ROZPRAWY INŻYNIERSKIE, 21, 1, 3–24, 1973, Polska Akademia Nauk, Instytut Podstawowych Problemów Techniki

LINIOWA TEORIA MIKROPOLARNEJ SPRĘŻYSTOŚCI (*)

WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Klasyczna teoria sprężystości dobrze opisuje zachowanie się materiałów konstrukcyjnych (rozmaitych gatunków stali, aluminium, betonu) przy naprężeniach nie przekraczających granicy sprężystości oraz wszędzie tam, gdzie nie mamy do czynienia ze spiętrzeniami naprężeń.

Rozbieżność między wynikami teorii sprężystości a doświadczeniami występuje tam, gdzie do głosu dochodzą właściwości mikrostruktury ciała, a więc w pobliżu nacięć i karbów, gdzie mamy do czynienia ze znacznymi gradientami naprężeń. Rozbieżności te występują również w ciałach uziarnionych oraz w ciałach wielocząsteczkowych takich jak polimery.

Wpływ mikrostruktury ciała szczególnie dobitnie ujawnia się w przypadku drgań sprężystych o dużej częstotliwości i małej długości fali.

Te niedostatki klasycznej teorii sprężystości starał się usunąć W. Voigt [1] przyjmując, że transmisja oddziaływań dwu części ciała na siebie poprzez element powierzchniowy $\mathbf{p}dA$ odbywa się nie tylko przez wektor siły $\mathbf{p}dA$, ale również przez wektor momentu $\mathbf{m}dA$. W ten sposób zdefiniowane zostały obok naprężeń (siłowych) σ_{ij} również naprężenia momentowe μ_{ij}.

Jednak w pełni konsekwentną teorię niesymetrycznej sprężystości opracowali bracia Franciszek i Eugeniusz Cosseratowie [2] publikując ją w r. 1909 w dziele «Théorie des corps deformables».

Założyli oni, że ciało składa się z powiązanych między sobą cząsteczek w postaci małych brył doskonale sztywnych. Każda cząsteczka doznaje w trakcie deformacji przemieszczenia $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ oraz obrotu $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$, będących funkcją położenia $\mathbf{x}$ oraz czasu t.

W ten sposób opisany został ośrodek sprężysty, w którym punkty uzyskały orientację (ośrodek polarny) i w którym można mówić o obrocie «punktu». Wektory $\mathbf{u}$ i $\boldsymbol{\varphi}$ są niezależne od siebie i w zupełności opisują deformację ciała. Wprowadzenie wektorów $\mathbf{u}$ i $\boldsymbol{\varphi}$ oraz założenie, że transmisja sił przez element powierzchniowy dA odbywa się za pomocą wektora siły $\mathbf{p}$ oraz wektora momentu $\mathbf{m}$ prowadzi w konsekwencji do niesymetrycznych tensorów naprężenia σ_{ij} i μ_{ij}.

(*) Niniejsza praca przeglądowa przedstawiona była na sympozjum «Micropolar Elasticity» w Udine (19 – 24.VI.1972) w Centre Internationale des Sciences Mécaniques.

Teoria braci Cosseratów pozostała jednak niezauważona i za życia autorów niedoceniona. Przyczyną tego było bardzo ogólne jej przedstawienie (jako teorii nieliniowej, uwzględniającej duże odkształcenia) oraz wyjście jej poza ramy teorii sprężystości. Teoria ich stanowiła próbę stworzenia jednolitej teorii pola, zawierającej mechanikę, optykę i elektrodynamikę, powiązaną ogólną zasadą najmniejszego działania (action euclidienne).

Prowadzone w ostatnim piętnastoleciu badania w dziedzinie ogólnych ośrodków sprężystych i niesprężystych zwróciły uwagę badaczy na dzieło braci Cosseratów. W poszukiwaniu nowych modeli, lepiej opisujących zachowanie się rzeczywistych ciał sprężystych, natrafiono na modele zbliżone lub identyczne z modelem Cosseratów. Wymienić należy tu przede wszystkim prace C. TRUESDELLA i R. A. TOUPINA [3], G. GRIOLIEGO [4], R. D. MINDLINA i H. F. TIERSTENA [5]. Początkowo uwaga badaczy zwrócona była na uproszczoną teorię sprężystości, na teorię tzw. pseudo-kontinuum Cosseratów. Pod tą nazwą rozumiemy ośrodek, w którym występują niesymetryczne naprężenia siłowe i momentowe, ale deformacja opisana jest wyłącznie przez wektor przemieszczenia $\mathbf{u}$. Przyjmuje się tu, że $\boldsymbol{\varphi}=1/2 \operatorname{rot} \mathbf{u}$, tak jak w klasycznej teorii sprężystości. Zauważyć należy, że model ten rozważony był również przez Cosseratów, którzy nazwali go ośrodkiem z utajonym trójścianem.

Wielu autorów niemieckich, jak W. GÜNTHER [6], H. SCHÄFER [7], H. NEUBER [8], nawiązało wprost do ogólnej teorii Cosseratów, uzupełniając ją równaniami konstytutywnymi. Ogólne związki i równania teorii mikropolarnej zostały również wyprowadzone przez E. W. KUWSZYŃSKIEGO i A. L. AERO [9] oraz N. A. PALMOWA [10]. Wymienić należy tu również uogólniające studium A. C. ERINGENA i E. S. SUHUBIEGO [11].

Obecnie teoria ośrodka Cosseratów jest w pełnym rozwoju. Rośnie literatura tej dziedziny, a zagadnienie niesymetrycznej sprężystości stało się przedmiotem dwu sympozjów: Sympozjum IUTAM odbytego w Freudenstadt w r. 1968 oraz sympozjum zorganizowanego przez CISM. Ukazały się wreszcie pierwsze monografie mikropolarnej teorii sprężystości: R. STOJANOVIĆA [12] oraz W. NOWACKIEGO [13], obie z r. 1970.

Rozważania zawarte w niniejszym opracowaniu dotyczyć będą liniowej teorii mikropolarnej sprężystości. Omawiać będziemy najpierw zagadnienia dynamiczne, następnie zagadnienia statyczne.

2. ZAGADNIENIA DYNAMICZNE MIKROPOLARNEJ SPRĘŻYSTOŚCI

Rozpatrzmy obszar regularny $V \cup A$, ograniczony powierzchnią gładką A zawierający ośrodek mikropolarny, ośrodek jednorodny, izotropowy i centrosymetryczny o gęstości ρ i bezwładności rotacyjnej I.

Pod wpływem obciążeń zewnętrznych ciało ulega odkształceniu. Niech na części A_σ powierzchni ograniczającej ciało działają siły $\mathbf{p}$ i momenty $\mathbf{m}$, a na części A_u przemieszczenia $\mathbf{u}$ i obroty $\boldsymbol{\varphi}$. Wewnątrz ciała działają siły masowe $\mathbf{X}$ oraz momenty masowe $\mathbf{Y}$. Wymienione obciążenia wywołują odkształcenie ciała, opisane wektorem przemieszczenia $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ i wektorem obrotu $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$. Wewnątrz ciała powstaną naprężenia $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ oraz naprężenia momentowe $\mu_{ij}(\mathbf{x}, t)$. Naprężenia σ_{ij}, μ_{ij} związane są z niesymetrycznym tensorem odkształcenia γ_{ij} oraz tensorem skrętno-giętnym κ_{ij}.

Zagadnienie dynamiczne mikropolarnej sprężystości polega na wyznaczeniu naprężeń σ_{ij}, μ_{ij}, odkształceń γ_{ij}, κ_{ij}, przemieszczeń $\mathbf{u}$ i obrotów $\boldsymbol{\varphi}$. Funkcje te powinny spełniać równania ruchu, równania konstytutywne, warunki brzegowe oraz warunki początkowe.

Równania ruchu mają postać

$$\sigma_{ji,j}+X_i=\rho\ddot{u}_i, \qquad \epsilon_{ijk}\sigma_{jk}+\mu_{ji,j}+Y_i=I\ddot{\varphi}_i. \tag{2.1}$$

W równaniach tych, napisanych w kartezjańskim układzie współrzędnych prostokątnych, ϵ_{ijk} jest alternatorem Ricciego, ρ gęstością, a I bezwładnością rotacyjną.

Równania konstytutywne otrzymuje się z następujących rozważań. Z zasady zachowania energii, przy założeniu procesu adiabatycznego, mamy

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{U}+\mathcal{K})=\int_V (X_i v_i+Y_i w_i)\,dV+\int_A (p_i v_i+m_i w_i)\,dA, \qquad v_i=\dot{u}_i, \qquad w_i=\dot{\varphi}_i, \tag{2.2}$$

gdzie $\mathcal{U}$ jest energią wewnętrzną, $\mathcal{K}$ energią kinetyczną

$$\mathcal{K}=\frac{1}{2}\int_V (\rho v_i v_i+I w_i w_i)\,dV. \tag{2.3}$$

Prawa strona równania (2.2) przedstawia moc sił zewnętrznych.

Uwzględniając równania ruchu (2.1) otrzymamy

$$\dot{U}=\sigma_{ji}\dot{\gamma}_{ji}+\mu_{ji}\dot{\kappa}_{ji}, \qquad \mathcal{U}=\int_V U\,dV. \tag{2.4}$$

Stąd wynika definicja tensorów odkształcenia:

$$\gamma_{ji}=u_{i,j}-\epsilon_{kji}\varphi_k, \qquad \kappa_{ji}=\varphi_{i,j}. \tag{2.5}$$

Energia wewnętrzna U jest funkcją zmiennych niezależnych γ_{ij}, κ_{ij} i jest funkcją stanu. Mamy zatem

$$\dot{U}=\frac{\partial U}{\partial \gamma_{ji}}\dot{\gamma}_{ji}+\frac{\partial U}{\partial \kappa_{ji}}\dot{\kappa}_{ji}. \tag{2.6}$$

Założymy, że funkcje σ_{ij}, μ_{ij} nie zależą w sposób jawny od pochodnych czasowych funkcji γ_{ij}, κ_{ij}. Z porównania (2.4) i (2.6) mamy

$$\sigma_{ji}=\frac{\partial U}{\partial \gamma_{ji}}, \qquad \mu_{ji}=\frac{\partial U}{\partial \kappa_{ji}}. \tag{2.7}$$

Energię wewnętrzną można przedstawić w postaci

$$U=\frac{\mu+\alpha}{2}\gamma_{ji}\gamma_{ji}+\frac{\mu-\alpha}{2}\gamma_{ji}\gamma_{ij}+\frac{\lambda}{2}\gamma_{kk}\gamma_{nn}+ \\ +\frac{\gamma+\varepsilon}{2}\kappa_{ji}\kappa_{ji}+\frac{\gamma-\varepsilon}{2}\kappa_{ji}\kappa_{ij}+\frac{\beta}{2}\kappa_{kk}\kappa_{nn}. \tag{2.8}$$

Przedstawioną tu postać energii wewnętrznej uzasadnia się w sposób następujący. Ponieważ energia wewnętrzna jest skalarem, to każdy wyraz po prawej stronie powinien być skalarem. Otóż ze składowych tensora γ_{ji} można skonstruować trzy niezależne kwadratowe niezmienniki: $\gamma_{ji}\gamma_{ji}$, $\gamma_{ji}\gamma_{ij}$, $\gamma_{kk}\gamma_{nn}$. To samo dotyczy tensora κ_{ij}. Wyrazy $\gamma_{ji}\kappa_{ji}$, $\gamma_{ji}\kappa_{ij}$, $\gamma_{kk}\kappa_{nn}$ nie pojawią się w wyrażeniu (2.8), ponieważ byłoby to sprzeczne z postulatem centrosymetryczności.

Mamy zatem sześć stałych materiałowych μ, λ, α, β, γ, ε. Stałe te spełniać powinny następujące nierówności:

$$3\lambda+2\mu>0\,,\quad \mu>0\,,\quad 3\beta+2\gamma>0\,,\quad \gamma>0\,,$$
$$\mu+\alpha>0\,,\quad \gamma+\varepsilon>0\,,\quad \alpha>0\,,\quad \varepsilon>0\,.$$

Ograniczenia te wynikają z faktu, że funkcja U jest formą kwadratową zdefiniowaną dodatnio.

Zważywszy na (2.7) otrzymamy następujące równania konstytutywne:

$$\begin{aligned} \sigma_{ji}&=(\mu+\alpha)\gamma_{ji}+(\mu-\alpha)\gamma_{ij}+\lambda\gamma_{kk}\delta_{ij}\,,\\ \mu_{ji}&=(\gamma+\varepsilon)\kappa_{ji}+(\gamma-\varepsilon)\kappa_{ij}+\beta\kappa_{kk}\delta_{ij}\,. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Jeśli wyeliminować z równań ruchu naprężenia za pomocą związków konstytutywnych, a dalej wykorzystać definicje tensorów γ_{ji}, κ_{ji}, to otrzymamy układ sześciu równań w przemieszczeniach $\mathbf{u}$ i obrotach $\boldsymbol{\varphi}$.

W zwartym zapisie wektorowym równania te mają postać

$$\begin{aligned} &\Box_2\,\mathbf{u}+(\lambda+\mu-\alpha)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}+2\alpha\operatorname{rot}\boldsymbol{\varphi}+\mathbf{X}=0\,,\\ &\Box_4\,\boldsymbol{\varphi}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}+2\alpha\operatorname{rot}\mathbf{u}+\mathbf{Y}=0\,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Wprowadzono tu następujące operatory różniczkowe:

$$\Box_2=(\mu+\alpha)\nabla^2-\rho\partial_t^2\,,\qquad \Box_4=(\gamma+\varepsilon)\nabla^2-4\alpha-I\partial_t^2\,.$$

Pierwszy z tych operatorów jest operatorem d'Alemberta, drugi operatorem Kleina-Gordona.

Otrzymaliśmy złożony układ równań różniczkowych hiperbolicznych. Do równań tych dodać należy warunki brzegowe i warunki początkowe.

Zgodnie z założeniem warunki brzegowe mają postać

$$\begin{aligned} &\sigma_{ji}(\mathbf{x},t)n_j=p_i(\mathbf{x},t), \quad \mu_{ji}(\mathbf{x},t)n_j=m_i(\mathbf{x},t)\,, \quad \mathbf{x}\in A_\sigma\,, \quad t>0\,,\\ &u_i(\mathbf{x},t)=f_i(\mathbf{x},t)\,, \quad \varphi_i(\mathbf{x},t)=g_i(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x}\in A_u\,, \quad t>0, \end{aligned} \tag{2.11}$$

gdzie $\mathbf{n}$ jest wektorem jednostkowym normalnym do brzegu, a p_i, m_i, g_i, f_i są danymi funkcjami.

Warunki początkowe mają postać

$$\begin{aligned} &u_i(\mathbf{x},0)=k_i(\mathbf{x})\,, \quad \varphi_i(\mathbf{x},0)=l_i(\mathbf{x})\,,\\ &\dot{u}_i(\mathbf{x},0)=h_i(\mathbf{x})\,, \quad \dot{\varphi}_i(\mathbf{x},0)=j_i(\mathbf{x})\,, \quad \mathbf{x}\in V, \quad t=0\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Układ równań w przemieszczeniach i obrotach jest nader złożony. Dążyć będziemy do rozwikłania tego układu, do zastąpienia go układem prostszych równań falowych.

Mamy tu dwie możliwości rozwikłania tych równań. Pierwsza jest analogiczna do drogi, jaką posłużył się Lamé w elastokinetyce klasycznej. Dokonajmy dekompozycji wektorów $\boldsymbol{\varphi}$ i $\mathbf{u}$ na część potencjalną i na część solenoidalną:

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\Psi} = 0, \qquad (2.13)$$
$$\boldsymbol{\varphi} = \operatorname{grad} \Gamma + \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Postępujemy w ten sam sposób z siłami i momentami masowymi:

$$\mathbf{X} = \rho(\operatorname{grad} \vartheta + \operatorname{rot} \boldsymbol{\chi}), \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\chi} = 0,$$
$$\mathbf{Y} = I(\operatorname{grad} \sigma + \operatorname{rot} \boldsymbol{\eta}), \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\eta} = 0.$$

Wprowadzając te funkcje do równań (2.10) otrzymamy następujące proste równania falowe:

$$\Box_1 \Phi + \rho \vartheta = 0, \quad \Box_3 \Gamma + I\sigma = 0,$$
$$\Box_2 \boldsymbol{\Psi} + 2\alpha \operatorname{rot} \mathbf{H} + \rho \boldsymbol{\chi} = 0, \qquad (2.14)$$
$$\Box_4 \mathbf{H} + 2\alpha \operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi} + I\boldsymbol{\eta} = 0.$$

Wprowadziliśmy tu dalsze operatory

$$\Box_1 = (\lambda + 2\mu)\nabla^2 - \rho \partial_t^2, \quad \Box_3 = (\beta + 2\gamma)\nabla^2 - 4\alpha - I\partial_t^2.$$

Pierwsze z powyższych równań jest równaniem fali podłużnej, identycznej w swej postaci z równaniem fali podłużnej w klasycznej elastokinetyce. Drugie równanie jest nowym typem równania, równaniem podłużnej fali mikrorotacyjnej. Równania trzecie i czwarte opisują propagację fal poprzecznych, przemieszczeniowej i mikrorotacyjnej.

Fala podłużna jest dobrze znana z elastokinetyki klasycznej. Fala przemieszczeniowa mikrorotacyjna badana była przez N. A. Palmova [10] i W. Nowackiego [14]. Układ dwu równań fal poprzecznych grupy (2.14) przyjmie po eliminacji funkcji $\boldsymbol{\Psi}$ i $\mathbf{H}$ następującą postać:

$$(\Box_2 \Box_4 + 4\alpha^2 \nabla^2)\boldsymbol{\Psi} = 2\alpha I \operatorname{rot} \boldsymbol{\eta} - \rho \Box_4 \boldsymbol{\chi}, \qquad (2.15)$$
$$(\Box_2 \Box_4 + 4\alpha^2 \nabla^2)\mathbf{H} = 2\alpha\rho \operatorname{rot} \boldsymbol{\chi} - I\Box_2 \boldsymbol{\eta}.$$

Ten typ fal był przedmiotem badań J. Ignaczaka [15]. Łatwo zauważyć, że fala przemieszczeniowa Γ i fale poprzeczne $\boldsymbol{\Psi}$, $\mathbf{H}$ są falami ulegającymi dyspersji. Układ równań falowych (2.14) jest bardzo użyteczny przy wyznaczaniu rozwiązań osobliwych (funkcji Greena) w przestrzeni nieskończonej. Takie rozwiązania zostały podane w postaci zamkniętej dla przypadku sił i momentów skupionych, zmieniających się w sposób harmoniczny w czasie, przez W. Nowackiego i W. K. Nowackiego [16]. Wykazano wreszcie, że przyjęta droga rozwiązania przy użyciu potencjałów Φ, Γ, $\boldsymbol{\Psi}$, $\mathbf{H}$ prowadzi do rozwiązań kompletnych (W. Nowacki [17]).

Druga droga prowadząca do rozwikłania równań (2.10) jest drogą, jaką postępował B. G. GALERKIN [18] w klasycznej elastostatyce oraz M. IACOVACHE [19] w odniesieniu do klasycznej elastokinetyki. Funkcje tego typu, poprawne dla zagadnień dynamicznych mikropolarnej sprężystości, podał N. SANDRU [20], a później na innej drodze J. STEFANIAK [21].

Reprezentacja N. Sandru ma postać

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \Box_1 \Box_4 \mathbf{F} - \operatorname{gard} \operatorname{div} \Xi \mathbf{F} - 2\alpha \operatorname{rot} \Box_3 \mathbf{G}, \\ \boldsymbol{\varphi} &= \Box_2 \Box_3 \mathbf{G} - \operatorname{gard} \operatorname{div} \Theta \mathbf{G} - 2\alpha \operatorname{rot} \Box_1 \mathbf{F}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

gdzie

$$\Xi = (\lambda + \mu - \alpha)\Box_4 - 4\alpha^2, \qquad \Theta = (\beta + \gamma - \varepsilon)\Box_2 - 4\alpha^2.$$

Wyrażono tu przemieszczenia $\mathbf{u}$ i obroty $\boldsymbol{\varphi}$ przez dwie funkcje wektorowe $\mathbf{F}$ i $\mathbf{G}$.

Wstawiając (2.16) do równań (2.10) otrzymamy dwa równania bifalowe dla funkcji $\mathbf{F}$ i $\mathbf{G}$:

$$\begin{aligned} &\Box_1 (\Box_2 \Box_4 + 4\alpha^2 \nabla^2)\mathbf{F} + \mathbf{X} = 0, \\ &\Box_3 (\Box_2 \Box_4 + 4\alpha^2 \nabla^2)\mathbf{G} + \mathbf{Y} = 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Równania te są szczególnie dogodne dla wyznaczania przemieszczeń i obrotów wywołanych w przestrzeni nieskończonej działaniem sił i momentów skupionych. Do tej pory uzyskano rozwiązanie osobliwe jedynie dla sił i momentów skupionych, zmieniających się w sposób harmoniczny w czasie. W tym bowiem przypadku układ równań (2.17) przechodzi na układ prostych równań eliptycznych:

$$\begin{aligned} &(\nabla^2 + \mu_1^2)(\nabla^2 + k_1^2)(\nabla^2 + k_2^2)\mathbf{F}^* + \mathbf{X}^* = 0, \\ &(\nabla^2 + \mu_3^2)(\nabla^2 + k_1^2)(\nabla^2 + k_2^2)\mathbf{G}^* + \mathbf{Y}^* = 0, \end{aligned} \tag{2.18}$$

gdzie

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{X}^*(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \quad \text{itd.}$$

Istnieje jeszcze druga droga uzyskania podstawowych równań mikropolarnej sprężystości. Polega ona na wykorzystaniu równań zwartości

$$\gamma_{li,h} - \gamma_{hi,l} - \epsilon_{khi}\varkappa_{lk} + \epsilon_{kli}\varkappa_{hk} = 0, \qquad \varkappa_{li,h} - \varkappa_{hi,l} = 0 \tag{2.19}$$

i wyrażeniu w nich funkcji γ_{ji}, $\varkappa_{ji}$ przez naprężenia σ_{ji}, μ_{ji}. Układ równań naprężeniowych, stanowiących rozszerzenie równań Beltramiego-Michella klasycznej teorii sprężystości, został podany dla zagadnień dynamicznych przez Z. OLESIAKA [22], dla zagadnień statycznych przez N. SANDRU [20]. Równania te mogą mieć znaczenie praktyczne w zagadnieniach dwuwymiarowych.

Rozpatrzmy przypadki szczegółowe odnoszące się do propagacji fal. Interesującemu zagadnieniu fal jednowymiarowych, zależnych od x_1 i t, zależnych jedynie od $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ i t oraz zależnych od $R = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$ i t, poświęcono sporo prac. Wymienić należy rozważania A. C. ERINGENA [23], N. A. PALMOVA [10] oraz A. C. SMITHA [24].

Rozpatrzmy zagadnienie dwuwymiarowe. Załóżmy, że mamy do czynienia z zagadnieniem, w którym odkształcenia są niezależne od zmiennej x_3. W tym przypadku układ równań (2.10) rozdziela się na dwa niezależne od siebie układy równań. W pierwszym układzie równań występują następujące wektory:

$$\mathbf{u}=(u_1, u_2, 0), \quad \boldsymbol{\varphi}=(0, 0, \varphi_3), \quad \mathbf{X}=(X_1, X_2, 0), \quad \mathbf{Y}=(0, 0, Y_3). \tag{2.20}$$

Układ równań ma tu postać

$$\begin{aligned}
&(\mu+\alpha)\nabla_1^2 u_1-\rho\ddot{u}_1+(\mu+\lambda-\alpha)\partial_1 e+2\alpha\partial_2\varphi_3+X_1=0,\\
&(\mu+\alpha)\nabla_1^2 u_2-\rho\ddot{u}_2+(\mu+\lambda-\alpha)\partial_2 e-2\alpha\partial_1\varphi_3+X_2=0,\\
&[(\gamma+\varepsilon)\nabla_1^2-4\alpha-I\partial_t^2]\varphi_3+2\alpha(\partial_1 u_2-\partial_2 u_1)+Y_3=0,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

gdzie

$$\nabla_1^2=\partial_1^2+\partial_2^2, \qquad e=\partial_1 u_1+\partial_2 u_2.$$

Pole przemieszczeń $\mathbf{u}=(u_1, u_2, 0)$ i obrotów $\boldsymbol{\varphi}=(0, 0, \varphi_3)$ wywołuje w ciele stan naprężenia, opisany następującymi macierzami:

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & 0\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{33}\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \mu_{13}\\ 0 & 0 & \mu_{23}\\ \mu_{31} & \mu_{32} & 0\end{bmatrix}. \tag{2.22}$$

W drugim układzie równań, opisanym przez wektory

$$\mathbf{u}=(0, 0, u_3), \quad \boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1, \varphi_2, 0), \quad \mathbf{X}=(0, 0, X_3), \quad \mathbf{Y}=(Y_1, Y_2, 0), \tag{2.23}$$

mamy do czynienia z układem równań

$$\begin{aligned}
&[(\gamma+\varepsilon)\nabla_1^2-4\alpha-I\partial_t^2]\varphi_1+(\gamma+\beta-\varepsilon)\partial_1\kappa+2\alpha\partial_2 u_3+Y_1=0,\\
&[(\gamma+\varepsilon)\nabla_1^2-4\alpha-I\partial_t^2]\varphi_2+(\gamma+\beta-\varepsilon)\partial_2\kappa-2\alpha\partial_1 u_3+Y_2=0,\\
&(\mu+\alpha)\nabla_1^2 u_3-\rho\ddot{u}_3+2\alpha(\partial_1\varphi_2-\partial_2\varphi_1)+X_3=0,
\end{aligned} \tag{2.24}$$

gdzie $\kappa=\partial_1\varphi_1+\partial_2\varphi_2$.

Łatwo sprawdzić, że polu przemieszczeń $\mathbf{u}=(0, 0, u_3)$ i polu obrotów $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1, \varphi_2, 0)$ przypisane są następujące macierze naprężeń:

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \sigma_{13}\\ 0 & 0 & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix}\mu_{11} & \mu_{12}, & 0\\ \mu_{21} & \mu_{22} & 0\\ 0 & 0 & \mu_{33}\end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

Zatrzymajmy naszą uwagę na pierwszym układzie równań. Przez wprowadzenie potencjałów Φ i Ψ, gdzie

$$u_1=\partial_1\Phi-\partial_2\Psi, \quad u_2=\partial_2\Phi-\partial_1\Psi, \quad \varphi_3=\varphi, \tag{2.26}$$

doprowadzamy układ równań (2.21) do prostych równań falowych (przy $\mathbf{X}=\mathbf{Y}=0$):

$$
\begin{gathered}
[(\lambda+2\mu)\nabla_1^2-\rho\partial_t^2]\Phi=0\,,\\
\{[(\mu+\alpha)\nabla_1^2-\rho\partial_t^2]\,[(\gamma+\varepsilon)\nabla_1^2-4\alpha-I\partial_t^2]+4\alpha^2\nabla_1^2\}\,(\Psi,\varphi)=0\,.
\end{gathered}
\tag{2.27}
$$

Układ tych równań stał się przedmiotem rozważań wielu badaczy. I tak V. R. PARFITT i A. C. ERINGEN [25] oraz J. STEFANIAK [26] badali odbicie się płaskiej fali od swobodnego brzegu półprzestrzeni sprężystej. A. C. ERINGEN i E. S. SUHUBI [11] badali propagację uogólnionej na ośrodek mikropolarny fali powierzchniowej Rayleigha. Temu samemu zagadnieniu poświęcona jest obszerna praca autorów: S. KALISKIEGO, J. KAPELEWSKIEGO i C. RYMARZA [27].

Propagację fal w płycie (rozszerzone zagadnienie Lamba) rozpatrywali W. NOWACKI i W. K. NOWACKI [28]. Rozwiązano również szereg zagadnień brzegowych, gdy na brzegu półprzestrzeni sprężystej dane są obciążenia harmonicznie zmienne w czasie (W. NOWACKI i W. K. NOWACKI [29], G. EASON [30]). Zwrócić należy wreszcie uwagę na tendencje do rozwiązań przybliżonych równań falowych (G. EASON [31], J. D. ACHENBACH [32]) i uzyskane w tym zakresie interesujące wyniki.

Wróćmy do drugiego układu równań dwuwymiarowych, w którym deformacja ciała opisana jest wektorami $\mathbf{u}=(0,0,u_3)$, $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2,0)$.

Układ równań (2.24) doprowadzimy do prostych równań falowych przez wprowadzenie potencjałów Γ, H:

$$
\varphi_1=\partial_1\Gamma-\partial_2 H\,,\qquad \varphi_2=\partial_2\Gamma+\partial_1 H\,.
\tag{2.28}
$$

Równania te mają postać

$$
\begin{gathered}
[(\beta+2\gamma)\nabla_1^2-4\alpha-I\partial_t^2]\,\Gamma=0\,,\\
\{[(\mu+\alpha)\nabla_1^2-\rho\partial_t^2]\,[(\gamma+\varepsilon)\nabla_1^2-4\alpha-I\partial_t^2]+4\alpha^2\nabla_1^2\}\,(H,u_3)=0\,.
\end{gathered}
\tag{2.29}
$$

W pierwszym równaniu rozpoznajemy falę podłużną mikrorotacyjną, w drugim falę poprzeczną. Równania te przy założeniu, że

$$
(\varphi_1,\varphi_2,u_3)=\big(\overset{*}{\varphi}_1(x_1)\,,\ \overset{*}{\varphi}_2(x_1)\,,\ \overset{*}{u}_3(x_1)\big)\,e^{i(kx_2-\omega t)}\,,
\tag{2.30}
$$

i przy przyjęciu, że brzeg półprzestrzeni sprężystej $x_1=0$ jest wolny od naprężeń, prowadzą do fal powierzchniowych typu Love'a. Zagadnienie propagacji tych fal było szczegółowo badane w pracy [27].

Interesujący jest tu fakt, że w ramach klasycznej teorii sprężystości nie otrzyma się fal Love'a w jednorodnej półprzestrzeni sprężystej; propagacja tej fali jest możliwa jedynie w półprzestrzeni uwarstwionej, przy założeniu odpowiednich nierówności dotyczących gęstości i stałych Lamégo obu ośrodków.

Rozpatrzmy drugi typ zagadnień dwuwymiarowych, mianowicie zagadnienie deformacji osiowo-symetrycznej ciała. Układ równań (2.10) rozdziela się w tym przypadku na dwa niezależne od siebie układy równań.

W pierwszym układzie równań występują wektory

$$
\mathbf{u}=(u_r,0,u_z)\,,\qquad \boldsymbol{\varphi}=(0,\varphi_\theta,0)\,,\qquad \mathbf{X}=(X_r,0,X_z)\,,\qquad \mathbf{Y}=(0,Y_\theta,0)\,.
\tag{2.31}
$$

Układ równań ma postać

$$\left[(\mu+\alpha)\left(\nabla^2-\frac{1}{r^2}\right)u_r-\rho\ddot{u}_r\right]+(\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial e}{\partial r}-2\alpha\frac{\partial\varphi_\theta}{\partial r}+X_r=0,$$

$$[(\mu+\alpha)\nabla^2-\rho\partial_t^2]u_z+(\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial e}{\partial z}+2\alpha\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi_\theta)+X_z=0, \tag{2.32}$$

$$\left[(\gamma+\varepsilon)\left(\nabla^2-\frac{1}{r^2}\right)-4\alpha-I\partial_t^2\right]\varphi_\theta+2\alpha\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+Y_\theta=0,$$

gdzie

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\qquad e=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)+\frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Z przedstawionym tu odkształceniem ciała związane są następujące macierze naprężeń:

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz}\\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0\\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz}\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix}0 & \mu_{r\theta} & 0\\ \mu_{\theta r} & 0 & \mu_{\theta z}\\ 0 & \mu_{z\theta} & 0\end{bmatrix}. \tag{2.33}$$

W drugim układzie równań występują wektory

$$\mathbf{u}=(0,u_\theta,0),\quad \boldsymbol{\varphi}=(\varphi_r,0,\varphi_z),\quad \mathbf{X}=(0,X_\theta,0),\quad \mathbf{Y}=(Y_r,0,Y_z), \tag{2.34}$$

oraz macierze naprężeń

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}0 & \sigma_{r\theta} & 0\\ \sigma_{\theta r} & 0 & \sigma_{\theta z}\\ 0 & \sigma_{z\theta} & 0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix}\mu_{rr} & 0 & \mu_{rz}\\ 0 & \mu_{\theta\theta} & 0\\ \mu_{zr} & 0 & \mu_{zz}\end{bmatrix}. \tag{2.35}$$

Układ równań ma tu następującą postać:

$$\left[(\gamma+\varepsilon)\left(\nabla^2-\frac{1}{r^2}\right)-4\alpha-I\partial_t^2\right]\varphi_r+(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\kappa}{\partial r}-2\alpha\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+Y_r=0,$$

$$[(\gamma+\varepsilon)\nabla^2-4\alpha-I\partial_t^2]\varphi_z+(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\kappa}{\partial z}+\frac{2\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta)+Y_z=0, \tag{2.36}$$

$$\left[(\mu+\alpha)\left(\nabla^2-\frac{1}{r^2}\right)-\rho\partial_t^2\right]u_\theta+2\alpha\left(\frac{\partial\varphi_r}{\partial z}-\frac{\partial\varphi_z}{\partial r}\right)+X_\theta=0,$$

gdzie

$$\kappa=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi_r)+\frac{\partial\varphi_z}{\partial z}.$$

Oba układy równań można sprowadzić do prostych równań falowych. Równania te posłużyły do zbadania fal podłużnych i skrętnych w nieskończonym cylindrze o przekroju kołowym oraz do rozwiązania dwu uogólnionych osiowo-symetrycznych problemów Lamba (W. Nowacki i W. K. Nowacki [33 i 34]).

Na zakończenie tego przeglądu zagadnień dynamicznych wspomnieć należy o twierdzeniach ogólnych mikropolarnej elastokinetyki. Twierdzenia te były przedstawione i wyprowadzone przez wielu autorów. I tak twierdzenie o wzajemności prac ma postać (N. Sandru [20], D. Ieşan [35]):

$$\int_V (X_i * u_i' + Y_i * \varphi_i')\,dV + \int_A (p_i * u_i' + m_i * \varphi_i')\,dA = \int_V (X_i' * u_i + Y_i' * \varphi_i)\,dV + \int_A (p_i' * u_i + m_i' * \varphi_i)\,dA, \tag{2.37}$$

gdzie wyrażenia

$$X_i * u_i' = \int_0^t X_i(\mathbf{x}, t-\tau)\,u_i'(\mathbf{x}, \tau)\,d\tau, \quad \text{itd.}$$

są splotami. Równanie to stanowi uogólnienie znanego twierdzenia O. Graffiego [36] z klasycznej elastokinetyki. Twierdzenie o wzajemności (2.37) stanowi jedno z najbardziej interesujących twierdzeń mikropolarnej teorii sprężystości. Twierdzenie to jest nader ogólne i zawiera możliwości wyprowadzenia metod całkowania równań elastokinetyki przy użyciu funkcji Greena.

Poważne znaczenie ma tu zasada prac wirtualnych

$$\int_V [(X_i - \rho\ddot{u}_i)\delta u_i + (Y_i - I\ddot{\varphi}_i)\,\delta\varphi_i]\,dV + \int_A (p_i\,\delta u_i + m_i\,\delta\varphi_i)\,dA = \int_V (\sigma_{ji}\,\delta\gamma_{ji} + \mu_{ji}\,\delta\varkappa_{ji})\,dV. \tag{2.38}$$

Tutaj δu_i i $\delta\varphi_i$ oznaczają wirtualne przemieszczenia i obroty. Zasada prac wirtualnych może posłużyć do wyprowadzenia równań zginania płyt i powłok przy odpowiednich uproszczeniach oraz do przybliżonego rozwiązania równań elastokinetyki, wreszcie do wyprowadzenia twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań.

Ważną rolę odgrywa rozszerzona zasada Hamiltona:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{W} - \mathcal{K})\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{L}. \tag{2.39}$$

Zakłada się tu, że $\delta\,\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_1) = \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_2) = \delta\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t_1) = \delta\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t_2) = 0$. Symbol $\delta\mathcal{L}$ oznacza pracę wirtualną sił zewnętrznych:

$$\delta\mathcal{L} = \int_V (X_i\delta u_i + Y_i\,\delta\varphi_i)\,dV + \int_A (p_i\,\delta u_i + m_i\,\delta\varphi_i)\,dA,$$

$\mathcal{K}$ jest energią kinetyczną, a $\mathcal{W}$ pracą odkształcenia, która w naszym przypadku procesu adiabatycznego jest identyczna z energią wewnętrzną $\mathcal{U}$.

W naszym przeglądzie podaliśmy jedynie najważniejsze naszym zdaniem rezultaty mikropolarnej elastokinetyki.

Zauważmy, że zasadnicze rezultaty otrzymano jedynie w przypadku propagacji fal monochromatycznych. Ledwie zainicjowane są badania odnoszące się do fal wywołanych przyczynami aperiodycznymi, czy też przyczynami poruszającymi się ze stałą lub zmienną prędkością.

Na uwagę zasługuje wreszcie fakt, że współczesne badanie zagadnień dynamicznych zmierza w kierunku objęcia i innych pól fizycznych. Prowadzone są już badania w dziedzinie mikropolarnej termosprężystości, mikropolarnej magnetosprężystości itd.

3. Mikropolarna elastostatyka

Wprowadzenie związków konstytutywnych do równań równowagi i uwzględnienie definicji odkształceń prowadzi do układu sześciu równań różniczkowych w przemieszczeniach i obrotach:

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} &(\mu+\alpha)\nabla^2\mathbf{u}+(\lambda+\mu-\alpha)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}+2\alpha\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\varphi}+\mathbf{X}=0\,,\\ &[(\gamma+\varepsilon)\nabla^2-4\alpha]\,\boldsymbol{\varphi}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\,\mathrm{grad\,div}\,\boldsymbol{\varphi}+2\alpha\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}+\mathbf{Y}=0\,.\end{aligned}$$

Jest to układ równań typu eliptycznego. Zauważmy, że stałe materiałowe μ, λ, α, β, γ, ε występujące w tych równaniach odnoszą się do procesu izotermicznego.

Postawmy sobie następujące pytanie: Czy rozwiązanie układu równań (3.1) da się przedstawić jako sumy dwu rozwiązań, z których pierwsze ma taką samą postać jak rozwiązanie klasycznej elastostatyki, a drugie jest rozwiązaniem uzupełniającym, uwzględniającym efekty brzegowe. Na powyższe pytanie H. Schaefer [37] odpowiedział twierdząco.

Wprowadzając wektor

$$(3.2)\qquad \boldsymbol{\zeta}=\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}-\boldsymbol{\varphi}$$

i eliminując funkcję $\boldsymbol{\varphi}$ z układu jednorodnych równań (3.1) otrzymamy

$$(3.3)\qquad \begin{aligned} &\mu\nabla^2\mathbf{u}+(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}=2\alpha\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\zeta}\,,\\ &[(\gamma+\varepsilon)\nabla^2-4\alpha]\,\boldsymbol{\zeta}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\,\mathrm{grad\,div}\,\boldsymbol{\zeta}=\frac{1}{2}(\gamma+\varepsilon)\nabla^2\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}\,.\end{aligned}$$

Przyjmijmy rozwiązanie tego układu równań w postaci

$$(3.4)\qquad \mathbf{u}=\mathbf{u}'+\mathbf{u}'',\qquad \boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\zeta}'+\boldsymbol{\zeta}'',\qquad \text{gdzie } \boldsymbol{\zeta}'=0\,.$$

Za pomocą tej reprezentacji rozdzielimy układ równań (3.3) na dwa niezależne od siebie układy równań

$$(3.5)\qquad \mu\nabla^2\mathbf{u}'+(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}'=0\,,\qquad \nabla^2\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}'=0$$

oraz

$$(3.6)\qquad \begin{aligned} &\mu\nabla^2\mathbf{u}''+(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}''=2\alpha\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\zeta}'',\\ &[(\gamma+\varepsilon)\nabla^2-4\alpha]\,\boldsymbol{\zeta}''+(\beta+\gamma-\varepsilon)\,\mathrm{grad\,div}\,\boldsymbol{\zeta}''=\frac{1}{2}(\gamma+\varepsilon)\nabla^2\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}''\,.\end{aligned}$$

Zauważmy, że układ równań (3.5) w postaci swej jest identyczny z odpowiednim układem równań klasycznej teorii sprężystości.

Załóżmy, że na brzegu ciała dane są obciążenia $\mathbf{p}$ i momenty $\mathbf{m}$:

$$p_i = \sigma_{ji} n_j\,, \qquad m_i = \mu_{ji} n_j\,. \tag{3.7}$$

Spełniamy układ równań (3.6) z warunkami brzegowymi $p_i = \sigma'_{ji} n_j$. Przyjęcie $\boldsymbol{\zeta}' = 0$ jest jednoznaczne ze stwierdzeniem, że część antysymetryczna tensora γ'_{ji} jest równa zeru $[\gamma'_{\langle ij\rangle} = 0]$. Tnesor γ'_{ji} jest tensorem symetrycznym. Zatem i naprężenia σ'_{ji} tworzą tensor symetryczny. Ale założenie $\boldsymbol{\zeta}' = 0$ prowadzi do związku $\boldsymbol{\varphi}' = 1/2 \operatorname{rot} \mathbf{u}'$. Ponieważ $\boldsymbol{\varphi}' \neq 0$, to i $\varkappa'_{ij} \neq 0$. W ciele istnieją zatem naprężenia momentowe

$$\mu'_{ji} = 2\gamma \varkappa'_{(ji)} + 2\varepsilon \varkappa'_{\langle ji\rangle} + \beta \varkappa'_{kk} \delta_{ij}\,. \tag{3.8}$$

Warunek $m_i = \mu'_{ji} n_j$ w zasadzie nie będzie spełniony. Ponieważ funkcje $\mathbf{u}'$ nie spełniają wszystkich warunków brzegowych, przeto do rozwiązań $\mathbf{u}'$, $\boldsymbol{\zeta}'$ dodać należy rozwiązanie $\mathbf{u}''$, $\boldsymbol{\zeta}''$, spełniające układ równań (3.6) oraz warunki brzegowe

$$\sigma''_{ji} n_j = 0\,, \qquad (\mu'_{ji} + \mu''_{ji}) n_j = m_i\,. \tag{3.9}$$

Rozwiązanie układu równań (3.6) przyjął H. Schaefer w postaci

$$\boldsymbol{\zeta}'' = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega}\,, \tag{3.10}$$

gdzie funkcje Φ, $\boldsymbol{\Omega}$ spełniają równania różniczkowe

$$(h^2 \nabla^2 - 1)\Phi = 0\,, \qquad (\nu^2 \nabla^2 - 1)\boldsymbol{\Omega} = 0\,, \qquad h^2 = \frac{2\gamma + \beta}{4\alpha}\,, \qquad \nu^2 = \frac{\gamma + \varepsilon}{4\alpha}\,. \tag{3.11}$$

Brak jednak dowodu kompletności rozwiązań $\boldsymbol{\zeta}''$.

Podobnie jak w elastokinetyce tak i tu przedstawić można przemieszczenia i obroty przez dwie funkcje wektorowe $\mathbf{G}$, $\mathbf{F}$ będące uogólnieniem funkcji Galerkina. Jeżeli podaną przez N. Sandru [20] reprezentację

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (\lambda + 2\mu)\nabla^2[(\gamma+\varepsilon)\nabla^2 - 4\alpha]\mathbf{F} - [(\gamma+\varepsilon)(\lambda+\mu-\alpha)\nabla^2 - 4\alpha(\lambda+\mu)]\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F} - \\ &\qquad - 2\alpha[(\beta+2\gamma)\nabla^2 - 4\alpha]\operatorname{rot}\mathbf{G}\,, \\ \boldsymbol{\varphi} &= (\mu+\alpha)\nabla^2[(\beta+2\gamma)\nabla^2 - 4\alpha)]\mathbf{G} - [(\mu+\alpha)(\beta+\gamma-\varepsilon)\nabla^2 - 4\alpha]\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{G} - \\ &\qquad - 2\alpha(\lambda+2\mu)\nabla^2 \operatorname{rot}\mathbf{F} \end{aligned} \tag{3.12}$$

wstawić do układu równań (3.1), to otrzymamy następujące proste równania dla wyznaczenia funkcji $\mathbf{F}$ i $\mathbf{G}$:

$$\begin{aligned} (\lambda+2\mu)\nabla^2\nabla^2(l^2\nabla^2 - 1)\mathbf{F} + \mathbf{X} &= 0\,, \\ 16\alpha^2\mu\nabla^2(h^2\nabla^2 - 1)(l^2\nabla^2 - 1)\mathbf{G} + \mathbf{Y} &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Zauważmy, że założenie $\mathbf{X} = 0$ pociąga za sobą, że również $\mathbf{F} = 0$ Podobnie dla $\mathbf{Y} = 0$ jest $\mathbf{G} = 0$. Równania (3.13) pozwalają na nader proste wyznaczenie funkcji Greena w nieskończonej przestrzeni mikropolarnej.

Podamy niżej już tylko wyniki końcowe rozwiązań osobliwych. Niech w punkcie ξ działa skupiona siła jednostkowa, skierowana w kierunku osi x_i. Przemieszczenia i obroty tym działaniem wywołane mają postać [20]:

$$
(3.14)\qquad
\begin{aligned}
u_j^{(i)} &= -\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\partial_i\partial_j\left[R+\frac{(\gamma+\varepsilon)(\lambda+2\mu)}{2\mu(\lambda+\mu)}\left(\frac{1-e^{-R/l}}{R}\right)\right]-\\
&\qquad -\frac{1}{4\pi\mu}\left(\frac{\alpha}{\mu+\alpha}\frac{e^{-R/l}}{R}-\frac{1}{R}\right)\delta_{ij},\\
\varphi_j^{(i)} &= \frac{1}{8\pi\mu}\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1-e^{-R/l}}{R}\right).
\end{aligned}
$$

Tutaj R jest odległością punktów $\mathbf{x}$ i ξ. Przechodząc do klasycznej teorii sprężystości mamy

$$
u_j^{(i)} = -\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\partial_i\partial_j(R)+\frac{1}{4\pi\mu R}\delta_{ij}, \qquad \varphi_j^{(i)}=0 .
$$

W przypadku działania jednostkowego momentu skupionego, przyłożonego do punktu ξ i skierowanego w kierunku osi x_i, mamy następujące przemieszczenia $\hat{u}_j^{(i)}$ i obroty $\hat{\varphi}_j^{(i)}$ [20]:

$$
(3.15)\qquad
\begin{aligned}
\hat{u}_j^{(i)} &= \frac{1}{8\pi\mu}\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1-e^{-R/l}}{R}\right),\\
\hat{\varphi}_j^{(i)} &= \frac{1}{16\pi\mu}\partial_i\partial_j\left[\frac{1-e^{-R/l}}{R}+\frac{\mu}{\alpha}\left(\frac{e^{-R/h}-e^{-R/l}}{R}\right)\right]+\frac{e^{-R/l}}{4\pi(\gamma+\varepsilon)R}\delta_{ij} .
\end{aligned}
$$

Obok funkcji typu Galerkina wprowadzono w mikropolarnej elastostatyce funkcje typu Papkowicza-Neubera. H. NEUBER [8] uogólnił swe funkcje na mikropolarną elastostatykę i zastosował je do szeregu zagadnień odnoszących się do koncentracji naprężeń wokół otworów i karbów [38 - 40].

Pewną odmianę funkcji naprężeń tego typu podali N. SANDRU [20] i S. C. COWIN [41].

Równolegle z równaniami w przemieszczeniach i obrotach korzystać można w elastostatyce z równań naprężeniowych, uogólnionych równań Beltramiego-Michella. Interesujące są w odniesieniu do tych równań rozważania H. SCHAEFERA, który wprowadził bardzo ogólny typ funkcji naprężeń, będących uogólnieniem funkcji naprężeń Morery i Maxwella z klasycznej elastostatyki [42]. Na uwagę zasługuje również praca S. KESSELA [51] o funkcjach naprężeń.

W sposób bardziej szczegółowy wypada nam omówić zagadnienia dwuwymiarowe, zagadnienia płaskiego stanu odkształcenia i zagadnienia osiowo-symetryczne.

Rozpatrzmy płaski stan odkształcenia, w którym deformacja jest niezależna od zmiennej x_3. W tym przypadku otrzymamy dwa niezależne od siebie układy równań. W pierwszym zagadnieniu płaskim występują wektory $\mathbf{u}=(u_1, u_2, 0)$, $\boldsymbol{\varphi}=(0, 0, \varphi_3)$, w drugim wektory $\mathbf{u}=(0, 0, u_3)$, $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1, \varphi_2, 0)$.

W pierwszym zagadnieniu punktem wyjścia niech będą równania geometrycznej zwartości

$$
\begin{gathered}
\partial_1^2\sigma_{22}+\partial_2^2\sigma_{11}-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\nabla_1^2(\sigma_{11}+\sigma_{22})=\partial_1\partial_2(\sigma_{12}+\sigma_{21}),\\
(\partial_2^2-\partial_1^2)(\sigma_{12}+\sigma_{21})+\frac{\mu}{\alpha}\nabla_1^2(\sigma_{12}-\sigma_{21})+2\partial_1\partial_2(\sigma_{11}-\sigma_{22})+\\
+\frac{4\mu}{\gamma+\varepsilon}(\partial_1\mu_{13}+\partial_2\mu_{23})=0,\\
\partial_1\mu_{23}=\partial_2\mu_{13}
\end{gathered}
\tag{3.16}
$$

oraz równania równowagi

$$
\begin{gathered}
\partial_1\sigma_{11}+\partial_2\sigma_{21}=0,\quad \partial_1\sigma_{12}+\partial_2\sigma_{22}=0,\\
\sigma_{12}-\sigma_{21}+\partial_1\mu_{13}+\partial_2\mu_{23}=0.
\end{gathered}
\tag{3.17}
$$

Mamy układ sześciu równań dla wyznaczenia sześciu nieznanych funkcji σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}, σ_{21}, μ_{13}, μ_{23}.

Równania równowagi będą identycznie spełnione przez dwie funkcje F i Ψ, powiązane z naprężeniami zależnościami

$$
\begin{gathered}
\sigma_{11}=\partial_2^2F-\partial_1\partial_2\Psi,\quad \sigma_{22}=\partial_1^2F+\partial_1\partial_2\Psi,\\
\sigma_{12}=-\partial_1\partial_2F-\partial_2^2\Psi,\quad \sigma_{21}=-\partial_1\partial_2F+\partial_1^2\Psi,\\
\mu_{23}=\partial_2\Psi,\quad \mu_{13}=\partial_1\Psi.
\end{gathered}
\tag{3.18}
$$

Funkcja F jest funkcją Airy'ego, znaną z elastostatyki klasycznej. Funkcja Ψ została wprowadzona przez R. D. Mindlina [43] i H. Schaefera [7] do płaskiego stanu odkształcenia w kontinuum i pseudo-kontinuum Cosseratów.

Wstawiając funkcje (3.18) do równań zwartości otrzymamy następujące równania dla funkcji F i Ψ:

$$
\nabla_1^2\nabla_1^2F=0,\quad \nabla_1^2(l^2\nabla_1^2-1)\Psi=0.
\tag{3.19}
$$

Funkcje F i ψ są od siebie zależne, spełniają warunki Cauchy'ego-Riemanna:

$$
\begin{gathered}
\partial_1(l^2\nabla_1^2-1)\Psi=A\partial_2\nabla_1^2F,\\
\partial_2(l^2\nabla_1^2-1)\Psi=-A\partial_1\nabla_1^2F,
\end{gathered}
\qquad A=\frac{(\lambda+2\mu)(\gamma+\varepsilon)}{4\mu(\lambda+\mu)}.
\tag{3.20}
$$

Ponieważ funkcje ∇_1^2F i $(l^2\nabla_1^2-1)\Psi$ są funkcjami harmonicznymi, to nietrudno spostrzec, że do rozwiązania równań (3.19) szczególnie dobrze nadaje się metoda funkcji zmiennych zespolonych. Metoda ta została z powodzeniem zastosowana przez G. N. Sawina [44 - 46] i jego współpracowników do zagadnień spiętrzenia naprężeń wokół otworów.

Badaniem kompletności rozwiązań za pomocą funkcji F, Ψ zajmował się D. E. Carlson [47].

Zauważmy, że zagadnienie płaskie jest takie samo w swej postaci dla pseudokontinuum i dla kontinuum Cosseratów. Dlatego też mamy w tym zagadnieniu sporo rozwiązań konkretnych, dotyczących stanu naprężeń w półprzestrzeni sprężystej, koncentracji naprężeń i rozwiązań osobliwych. Wymienić należy tu przede wszystkim prace R. D. MINDLINA [48], H. SCHAEFERA [7], R. MUKI E. STERNBERGA [49] oraz P. N. KALONIEGO i T. ARIMANA [50].

Pierwsze płaskie zagadnienie daje się rozwiązać również na innej drodze, dogodnej w przypadku danych przemieszczeń i obrotów na brzegu [52].

Wychodząc z równań różniczkowych w przemieszczeniach i obrotach

$$\begin{aligned}
&(\mu+\alpha)\nabla_1^2 u_1+(\lambda+\mu-\alpha)\partial_1 e+2\alpha\partial_2\varphi_3=0,\\
(3.21)\qquad &(\mu+\alpha)\nabla_1^2 u_2+(\lambda+\mu-\alpha)\partial_2 e-2\alpha\partial_1\varphi_3=0,\\
&[(\gamma+\varepsilon)\nabla_1^2-4\alpha]\varphi_3+2\alpha(\partial_1 u_2-\partial_2 u_1)=0, \qquad e=\partial_1 u_1+\partial_2 u_2
\end{aligned}$$

i wprowadzając potencjały Φ, Ψ, związane z przemieszczeniami zależnościami

$$(3.22)\qquad u_1=\partial_1\Phi+\partial_2\Psi, \qquad u_2=\partial_2\Phi-\partial_1\Psi,$$

otrzymamy następujące proste równania różniczkowe:

$$(3.23)\qquad \nabla_1^2\nabla_1^2\Phi=0, \qquad \nabla_1^2(l^2\nabla_1^2-1)\varphi_3=0.$$

Funkcje Φ i φ_3 nie są od siebie niezależne, powinny spełniać warunki dane w postaci

$$\begin{aligned}
&\partial_1\nabla_1^2\Phi=-\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\partial_2(l^2\nabla_1^2-1)\varphi_3,\\
(3.24)\qquad &\\
&\partial_2\nabla_1^2\Phi=\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\partial_1(l^2\nabla_1^2-1)\varphi_3.
\end{aligned}$$

Są to warunki Cauchy'ego-Riemanna dla funkcji $\nabla_1^2\Phi$ i $(l^2\nabla_1^2-1)\varphi_3$. Potencjał Ψ jest związany z funkcją φ_3 zależnością

$$(3.25)\qquad \nabla_1^2\Psi=\frac{1}{2\alpha}[(\gamma+\varepsilon)\nabla_1^2-4\alpha]\varphi_3.$$

Droga postępowania przy rozwiązaniu tego pierwszego zagadnienia płaskiego jest następująca. Z rozwiązania równań (3.23), np. dla półprzestrzeni sprężystej, otrzymuje się cztery stałe całkowania. Do ich wyznaczenia służą trzy warunki brzegowe oraz związki Cauchy'ego-Riemanna.

W drugim zagadnieniu płaskiego stanu odkształcenia mamy do czynienia z układem równań

$$\begin{aligned}
&(\mu+\alpha)\nabla_1^2 u_3+2\alpha(\partial_1\varphi_2-\partial_2\varphi_1)=0,\\
(3.26)\qquad &[(\gamma+\varepsilon)\nabla_1^2-4\alpha]\varphi_1+(\beta+\gamma-\varepsilon)\partial_1\kappa+2\alpha\partial_2 u_3=0,\\
&[(\gamma+\varepsilon)\nabla_1^2-4\alpha]\varphi_2+(\beta+\gamma-\varepsilon)\partial_2\kappa-2\alpha\partial_1 u_3=0.
\end{aligned}$$

Układ tych równań najprościej rozwiążemy przy użyciu potencjałów Ω i Ξ [53]' gdzie

$$(3.27)\qquad \varphi_1=\partial_1\Omega+\partial_2\Xi, \qquad \varphi_2=\partial_2\Omega-\partial_1\Xi.$$

Wstawienie związków (3.21) do układu równań (3.20) prowadzi do równań

$$\nabla_1^2(h^2\nabla_1^2-1)\Omega=0\,,\quad \nabla_1^2(l^2\nabla_1^2-1)\Xi=0\,. \tag{3.28}$$

Funkcje Ω i Ξ związane są ze sobą zależnościami Cauchy'ego-Riemanna:

$$\begin{aligned} -\partial_1(h^2\nabla_1^2-1)\Omega&=\frac{\mu}{\mu+\alpha}\partial_2(l^2\nabla_1^2-1)\Xi\,,\\ \partial_2(h^2\nabla_1^2-1)\Omega&=\frac{\mu}{\mu+\alpha}\partial_1(l^2\nabla_1^2-1)\Xi\,. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Wielkość u_3 związana jest z potencjałem sprężystym Ξ zależnością

$$\nabla_1^2 u_3=\frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\nabla_1^2\Xi\,. \tag{3.30}$$

Inną drogą rozwiązania «drugiego» zagadnienia płaskiego stanu odkształcenia podał M. Suchar [54]. Punktem wyjścia jego rozważań jest pięć równań nierozdzielności i trzy równania równowagi. Układ równań równowagi spełniony jest przez cztery funkcje Φ, ψ, χ, Ω związane z naprężeniami w następujący sposób:

$$\begin{aligned} &\sigma_{13}=\partial_2\Phi\,, \quad \sigma_{23}=-\partial_1\Phi\,, \quad \sigma_{31}=-\partial_2\Phi+\partial_1\psi\,, \quad \sigma_{32}=\partial_1\Phi+\partial_2\psi\,,\\ &\mu_{11}=2\Phi+\partial_2\chi\,, \quad \mu_{21}=\psi-\partial_1\chi\,, \quad \mu_{12}=-\Psi+\partial_2\Omega\,, \quad \mu_{22}=2\Phi-\partial_1\Omega\,. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Wstawienie tych funkcji do związków nierozdzielności prowadzi do następujących równań różniczkowych dla funkcji Φ, ψ, χ, Ω:

$$\nabla_1^2(h^2\nabla_1^2-1)\Phi=0\,,\quad \nabla_1^2(l^2\nabla_1^2-1)\psi=0\,,\quad L(\chi)=0\,,\quad L(\Omega)=0\,, \tag{3.32}$$

gdzie

$$L(\;)=(h^2\nabla_1^2-1)(l^2\nabla_1^2-1)\nabla_1^2\nabla_1^2(\;)\,.$$

Należy dodać, że funkcje naprężeń Φ, ψ, χ, Ω nie są od siebie niezależne, powiązane są dodatkowymi czterema zależnościami różniczkowymi.

Rozpatrzmy z kolei zagadnienie osiowo-symetryczne. Wiemy z poprzedniego punktu, że układ sześciu równań w przemieszczeniach i obrotach rozdziela się w tym przypadku na dwa niezależne od siebie układy równań. W pierwszym deformacja opisana jest przez wektory $\mathbf{u}=(u_r, 0, u_z)$, $\boldsymbol{\varphi}=(0, \varphi_\theta, 0)$, w drugim przez wektory $\mathbf{u}=(0, u_\theta, 0)$, $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_r, 0, \varphi_z)$.

W klasycznej teorii sprężystości przy rozwiązywaniu pierwszego zagadnienia często posługiwano się funkcją Love'a $\chi(r, z)$ spełniającą równanie biharmoniczne. W mikropolarnej teorii sprężystości wprowadza się dwie funkcje typu Love'a.

Wiążąc w pierwszym zagadnieniu osiowo-symetrycznym funkcję z przemieszczeniami i obrotami w sposób następujący [55]:

$$u_r=-\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial z}(\Gamma\chi)\,,\quad \varphi_\theta=2\alpha(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\chi\,, u_z=\Theta\chi-\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\Gamma\chi)\,, \tag{3.33}$$

gdzie

$$\Gamma=(\gamma+\varepsilon)(\lambda+\mu-\alpha)\nabla^2-4\alpha(\lambda+\mu),$$

$$\Theta=(\lambda+2\mu)\nabla^2[(\gamma+\varepsilon)\nabla^2-4\alpha], \qquad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad r=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},$$

i wstawiając powyższe funkcje do równań elastostatyki, otrzymamy dla funkcji χ następujące równanie:

$$4\alpha\mu(\lambda+2\mu)\nabla^2\nabla^2(l^2\nabla^2-1)\chi(r,z)+X_z(r,z)=0. \tag{3.34}$$

Podobnie w drugim zagadnieniu osiowo-symetrycznym, w którym przyjęto, że

$$\varphi_r=-\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}(\Omega\psi), \qquad u_\theta=8\alpha^2\frac{\partial}{\partial r}(h^2\nabla^2-1)\psi, \qquad \varphi_z=\Phi\psi-\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\Omega\psi), \tag{3.35}$$

gdzie

$$\Omega=(\mu+\alpha)(\beta+\gamma-\varepsilon)\nabla^2-4\alpha^2, \qquad \Phi=(\mu+\alpha)\nabla^2[(\beta+2\gamma)\nabla^2-4\alpha],$$

otrzymuje się z układu równań elastostatyki następujące równanie dla wyznaczenia drugiej uogólnionej funkcji Love'a:

$$16\alpha^2\mu\nabla^2(h^2\nabla^2-1)(l^2\nabla^2-1)\psi(r,z)+Y_z(r,z)=0. \tag{3.36}$$

Analogiczne funkcje wyprowadził J. Stefaniak [57] z funkcji wektorowych N. Sandru.

Inna droga rozwiązania zagadnień osiowo-symetrycznych polega na wprowadzeniu potencjałów sprężystych [56]. Drogę tę krótko objaśnimy na przykładzie pierwszego zagadnienia osiowo-symetrycznego. Wyraźmy przemieszczenia $\mathbf{u}=(u_r,0,u_z)$ i obroty $\boldsymbol{\varphi}=(0,\varphi_\theta,0)$ przez potencjały Φ, Ψ, ϑ, przy czym

$$u_r=\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial z}, \qquad u_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}, \qquad \varphi_\theta=\frac{\partial\vartheta}{\partial r}. \tag{3.37}$$

Wstawiając (3.37) do równań elastostatyki otrzymamy układ dwu równań

$$\nabla^2\nabla^2\Phi=0, \qquad \nabla^2(l^2\nabla^2-1)\vartheta=0. \tag{3.38}$$

Funkcje Φ i ϑ związane ze sobą zależnościami

$$\begin{aligned}&\nabla^2\Phi-\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial}{\partial z}(l^2\nabla^2-1)\vartheta=0,\\ &\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2\Phi+\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\left(\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(l^2\nabla^2-1)\vartheta=0.\end{aligned} \tag{3.39}$$

Funkcję Ψ wyznaczymy z równania

$$\nabla^2\Psi=-\frac{1}{2\alpha^2}[(\gamma+\varepsilon)\nabla^2-4\alpha]. \tag{3.40}$$

Zupełnie analogiczną drogę postępowania stosuje się w drugim zagadnieniu osiowo-symetrycznym. Do celu oczywiście prowadzą i inne drogi, jak zastosowanie funkcji Neubera, czy też wreszcie bezpośrednie całkowanie układu równań różniczkowych przy użyciu transformacji całkowej Hankela, czy też Hankela-Fouriera. Rozwiązano szereg zagadnień konkretnych, dotyczących stanu naprężeń w półprzestrzeni sprężystej (problem uogólniony Boussinesqa).

Na zakończenie naszego przeglądu mikropolarnej elastostatyki kilka słów należy poświęcić ogólnym twierdzeniom wariacyjnym, twierdzeniu o wzajemności itp. Twierdzenia tego typu można prosto przenieść na teren mikropolarnej teorii przez dodanie odpowiednich wyrazów związanych z pracą momentów i naprężeń momentowych.

Zasada prac wirtualnych przy wirtualnych przemieszczeniach δu_i oraz wirtualnych obrotach $\delta\varphi_i$ ma postać

$$\int_V (X_i\delta u_i+Y_i\delta\varphi_i)\,dV+\int_A (p_i\delta u_i+m_i\delta\varphi_i)\,dA=\delta\mathcal{W}_\varepsilon, \tag{3.41}$$

gdzie

$$\mathcal{W}_\varepsilon=\int_V\left(\mu\gamma_{(ij)}\gamma_{(ij)}+\alpha\gamma_{\langle ij\rangle}\gamma_{\langle ij\rangle}+\frac{\lambda}{2}\gamma_{kk}\gamma_{nn}+\dots\right)dV.$$

Z zasady prac wirtualnych wyprowadza się twierdzenie o minimum energii potencjalnej

$$\delta\Gamma=0, \tag{3.42}$$

gdzie

$$\Gamma=\mathcal{W}_\varepsilon-\int_V (X_iu_i+Y_i\varphi_i)\,dV-\int_{A_\sigma}(p_iu_i+m_i\varphi_i)\,dA.$$

Tutaj A_σ oznacza tę część powierzchni ograniczającej ciało, na której dane są obciążenia.

Poważne znaczenie w klasycznej elastostatyce ma twierdzenie o minimum pracy komplementarnej. Tutaj, w elastostatyce mikropolarnej, mamy do czynienia z zasadą wariacyjną typu

$$\delta\Pi=0, \tag{3.43}$$

gdzie

$$\Pi=\mathcal{W}_\sigma-\int_{A_u}(p_iu_i+m_i\varphi_i)\,dA$$

oraz

$$\mathcal{W}_\sigma=\int_V\left(\mu'\sigma_{(ij)}\sigma_{(ij)}+\alpha'\sigma_{\langle ij\rangle}\sigma_{\langle ij\rangle}+\frac{\lambda'}{2}\sigma_{kk}\sigma_{nn}+\dots\right)dV.$$

Tutaj A_u odnosi się do tej części powierzchni ograniczającej ciało, na której dane są przemieszczenia i obroty.

Wyprowadzono (N. SANDRU [20]) twierdzenie o wzajemności

$$\int_V (X_iu_i'+Y_i\varphi_i')\,dV+\int_A (p_iu_i'+m_i\varphi_i')\,dA=\int_V (X_i'u_i+Y_i'\varphi_i)\,dV+\int (p_i'u_i+m_i'\varphi_i)\,dA \tag{3.44}$$

oraz szczególne przypadki tego twierdzenia, uogólnione wzory Somigliana. Sporo uwagi poświęcono zagadnieniu jednoznaczności rozwiązań i twierdzeniom o istnieniu rozwiązań (M. HLAVACEK [58] i D. IEŞAN [59]).

Oddzielnego traktowania wymagają prace z teorii dyslokacji w kontinuum Cosseratów. Na znaczenie mikropolarnej sprężystości dla teorii dyslokacji pierwszy zwrócił uwagę W. GÜNTHER [6]. Pewne koncepcje dyslokacji były omawiane w pracy W. D. CLAUSA i A. C. ERINGENA [60] oraz w pracy S. MINAGAWA [61].

Teorią anizotropowego ośrodka Cosseratów zajmowali się S. KESSEL [62] i D. IEŞAN [63].

Teoria ośrodka Cosseratów jest obecnie teorią dobrze rozwiniętą i stanowi dzisiaj nadbudowę klasycznej teorii sprężystości. Teoria ta jednak nie ma dotąd pełnej weryfikacji doświadczalnej. Stałe materiałowe nie zostały dotychczas określone dla poszczególnych typów materiałów. Znamy jedynie rząd ich wielkości oraz wzajemne stosunki sześciu stałych. Mamy zatem do czynienia z jaskrawym przypadkiem wyprzedzenia doświadczeń przez teorię.

Zdaniem moim punkt ciężkości badań nad ośrodkiem mikropolarnym powinien przenieść się na badania doświadczalne. Rola teoretyków jest tu w zasadzie wyczerpana.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. VOIGT, *Theoretische Studien über die Elastisitätsverhaltnisse der Kristalle*, Abh. Ges. Wiss. Göttingen, **34**, 1887.
2. E. COSSERAT and F. COSSERAT, *Théorie des corps déformables*, A. Herman, Paris 1909.
3. C. TRUESDELL and R. A. TOUPIN, *The classical field theories*, Encyclopedia of Physics, **3**, No. 1, Springer Verlag, Berlin 1960.
4. G. GRIOLI, *Elasticité asimmetrice*, Ann. di Mat. Pura et Appl. Ser., IV, **50**, 1960.
5. R. D. MINDLIN and H. F. TIERSTEN, *Effects of couple stresses in linear elasticity*, Arch. Mech. Anal., **11**, 385, 1962.
6. W. GÜNTHER, *Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuum*, Abh. Braunschweig. Wiss. Ges., **10**, 85, 1958.
7. H. SCHAEFER, *Versuch einer Elastisitätstheorie des zweidimensionalen Cosserat-Kontinuum*, Misz. Angew. Math. Festschrift Tollmien, Akademie Verlag, Berlin 1962.
8. H. NEUBER, *On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat-continua*, Int. Kongres IUTAM, München 1964.
9. E. V. KUVSHINSKII and A. L. AERO, *Kontynualna teoria niesymetrycznej sprężystości* [w języku rosyjskim], Fizika Tverdogo Tela, **5**, 1963.
10. N. A. PALMOV, *Podstawowe równania teorii niesymetrycznej sprężystości* [w języku rosyjskim], Prikl. Mat. Mech., **28**, 401, 1964.
11. A. C. ERINGEN and E. S. SUHUBI, *Nonlinear theory of simple micro-elastic solids*, Int. J. Engng. Sci., I—**2**, 2, 189 1964; II—**2**, 4, 389, 1964.
12. R. STOJANOVIĆ, *Mechanics of polar continua*, Udine 1970.
13. W. NOWACKI, *Theory of micropolar elasticity*, J. Springer, Wien 1970.
14. W. NOWACKI, *Propagation of rotation waves in asymmetric elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série. Sci. Techn., **16**, 10, 493, 1968.
15. J. IGNACZAK, *Radiation conditions of Sommerfeld type for elastic materials with microstructure*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série. Sci. Techn., **17**, 6, 251, 1970.

16. W. Nowacki and W. K. Nowacki, *The generation of waves in an infinite micropolar elastic solid*, Proc. Vibr. Probl., **10**, 2, 170, 1969.

17. W. Nowacki, *On the completeness of potentials in micropolar elasticity*, Arch. Mech. Stos., **21**, 2, 107, 1969.

18. B. Galerkin, *Contributions a la solution générale du problème de la théorie de l'élasticité dans le cas de trois dimensions*, C.R. Acad. Sci., 190, 1047, Paris 1970.

19. M. Iacovache, *O extindere a metodei lui Galerkin pentru sistemul ecuatilor elasticitatii*, Bull. Stiint. Acad. Rep. Pop. Romane, Ser. A **1**, 593, 1949.

20. N. Sandru, *On some problems of the linear theory of asymmetric elasticity*, Int. J. Engng. Sci., **4**, 1, 81, 1966.

21. J. Stefaniak, *Generalization of Galerkin's functions for asymmetric thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **16**, 8, 391, 1968.

22. Z. Olesiak, *Stress differential equations of the micropolar elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **18**, 5, 172, 1970.

23. A. C. Eringen, *Theory of micropolar elasticity*, Fracture, Academic Press, **2**, New York 1968.

24. A. C. Smith, *Waves in micropolar elastic solid*, Int. J. Engng. Sci., **10**, 5, 741, 1967.

25. V. R. Parfitt and A. C. Eringen, *Reflection of plane waves from the flat boundary of a micropolar elastic halfspace*, Report No. 8 – 3, General Technology Corporation, 1966.

26. J. Stefaniak, *Reflection of a plane longitudinal wave from a free plane in a Cosserat medium*, Arch. Mech. Stos., **21**, 6, 745, 1969.

27. S. Kaliski, J. Kapelewski and C. Rymarz, *Surface waves on an optical branch in a continuum with rotational degrees of freedom*, Proc. Vibr. Probl., **9**, 2, 108, 1968.

28. W. Nowacki and W. K. Nowacki, *Propagation of monochromatic waves in an infinite micropolar elastic plate*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **17**, 1, 29, 1969.

29. W. Nowacki and W. K. Nowacki, *The plane Lamb problem in a semi-infinite micropolar elatic body*, Arch. Mech. Stos., **21**, 3, 241, 1969.

30. G. Eason, *Wave propagation in a material with microstructure*, Proc. Vibr. Probl., **12**, 4, 363, 1971.

31. G. Eason, *The displacement produced in a semi-infinite linear Cosserat continuum by an impulsive force*, Proc. Vibr. Probl., **11**, 2, 199, 1970.

32. J. D. Achenbach, *Free vibrations of a layer of micropolar continuum*, Int. J. Engng. Sci., **10**, 7, 1025, 1969.

33. W. Nowacki and W. K. Nowacki, *Propagation of elastic waves in a micropolar cylinder*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., I — **17**, 1, 39, 1969; II — **17**, 1, 48, 1969.

34. W. Nowacki and W. K. Nowacki, *The axially symmetric Lambs problem in a semi-infinite micropolar elastic solid*, Proc. Vibr. Probl., **10**, 2, 97, 1969.

35. D. Ieşan, *On the linear theory of micropolar elasticity*, Int. J. Ingng. Sci., **7**, 1213, 1969.

36. O. Graffi, *Sui teoremi di reciprocita nei fenomeni non stazionari*, Atti. Accad. Sci. Bolonga, **10**, 2, 1963.

37. H. Schaefer, *Das Cosserat-Kontinuum*, ZAMM, **47**, 8, 485, 1967.

38. H. Neuber, *Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper*, Acta Mechanika, **2**, 1, 48, 1966.

39. H. Neuber, *Die schubbeanspruchte Kerbe im Cosserat-Körper*, ZAMM, **47**, 5, 313, 1967.

40. H. Neuber, *On the effects of stress concentration in Cosserat continuum*, IUTAM-Symposium, 1967, Freudenstadt-Stuttgart, Mechanics of Generalized Continua, 109, 1968.

41. S. C. Cowin, *Stress functions for elasticity*, Int. J. Solids structures, **6**, 389, 1970.

42. H. Schaefer, *Die Spannungsfunktionen eines Kontinuum mit Momentenspannungen*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., I—**15**, 1, 63, 1967; II—**15**, 1, 485, 1967.

43. R. D. Mindlin, *Influence of couple-stresses on stress-concentrations*, Exper. Mech., **3**, 1, 1, 1963.
44. G. N. Savin, *Podstawy naprężeń momentowych w sprężystości* [w języku ukraińskim], Kijów 1965.
45. G. N. Savin, *Koncentracja naprężeń w otoczeniu otworów* [w języku rosyjskim], Kijów 1966.
46. G. N. Savin and J. N. Nemish, *Koncentracja naprężeń w momentowej teorii sprężystości* [języku rosyjskim], Prikł. Mech., **4**, 12, 1, 1968.
47. D. E. Carlson, *Stress functions for plane problems with couple-stresses*, ZAMP, **17**, 6, 789, 1966.
48. R. D. Mindlin, *Representation of displacements and stresses in plane strain with couple stresses*, IUTAM-Symposium, 1963, Tbilisi, 256, 1964.
49. R. Muki and E. Sternberg, *The influence of couple-stresses on singular stress concentrations in elastic solids*, ZAMP, **16**, 5, 611, 1965.
50. P. N. Kaloni and T. Ariman, *Stress concentration effects in micropolar elasticity*, ZAMP, **18**, 1, 136, 1967.
51. S. Kessel, *Die Spannungsfunktionen des Cosserat-Kontinuum*, ZAMM, **47**, 5, 329, 1967.
52. W. Nowacki, *Plane problems of micropolar elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **19**, 6, 237, 1971.
53. W. Nowacki, *The «second» plane problem of micropolar elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **18**, 11, 525, 1970.
54. M. Suchar, *Stress function in the «second» plane problem of micropolar elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **20** (w druku).
55. W. Nowacki, *Generalized Love's function in micropolar elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **17**, 4, 247, 1969.
56. W. Nowacki, *Axial symmetric problem in micropolar elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **19**, 7/8, 317, 1971.
57. J. Stefaniak, *Solving function for axi-symmetric problem in the Cosserat medium*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **18**, 9, 387, 1970.
58. M. Hlaváček, *The first boundary-value problem of elasticity theory with couple stresses I. Cosserat continuum*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **18**, 2, 75, 1970.
59. D. Ieşan, *Existence theorems in micropolar elastostatics*, Int. J. Engng. Sci., **9**, 59, 1971.
60. W. D. Claus and A. C. Eringen, *Three dislocation concepts and micromorphic mechanics*, Developments in Mechanics, **6**, Proc. 12th Midw. Mech. Conf.
61. S. Minagawa, *On the force exerted upon continuously distributed dislocations in a Cosserat continuum*, Phys. Stat. Sol., **39**, 217, 1970.
62. S. Kessel, *Lineare Elastisitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums*, Abh. der Branschw. Wiss. Gesellschaft, **16**, 1, 1964.
63. D. Ieşan, *Thermal stresses in the generalized plane strain of anisotropic elastic solids*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **18**, 6, 227, 1970.

Резюме

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ УПРУГОСТИ

Работа состоит из двух частей. В первой части обсуждаются проблемы эластокинетики, во второй — эластостатики. В обоих этих частях существенную роль играют упригие потенциалы и функции напряжений типа Галеркина. Более обширно обсуждены самые простые, двумерные проблемы касающиеся плоского деформационного состояния и осесимметричного наряженного состояния. По отношению к эластостатике указана роль какую играет теорема Г. Щефера о сложении решений.

Summary

THEORY OF LINEAR MICROPOLAR ELASTICITY

The paper consists of two parts, the first part dealing wit helastokinetics, the second one—with elastostatics. In both parts an important role is played by elastic potentials and stress functions of the Galerkin type. Extensive discussion concerns the most simple, two-dimensional problems of plane strain and axisymmetric stress. In the section dealing with elastostatics, the role of the theorem by H. Schaefer in superposing the solutions is demonstrated.

UNIWERSYTET WARSZAWSKI
INSTYTUT MECHANIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 sierpnia 1972 r.