Płytowy stan napięcia

Rozważono płytę siatkową przedstawioną na rys. 8, obciążoną w poszczególnych węzłach obciążeniem zewnętrznym w postaci sił $\mathbf{P}_{1(1)}, \mathbf{P}_{1(2)}, \dots, \mathbf{P}_{1(n)}$ i $\mathbf{P}_{2(1)}, \mathbf{P}_{2(2)}, \dots, \mathbf{P}_{2(n)}$, prostopadłych do płaszczyzny płyty. Założono, że konfiguracja początkowa płyty pokrywa się z konfiguracją początkową tarczy.

Zagadnienie zginania płyt siatkowych opracowane zostało w punkcie 2 i 3 niniejszej pracy, gdzie wyprowadzone zostały podstawowe związki i równania niezbędne do rozwiązania zagadnienia płyty w przemieszczeniach.



Rys. 7



Rys. 8

Rozpatrując statykę węzła E_2 (rys. 8) otrzymano równania równowagi dwóch węzłów A_3, B_3 (rys. 9):

$$(4.5) \quad \begin{aligned} N_1 - (1 + \delta_1) N_2 - \delta_1 N_1 + (1 + \delta_1) P_1 &= 0, \\ (1 + \delta_1) N_2 - (1 + \delta_1) N_1 - \delta_1 \tilde{N}_1 + (1 + \delta_1) P_2 &= 0; \end{aligned}$$

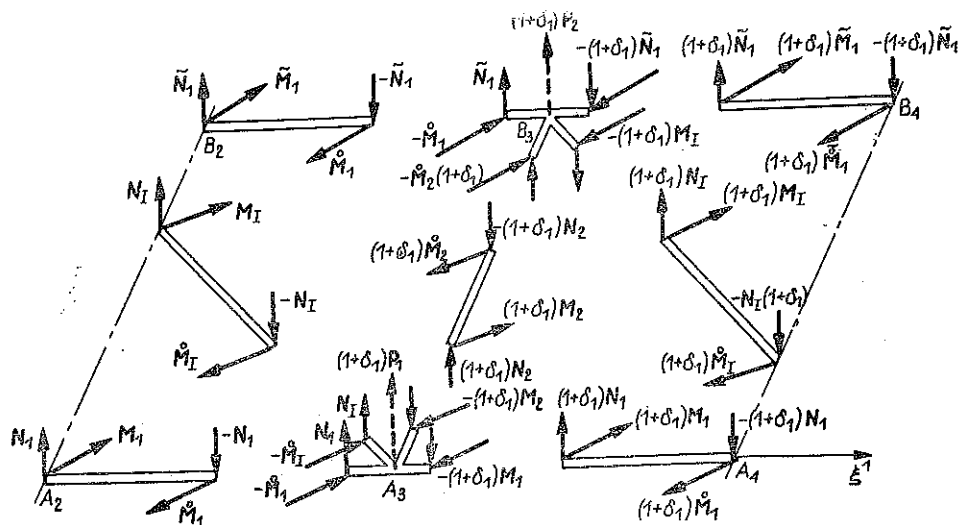
$$(4.6) \quad \begin{aligned} -\dot{M}_1 - \dot{M}_1 - (1 + \delta_1) M_2 - (1 + \delta_1) M_1 &= 0, \\ -\tilde{M}_1 - (1 + \delta_1) \dot{M}_2 - (1 + \delta_1) M_1 - (1 + \delta_1) M_1 &= 0. \end{aligned}$$

Pisząc równania równowagi poszczególnych prętów, otrzymamy:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \dot{M}_1 &= e_1 \times N_1 - M_1, & (1 + \delta_1) \dot{M}_2 &= e_2 \times (1 + \delta_1) N_2 - (1 + \delta_1) M_2, \\ \tilde{M}_1 &= e_{11} \times \tilde{N}_1 - \tilde{M}_1, & \dot{M}_1 &= (e_1 - e_2) \times N_1 - M_1. \end{aligned}$$

Uwzględniając równania (4.7), a następnie wyrażając siły i momenty przez składowe w bazie podstawowej, otrzymamy następujące równania równowagi:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} n_1^3 - (1 + \delta_1) n_2^3 - \delta_1 n_1^3 + (1 + \delta_1) P_1^3 &= 0, \\ (1 + \delta_1) n_2^3 - (1 + \delta_1) n_1^3 - \delta_1 \tilde{n}_1^3 + (1 + \delta_1) P_2^3 &= 0, \\ abn_1^3 + m_1^1 g_{11} - (1 + \delta_1) m_2^1 g_{11} - \delta_1 m_1^1 g_{11} &= 0, \\ abn_1^3 + abn_1^3 + m_1^1 g_{22} - (1 + \delta_1) m_2^1 g_{22} - \delta_1 m_1^1 g_{22} &= 0, \\ -(1 + \delta_1) abn_2^3 + (1 + \delta_1) m_2^1 g_{11} - (1 + \delta_1) m_1^1 g_{11} - \delta_1 \tilde{m}_1^1 g_{11} &= 0, \\ ab\tilde{n}_1^3 + (1 + \delta_1) m_2^1 g_{22} - (1 + \delta_1) m_1^1 g_{22} - \delta_1 \tilde{m}_1^1 g_{22} &= 0. \end{aligned}$$



Rys. 9

Składowe obiektów napięć na podstawie wzorów (3.1), (3.3) i (3.4) w postaci rozwiniętej mają następującą postać:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} n_1^3 &= -\frac{6a_1}{a^3} [2(v_{(\xi^1+1)} - v_{(\xi^1)}) + ab(\Omega_{(\xi^1+1)}^2 + \Omega_{(\xi^1)}^2)], \\ n_2^3 &= \frac{6\alpha a_1}{b^3} [2(v_{(\xi^1)} - \tilde{v}_{(\xi^1)}) + ab(\Omega_{(\xi^1)}^1 + \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1)], \\ \tilde{n}_1^3 &= -\frac{6\beta a_1}{a^3} [2(\tilde{v}_{(\xi^1+1)} - \tilde{v}_{(\xi^1)}) + ab(\tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^2 + \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2)], \\ n_1^3 &= -\frac{6\eta a_1}{A^3} [2(v_{(\xi^1+1)} - \tilde{v}_{(\xi^1)}) + ab(\Omega_{(\xi^1+1)}^1 + \Omega_{(\xi^1+1)}^2 + \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1 + \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2)], \\ m_1^1 &= \frac{\psi a_1}{a} [\Omega_{(\xi^1+1)}^1 - \Omega_{(\xi^1)}^1], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.9) \quad [c.d.] \quad m_1^2 &= \frac{a_1}{a^2 b} [6 (v_{(\xi^1+1)} - v_{(\xi^1)}) + 2ab (2\Omega_{(\xi^1)}^2 + \Omega_{(\xi^1+1)}^2)], \\
 m_2^2 &= \frac{\gamma a_1}{b} [\tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2 - \Omega_{(\xi^1)}^2], \\
 m_2^1 &= \frac{\alpha a_1}{b^2 a} [6 (v_{(\xi^1)} - \tilde{v}_{(\xi^1)}) + 2ab (2\Omega_{(\xi^1)}^1 + \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1)], \\
 \tilde{m}_1^1 &= \frac{\delta a_1}{a} [\tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^1 - \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1], \\
 \tilde{m}_2^1 &= \frac{\beta a_1}{a^2 b} [6 (\tilde{v}_{(\xi^1+1)} - \tilde{v}_{(\xi^1)}) + 2ab (2\tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2 + \tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^2)], \\
 m_1^1 &= \frac{a_1 b \eta}{a A^3} [6 (v_{(\xi^1+1)} - \tilde{v}_{(\xi^1)}) + 2ab (\Omega_{(\xi^1+1)}^1 + \Omega_{(\xi^1+1)}^2 + 2\tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1 + 2\tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2)] + \\
 &\quad + \frac{a_1 \mu}{A^3} [a^2 (\Omega_{(\xi^1+1)}^1 - \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1) + b^2 (\tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2 - \Omega_{(\xi^1+1)}^2)], \\
 m_2^1 &= \frac{a_1 a \eta}{b A^3} [6 (v_{(\xi^1+1)} - \tilde{v}_{(\xi^1)}) + 2ab (\Omega_{(\xi^1+1)}^1 + \Omega_{(\xi^1+1)}^2 + 2\tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1 + 2\tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2)] + \\
 &\quad + \frac{a_1 \mu}{A^3} [a^2 (\Omega_{(\xi^1+1)}^1 - \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1) + b^2 (\tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2 - \Omega_{(\xi^1+1)}^2)],
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 \eta &= \frac{a_{\text{I}}}{a_1}, & \alpha &= \frac{a_2}{a_1}, & \beta &= \frac{a_{\text{II}}}{a_1}, & \mu &= \frac{b_{\text{I}}}{a_1}, & \gamma &= \frac{b_2}{a_1}, & \delta &= \frac{b_{\text{II}}}{a_1}, \\
 \psi &= \frac{b_1}{a_1}, & A &= (a^2 + b^2)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

4.3. Obciążenie płytowe wywołane tarczowym stanem napięcia

Sposób połączenia węzłów sztywno-przegubowej tarczy i sprężystej płyty jest taki, że umożliwia przeniesienie niezrównoważonych obciążeń z tarczy na płytę. Jeśli nadać węzłom tarczy przesunięcia $v_{(\xi^1)}$ i $\tilde{v}_{(\xi^1)}$, to łączniki znajdujące się pomiędzy węzłami przyjmą położenie pokazane na rys. 10.

Suma rzutów sił T_{α} , \tilde{T}_k na kierunek e_3 , działających na węzły A i B , pochodzące od oddziaływania poszczególnych łączników przedstawia się następująco:

$$(4.10) \quad (1 + \delta_1) P_1 = -T_1 \alpha_1 + (1 + \delta_1) T_1 \alpha_1 - T_1 \alpha_1 + (1 + \delta_1) T_2 \alpha_2,$$

$$(4.11) \quad (1 + \delta_1) P_2 = -\tilde{T}_1 \alpha_1 + (1 + \delta_1) \tilde{T}_1 \tilde{\alpha}_1 - (1 + \delta_1) T_2 \alpha_2 + (1 + \delta_1) T_1 \alpha_1.$$

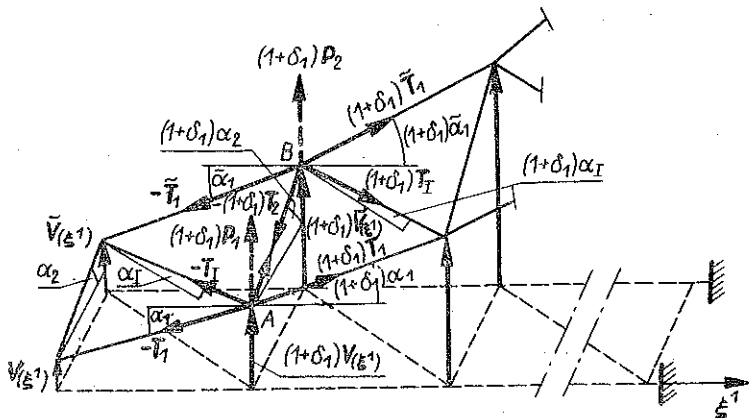
Kąty obrotu łączników są następujące:

$$\begin{aligned}
 (4.12) \quad \alpha_1 &= \frac{v_{(\xi^1+1)} - v_{(\xi^1)}}{\sqrt{g_{11}}}, & \tilde{\alpha}_1 &= \frac{\tilde{v}_{(\xi^1+1)} - \tilde{v}_{(\xi^1)}}{\sqrt{g_{\text{II II}}}}, \\
 \alpha_2 &= \frac{\tilde{v}_{(\xi^1)} - v_{(\xi^1)}}{\sqrt{g_{22}}}, & \alpha_{\text{I}} &= \frac{v_{(\xi^1+1)} - \tilde{v}_{(\xi^1)}}{\sqrt{g_{\text{II}}}}.
 \end{aligned}$$

Podstawiając wyrażenia (4.12) do wzorów (4.10) i (4.11) oraz dokonując niezbędnych przekształceń, otrzymamy siły $P_{1(\xi^{i+1})}$ i $P_{2(\xi^{i+1})}$, obciążające płytę w poszczególnych węzłach:

$$(4.13) \quad P_{1(\xi^{i+1})} = v_{(\xi^i)} \left[\frac{T_{1(\xi^i)}}{a} \right] + v_{(\xi^{i+1})} \left[-\frac{T_{1(\xi^{i+1})} + T_{1(\xi^i)}}{a} - \frac{T_{1(\xi^i)}}{A} - \frac{T_{2(\xi^{i+1})}}{b} \right] + \\ + v_{(\xi^{i+2})} \left[\frac{T_{1(\xi^{i+1})}}{a} \right] + \tilde{v}_{(\xi^i)} \left[\frac{T_{1(\xi^i)}}{A} \right] + \tilde{v}_{(\xi^{i+1})} \left[\frac{T_{2(\xi^{i+1})}}{b} \right],$$

$$(4.14) \quad P_{2(\xi^{i+1})} = v_{(\xi^{i+1})} \left[\frac{T_{2(\xi^{i+1})}}{b} \right] + v_{(\xi^{i+2})} \left[\frac{T_{1(\xi^{i+1})}}{A} \right] + \tilde{v}_{(\xi^i)} \left[\frac{\tilde{T}_{1(\xi^i)}}{a} \right] + \\ + \tilde{v}_{(\xi^{i+1})} \left[-\frac{\tilde{T}_{1(\xi^i)} + \tilde{T}_{1(\xi^{i+1})}}{a} - \frac{T_{2(\xi^{i+1})}}{b} - \frac{T_{1(\xi^{i+1})}}{A} \right] + \tilde{v}_{(\xi^{i+2})} \left[\frac{\tilde{T}_{1(\xi^{i+1})}}{a} \right].$$



Rys. 10

Po podstawieniu do wzorów (4.13) i (4.14) wielkości (4.4), otrzymano siły $P_{1(\xi^{i+1})}$ i $P_{2(\xi^{i+1})}$ wyrażone przez siłę tarczową P . Natępnie tak otrzymane obciążenie płytowe, wywołane tarczowym stanem napięcia, podstawiamy do pierwszych dwu równań równowagi (4.8), zastępując wyrazy $(1+\delta_1)P_1^3$ i $(1+\delta_1)P_2^3$:

$$(4.15) \quad (1+\delta_1)P_1^3 = P_{1(\xi^{i+1})}, \quad (1+\delta_1)P_2^3 = P_{2(\xi^{i+1})}.$$

4.4. Równania równowagi wyobczonego dźwigara siatkowego

Dokonując w równaniach równowagi płyty siatkowej podstawienia (4.15) oraz uwzględniając składowe obiektów napieć (4.9), otrzymano ostateczną postać równań równowagi wyobczonego dźwigara siatkowego:

$$(4.16) \quad A_1^1 \Omega_{(\xi^i)}^1 + A_2^1 \Omega_{(\xi^{i+1})}^1 + A_3^1 \Omega_{(\xi^{i+2})}^1 + A_5^1 \Omega_{(\xi^{i+1})}^2 + A_7^1 \tilde{\Omega}_{(\xi^i)}^1 + \\ + A_8^1 \tilde{\Omega}_{(\xi^{i+1})}^1 + A_{10}^1 \tilde{\Omega}_{(\xi^i)}^2 + A_{14}^1 v_{(\xi^{i+1})} + A_{16}^1 \tilde{v}_{(\xi^i)} + A_{17}^1 \tilde{v}_{(\xi^{i+1})} = 0, \\ A_2^2 \Omega_{(\xi^{i+1})}^1 + A_4^2 \Omega_{(\xi^i)}^2 + A_5^2 \Omega_{(\xi^{i+1})}^2 + A_6^2 \Omega_{(\xi^{i+2})}^2 + A_7^2 \tilde{\Omega}_{(\xi^i)}^1 + A_{10}^2 \tilde{\Omega}_{(\xi^i)}^2 + \\ + A_{11}^2 \tilde{\Omega}_{(\xi^{i+1})}^2 + A_{13}^2 v_{(\xi^i)} + A_{14}^2 v_{(\xi^{i+1})} + A_{15}^2 v_{(\xi^{i+2})} + A_{16}^2 \tilde{v}_{(\xi^i)} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 (4.16) \quad & A_2^3 \Omega_{(\xi^1+1)}^1 + A_3^3 \Omega_{(\xi^1+2)}^1 + A_6^3 \Omega_{(\xi^1+2)}^2 + A_7^3 \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1 + A_8^3 \tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^1 + \\
 & \text{[c.d.]} \quad + A_9^3 \tilde{\Omega}_{(\xi^1+2)}^1 + A_{11}^3 \tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^2 + A_{14}^3 v_{(\xi^1+1)} + A_{15}^3 v_{(\xi^1+2)} + A_{17}^3 \tilde{v}_{(\xi^1+1)} = 0, \\
 & A_3^4 \Omega_{(\xi^1+2)}^1 + A_5^4 \Omega_{(\xi^1+1)}^2 + A_6^4 \Omega_{(\xi^1+2)}^2 + A_8^4 \tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^1 + A_{10}^4 \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2 + \\
 & + A_{11}^4 \tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^2 + A_{12}^4 \tilde{\Omega}_{(\xi^1+2)}^2 + A_{15}^4 v_{(\xi^1+2)} + A_{16}^4 \tilde{v}_{(\xi^1)} + \\
 & + A_{17}^4 \tilde{v}_{(\xi^1+1)} + A_{18}^4 \tilde{v}_{(\xi^1+2)} = 0, \\
 & A_2^5 \Omega_{(\xi^1+1)}^1 + A_4^5 \Omega_{(\xi^1)}^2 + A_5^5 \Omega_{(\xi^1+1)}^2 + A_6^5 \Omega_{(\xi^1+2)}^2 + A_7^5 \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1 + \\
 & + A_8^5 \tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^1 + A_{10}^5 \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2 + A_{13}^5 v_{(\xi^1)} + (A_{14}^5 + PB_{14}^5) v_{(\xi^1+1)} + \\
 & + (A_{15}^5 + PB_{15}^5) v_{(\xi^1+2)} + (A_{16}^5 + PB_{16}^5) \tilde{v}_{(\xi^1)} + (A_{17}^5 + PB_{17}^5) \tilde{v}_{(\xi^1+1)} = 0, \\
 & A_2^6 \Omega_{(\xi^1+1)}^1 + A_3^6 \Omega_{(\xi^1+2)}^1 + A_6^6 \Omega_{(\xi^1+2)}^2 + A_8^6 \tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^1 + A_{10}^6 \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2 + \\
 & + A_{11}^6 \tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^2 + A_{12}^6 \tilde{\Omega}_{(\xi^1+2)}^2 + (A_{14}^6 + PB_{14}^6) v_{(\xi^1+1)} + \\
 & + (A_{15}^6 + PB_{15}^6) v_{(\xi^1+2)} + (A_{16}^6 + PB_{16}^6) \tilde{v}_{(\xi^1)} + (A_{17}^6 + PB_{17}^6) \tilde{v}_{(\xi^1+1)} + \\
 & + (A_{18}^6 + PB_{18}^6) \tilde{v}_{(\xi^1+2)} = 0.
 \end{aligned}$$

Jest to układ jednorodny sześciu równań różnicowych liniowych o stałych współczynnikach. Niewiadomymi funkcjami współrzędnej ξ^1 węzłów płyty jest sześć składowych Ω^1 , Ω^2 , v , $\tilde{\Omega}^1$, $\tilde{\Omega}^2$, \tilde{v} , stanu przemieszczeń tych węzłów. Metoda obliczenia niewiadomego, zewnętrznego obciążenia tarczowego P , zostanie omówiona w p. 5 niniejszej pracy.

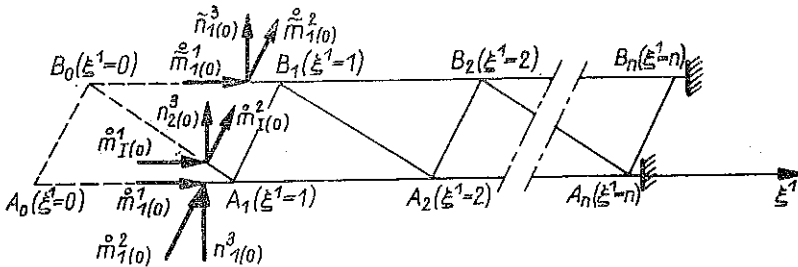
Operatory równań (4.16) wyrażają się następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
 (4.17) \quad & A_1^1 = A_3^1 = a\psi, \quad A_2^1 = \frac{-4a^2 b^2 \eta - a^4 \mu}{A^3} - 2a\psi - \frac{4a^2 \alpha}{b}, \\
 & A_5^1 = A_2^2 = A_{11}^3 = A_8^4 = \frac{a^2 b^2 (\mu - 4\eta)}{A^3}, \quad A_7^1 = A_3^3 = \frac{a^4 \mu - 2a^2 b^2 \eta}{A^3}, \\
 & A_8^1 = A_2^3 = -\frac{2a^2 \alpha}{b}, \quad A_{10}^1 = A_7^2 = A_6^3 = A_3^4 = -\frac{a^2 b^2 (2\eta + \mu)}{A^3}, \\
 & A_{14}^1 = -A_{17}^3 = A_2^4 = -A_8^6 = -\frac{6ab\eta}{A^3} - \frac{6a\alpha}{b^2}, \quad A_{16}^1 = -A_{14}^2 = A_{16}^2 = \\
 & = -A_{15}^3 = -A_{15}^4 = A_{17}^4 = -A_5^5 = -A_7^5 = -A_{10}^5 = A_3^6 = A_6^6 = A_{11}^6 = \frac{6ab\eta}{A^3}, \\
 & A_{17}^1 = -A_{14}^3 = -A_8^5 = A_2^6 = \frac{6a\alpha}{b^2}, \quad A_4^2 = A_6^2 = -\frac{2b^2}{a}, \\
 & A_5^2 = A_{11}^4 = -\left(\frac{8b^2}{a} + \frac{4a^2 b^2 \eta + b^4 \mu}{A^3} + \gamma b \right), \\
 & A_{10}^2 = A_6^4 = \frac{b^4 \mu - 2a^2 b^2 \eta}{A^3}, \quad A_{11}^2 = A_5^4 = b\gamma, \quad A_{13}^2 = -A_{15}^2 = -A_4^5 = \\
 & A_6^5 = \frac{6b}{a^2}, \quad A_7^3 = A_9^3 = \delta a, \quad A_8^3 = -\left(\frac{a^4 \mu + 4a^2 b^2 \eta}{A^3} + 2a\delta + \frac{4a^2 \alpha}{b} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (41.7) \quad [e.d.] \quad A_{10}^4 = A_{12}^4 = -\frac{2b^2 \beta}{a}, \quad A_{16}^4 = -A_{18}^4 = -A_{10}^6 = A_{12}^6 = \frac{6b\beta}{a^2}, \\
 A_{13}^5 = A_{15}^5 = \frac{12}{a^3}, \quad A_{14}^5 = -12 \left(\frac{\eta}{A^3} + \frac{2}{a^3} + \frac{\alpha}{b^3} \right), \quad A_{16}^5 = A_{15}^6 = \frac{12\eta}{A^3}, \\
 A_{17}^5 = A_{14}^6 = \frac{12\alpha}{b^3}, \quad A_{16}^6 = A_{18}^6 = \frac{12\beta}{a^3}, \quad A_{17}^6 = -12 \left(\frac{\eta}{A^3} + \frac{2\beta}{a^3} + \frac{\alpha}{b^3} \right), \\
 \beta_{14}^5 = \frac{2\xi^1 - 1}{a_1 b}, \quad B_{15}^5 = -B_{16}^6 = -\frac{\xi^1}{a_1 b}, \quad B_{16}^5 = -B_{17}^5 = -B_{14}^6 = \\
 = B_{15}^6 = -\frac{1}{a_1 b}, \quad B_{17}^6 = -\frac{1+2\xi^1}{a_1 b}, \quad B_{18}^6 = \frac{1+\xi^1}{a_1 b}.
 \end{aligned}$$

4.5. Warunki brzegowe wyboczonego dźwigara siatkowego

Przez uzależnienie wielkości geometrycznych, składowych stanu odkształcenia i przemieszczenia oraz stanu napięcia od jednej zmiennej ξ^1 , wystarczające będzie spełnienie warunków brzegowych z lewej i prawej strony dźwigara (tj. na krawędziach $A_1 B_1$ i $A_n B_n$). Warunki brzegowe na pozostałych krawędziach dźwigara $A_1 A_n$ i $B_1 B_n$ zostały spełnione przez równania równowagi płyty siatkowej, które napisano dla dwóch charakterystycznych węzłów A_3 i B_3 .



Rys. 11

Brzeg sztywno zamocowany (na rys. 11) charakteryzuje się tym, że przesunięcia i obroty węzłów A_n , B_n są równe zero

$$\begin{aligned}
 (4.18) \quad [v]_{\xi^1=n} = 0, \quad [\Omega^s]_{\xi^1=n} = 0, \\
 [\tilde{v}]_{\xi^1=n} = 0, \quad [\tilde{\Omega}^s]_{\xi^1=n} = 0.
 \end{aligned}$$

Dla brzegu swobodnego $A_1 B_1$, nie obciążonego — składowe stanu przemieszczenia nie są znane, ale wiadomo, że obciążenie węzłów $n_1^3(0)$, $n_1^1(0)$, $\tilde{n}_1^3(0)$, $\tilde{m}_1^1(0)$, $\tilde{m}_1^2(0)$, $\tilde{m}_1^3(0)$, $\tilde{m}_1^1(0)$, $\tilde{m}_1^2(0)$, $\tilde{m}_1^3(0)$ jest równe zero:

$$\begin{aligned}
 & [n_1^3(0) + \dot{n}_1^3(0)]_{\xi^1=0} = 0, \quad [\ddot{n}_1^3]_{\xi^1=0} = 0, \\
 & [\dot{m}_1^1(0) + \ddot{m}_1^1(0)]_{\xi^1=0} = \left[\kappa_1 + \kappa_1 \frac{a}{A} + (K_1 - G_1) \frac{b}{A} \right]_{\xi^1=0} = 0, \\
 (4.19) \quad & [\dot{m}_1^2(0) + \ddot{m}_1^2(0)]_{\xi^1=0} = \left[-(K_1 - G_1) + \kappa_1 \frac{b}{A} - (K_1 - G_1) \frac{a}{A} \right]_{\xi^1=0} = 0, \\
 & [\dot{m}_1^1(0)]_{\xi^1=0} = [\ddot{\kappa}_1]_{\xi^1=0} = 0, \\
 & [\dot{m}_1^2(0)]_{\xi^1=0} = [\ddot{K}_1 - \ddot{G}_1]_{\xi^1=0} = 0.
 \end{aligned}$$

Uwzględniając zależności (3.3) i (4.9) i rozwiązując układ sześciu równań (4.19), określono składowe stanu przemieszczenia w węzłach fikcyjnych A_0 i B_0 :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Omega}_{(\xi^1-1)}^1 &= \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1, \quad \tilde{\Omega}_{(\xi^1-1)}^2 = \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2, \quad \tilde{v}_{(\xi^1-1)} = \tilde{v}_{(\xi^1)} + ab \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2, \\
 \Omega_{(\xi^1-1)}^1 &= \left[\frac{6b\eta}{\psi A^3} \right] v_{(\xi^1)} + \left[1 + \frac{4b^2 \eta a + a^3 \mu}{\psi A^3} \right] \Omega_{(\xi^1)}^1 + \left[\frac{4ab^2 \eta - ab^2 \mu}{\psi A^3} \right] \Omega_{(\xi^1)}^2 + \\
 &+ \left[-\frac{6b\eta}{\psi A^3} \right] \tilde{v}_{(\xi^1)} + \left[-\frac{2b^2 a\eta - a^3 \mu}{\psi A^3} \right] \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1 + \left[-\frac{ab^2(4\eta - \mu)}{\psi A^3} \right] \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2, \\
 \Omega_{(\xi^1-1)}^2 &= \left[\frac{a^3(\eta - \mu)}{A^3} \right] \Omega_{(\xi^1)}^1 + \left[1 + \frac{a^3 \eta + ab^2 \mu}{A^3} \right] \Omega_{(\xi^1)}^2 + \\
 (4.20) \quad &+ \left[\frac{a^3(\mu - \eta)}{A^3} \right] \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1 + \left[-\frac{a^3 \eta + ab^2 \mu}{A^3} \right] \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2, \\
 v_{(\xi^1-1)} &= \left[1 + \frac{a^3 \eta}{A^3} \right] v_{(\xi^1)} + \left[\frac{ba^4(2\eta - \mu)}{2A^3} \right] \Omega_{(\xi^1)}^1 + \\
 &+ \left[ab + \frac{a^2 b^2(b^2 \mu + 2a^2 \eta)}{2A^3} \right] \Omega_{(\xi^1)}^2 + \left[-\frac{a^3 \eta}{A^3} \right] \tilde{v}_{(\xi^1)} + \\
 &+ \left[\frac{ba^4 \mu}{2A^3} \right] \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1 + \left[-\frac{a^2 b(2a^2 \eta + b^2 \mu)}{2A^3} \right] \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2.
 \end{aligned}$$

5. PRZYKŁADY

Dla dźwigara o małej liczbie węzłów wzdłuż linii parametrycznej ξ^1 najwygodniejszą metodą rozwiązania wyprowadzonych równań (4.16) jest metoda numeryczna. Równania te są równaniami równowagi węzłów o współrzędnej $(\xi^1 + 1)$, gdy spełniamy je dla współrzędnej ξ^1 . Oznacza to, że w płycie, której węzły brzegowe oznaczone są współrzędną $\xi^1 = 1$, należy spełnić układy równań (4.16) dla współrzędnej $\xi^1 = 0$. Występujące składowe stanu przemieszczenia o współrzędnej $\xi^1 = 0$ zastępuje się obliczonymi z warunków brzegowych wyrażeniami (4.20).

Warunkiem istnienia niezerowych przemieszczeń jest, aby wyznacznik charakterystyczny układu równań (4.16) (napisanych dla wszystkich węzłów dźwigara siatkowego) był równy zero. Warunek ten można napisać w postaci

$$(5.1) \quad |\mathbf{A} - \mathbf{PB}| = 0,$$

gdzie $(A - PB)$ jest macierzą kwadratową współczynników wspomnianego układu równań (4.16), przy czym macierz B nie jest macierzą jednostkową. Wyznacznik tej macierzy jest więc wielomianem n -tego stopnia ze względu na zewnętrzne obciążenie tarczowe P . Stopień ten jest równy liczbie stopni swobody wszystkich węzłów dźwigara. Wspomniany wyżej warunek sprowadza się do równania

$$(5.2) \quad W(P) = 0.$$

Dla otrzymania tego wielomianu zastosowano metodę R. KOSSOWSKIEGO omówioną w pracy [8]. Z rozwiązania równania (5.2) otrzymuje się kilka wartości sił krytycznych P . Nas interesuje przede wszystkim najmniejsza wartość siły krytycznej P oraz odpowiadająca jej postać wybożenia dźwigara. Dla przykładów zamieszczonych w niniejszej pracy, opisana metoda została opracowana na maszynie cyfrową GIER w języku ALGOL-4.

Obecnie przedstawione zostaną rozwiązania dźwigarów siatkowych (rys. 1), obciążonych siłą tarczową P . Założono następujące wymiary i sztywności prętów: $a = 1000$ [mm], $b = 500$ [mm], $a_1 = 10,79375$ [kGm²] (sztywność zginania pasa dolnego A_1 A_n , obliczona dla przekroju pełnego kołowego o średnicy $d = 10$ [mm]) $\eta = \alpha = \beta = 1$, $\mu = \gamma = \delta = \psi = 0,8$.

Przykład 1. Dla dźwigara o wymiarach $3a \times 0,5a$, tj. $A_1 B_1 B_4 A_4$, przedstawionego na rys. 1, pierwsza (najmniejsza) wartość siły krytycznej wynosi

$$(5.3) \quad P_{kr}^I = 15,6034 \text{ [kG]}.$$

Druga (większa) wartość siły krytycznej jest następująca:

$$(5.4) \quad P_{kr}^{II} = 52,6717 \text{ [kG]}.$$

Każdej z obliczonych sił krytycznych odpowiada inna, kolejna postać wybożenia dźwigara. Postacie te można określić przyjmując za znaną wartość jednego z przemieszczeń płytowych węzłów rozpatrywanego dźwigara. Rozwiązując następnie układ równań (4.16) dla kolejnych wartości sił krytycznych, otrzymano stosunki pozostałych przemieszczeń [są to wektory własne wspomnianej macierzy z równania (5.1)], co pozwoliło na zilustrowanie postaci dźwigara po utracie stateczności. Na rys. 12 przedstawiono postać wybożenia dźwigara przy działaniu pierwszej (najmniejszej) siły krytycznej.

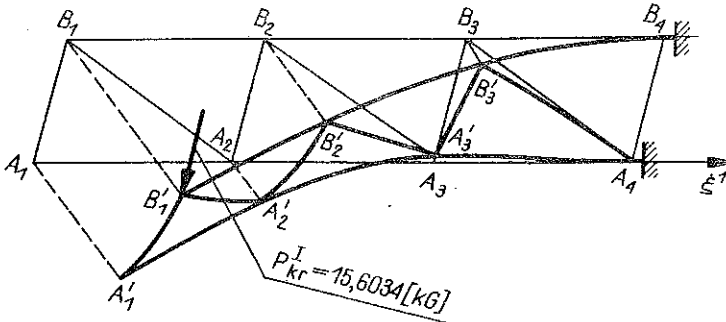
Przykład 2. Wartości sił krytycznych dla dźwigara $A_1 B_1 B_5 A_5$ ($4a \times 0,5a$) są następujące:

$$(5.5) \quad P_{kr}^I = 8,4228 \text{ [kG]}, \quad P_{kr}^{II} = 24,0989 \text{ [kG]}, \quad P_{kr}^{III} = 54,3892 \text{ [kG]}.$$

Przykład 3. Dla dźwigara o wymiarach $A_1 B_1 B_6 A_6$ ($5a \times 0,5a$) otrzymano cztery wartości sił krytycznych:

$$(5.6) \quad \begin{aligned} P_{kr}^I &= 5,1682 \text{ [kG]}, & P_{kr}^{II} &= 14,3501 \text{ [kG]}, \\ P_{kr}^{III} &= 26,4180 \text{ [kG]}, & P_{kr}^{IV} &= 54,6945 \text{ [kG]}. \end{aligned}$$

Na podstawie wartości P_{kr}^I (najmniejszych) sił krytycznych dla przedstawionych przykładów można wysnuć wniosek, że w miarę wzrostu długości dźwigara siła krytyczna maleje.



Rys. 12

Otrzymane równania równowagi wyboczonego dźwigara umożliwiają rozwiązanie szeregu dźwigarów o dowolnych parametrach, takich jak wymiary gabarytowe, sztywność zginania i skręcania poszczególnych prętów, sposób zamocowania, rodzaj zewnętrznego obciążenia tarczowego P . Jak zaznaczono w p. 4, zastosowano w niniejszej pracy przybliżoną metodę obliczania wyboczenia dźwigarów siatkowych, zatem otrzymano przybliżone wartości sił krytycznych.

Nadmienić należy, że J. LEWIŃSKI w rozprawie doktorskiej [9] rozszerzył zastosowaną powyżej teorię. Wprowadził do opisanego tam modelu dodatkowe obciążenie w szeregu punktach na długości łączników dźwigara. Praca [9] omawia kryterium stosowalności metody opisanej w pracy [7].

Ponadto wprowadzenie większej ilości przegubów do modelu sztywno-przegubowo-sprężystego dla przypadku ściskanego pręta opracował F. MARKUSZEWSKI w pracy [10].

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. H. FRĄCKIEWICZ, *Geometry of a discrete set of points*, Arch. Mech. Stos., **18**, 3, 1966.
2. H. FRĄCKIEWICZ, *Deformation of a discrete set of points*, Arch. Mech. Stos., **18**, 6, 1966.
3. H. FRĄCKIEWICZ, *The geometry of a discrete set of points on a surface*, Arch. Mech. Stos., **19**, 2, 1967.
4. H. FRĄCKIEWICZ, *A plane problem of the theory of elasticity for media with a discrete lattice structures*, Arch. Mech. Stos., **19**, 5, 1967.
5. H. FRĄCKIEWICZ, *The bending problem of plane grates of discrete structure*, Arch. Mech. Stos., **22**, 2, 1970.
6. H. FRĄCKIEWICZ, *Mechanika ośrodków siatkowych*, PWN, Warszawa 1970.
7. H. FRĄCKIEWICZ, *Buckling of lattice plates*, Arch. Mech., **23**, 4, 1971.
8. R. KOSSOWSKI, *O pewnej metodzie rozwiązywania układów równań liniowych ze współczynnikami w postaci wielomianowej i jej zastosowaniach w technice*. Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska 1972.
9. J. LEWIŃSKI, *Stateczność rusztów siatkowych*. Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, 1972.
10. F. MARKUSZEWSKI, *O pewnej metodzie obliczania sił krytycznych w układach prętowych* [w druku].

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА СЕТЧАТЫХ НЕСУЩИХ СИСТЕМ
С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПОЛОСАМИ

В работе рассматривается вопрос об устойчивости плоской формы изгиба сетчатых несущих систем с параллельными полосами. На основе результатов полученных Г. Фронцкевичем для расчета устойчивости плоских сеток применена теория дискретных сред. Для состояния потери устойчивости несущей системы выведены уравнения равновесия в перемещениях, на основе которых рассчитаны критические величины внешней нагрузки и форма деформированной системы.

SUMMARY

STABILITY OF THE PLANE FORM OF BENDING OF LATTICE GIRDERS WITH
PARALLEL FLANGES

The aim of the paper is to solve the problem of stability of the plane form of bending of lattice girders with parallel flanges. On basis of the paper by H. FRONCIEWICZ "Buckling of lattice plates", the method applied is that of calculation of buckling of plane lattices by means of the theory of discrete media. The equations of equilibrium of the buckled girder are expressed in terms of displacements, and they yield the critical values of external loads as well as the corresponding form of buckling.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 kwietnia 1972 r.
