

ODDZIAŁYWANIE PŁASKIEJ FALI ŚCINANIA NA SZCZELINĘ GRIFFITHA

ZDZISŁAW I W A N O W (WARSZAWA)

Korzystając z teorii defektów [1] otrzymano rozwiązanie stacjonarne problemu szczeliny w polu naprężeń fali poprzecznej. Metoda zastosowana do stanu antypłaskiego przenosi się w całości na odpowiednie zagadnienia płaskie, a również pozwala, ewentualnie z wykorzystaniem obliczeń numerycznych, rozpatrywać inne zmienne w czasie pola naprężeń zewnętrznych. Otrzymane rozwiązanie podlega ograniczeniom wynikającym z zastosowania potencjałów natychmiastowych.

WSTĘP

W pracy rozpatrzono oddziaływanie płaskiej fali poprzecznej na szczelinę Griffitha w nieograniczonym jednorodnym ośrodku sprężystym. Fala pada prostopadle do powierzchni szczeliny i jest spolaryzowana równoległe do jej brzegów (stan antypłaski). Dla przypadku ustalonych drgań szczeliny w polu naprężeń takiej fali otrzymano wzory dla funkcji rozwarcia szczeliny (z nieciągłością przemieszczeń na jej powierzchni), pola przemieszczeń i naprężeń pochodzących od szczeliny w postaci szeregu przybliżeń dynamicznych, do rozwiązania quasi-statycznego. Zakres stosowalności otrzymanego rozwiązania określa nierówność $\lambda a < 1$, gdzie a oznacza pół długości szczeliny, λ liczbę falową.

Rozwiązanie postawionego zadania uzyskano na podstawie ogólnego założenia teorii defektów [1], wykorzystując przedstawienie tensora Greena w postaci szeregu potencjałów natychmiastowych.

Istnieje rozwiązanie przybliżone zagadnienia [14] przy wykorzystaniu układów dualnych równań całkowych. Przybliżenie polega na stosowaniu we wzorach dla transformat rozkładu pewnych funkcji w szereg Laurenta dla dużych wartości parametru i pominięciu wszystkich wyrazów poza pierwszym. Rozwiązanie otrzymanych równań całkowych oraz odwracanie transformat wykonywane jest numerycznie.

Pełne rozwiązanie analityczne [13] problemu szczeliny (dopuszczające jej ruch) w polu naprężeń zewnętrznych zmiennych w czasie jest trudne do wykorzystania praktycznego. Powodem tego jest fakt, że rozwiązanie przedstawione jest w postaci całki wielokrotnej, której wielokrotność rośnie wraz z czasem.

Przedstawiona metoda rozwiązania zagadnienia w przypadku antypłaskim przenosi się w całości na pozostałe dwa możliwe przypadki płaskie. Otrzymane zależności pozwalają również rozpatrywać pola naprężeń zewnętrznych, dowolnie zmiennych w czasie.

Przyjęcie pola naprężeń zewnętrznych w postaci fali płaskiej może znaleźć praktyczne uzasadnienie. Realne konstrukcje częstokroć poddawane są oscylującym obciążeniom będącym źródłem zaburzeń o charakterze falowym. Okazuje się, że pojawienie się szczeliny prowadzi do koncentracji naprężeń znacznie większych niż w przypadku obciążeń statycznych.

1. RÓWNANIA RÓWNOWAGI SZCELINY; STAN ANTYPŁASKI W OŚRODKU NIEOGRANICZONYM IZOTROPOWYM

Pole przemieszczeń dla szczeliny w zmiennym w czasie polu naprężeń zewnętrznych konstruujemy korzystając z właściwości dynamicznego potencjału warstwy podwójnej [1]:

$$(1.1) \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_S d\sigma_{(n)} \mathbf{G}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\zeta}, t - \tau) \mathbf{U}(\boldsymbol{\zeta}, \tau),$$

gdzie

$$(1.2) \quad S = \{(x_1, x_2, x_3) : |x_1| \leq a, x_2 = 0, -\infty < x_3 < \infty, a = \text{const}, a > 0\}$$

oraz

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{(n)nr} &= n_b c_{nbrs} \nabla_s, & \nabla_s &= \frac{\partial}{\partial x_s}, \\ c_{nbrs} &= \lambda \delta_{nb} \delta_{rs} + \mu (\delta_{ns} \gamma_{br} + \delta_{nr} \delta_{bs}), \\ (\check{\sigma}_{(n)} \mathbf{G}\mathbf{U})_l &= n_b c_{nbrs} \nabla_s G_{lr} U_n, \\ \mathbf{n} &= [0, 1, 0], & \mathbf{k} &= [0, 0, 1] \end{aligned}$$

oraz gdzie \mathbf{G} oznacza tensor Greena równania Lamégo, λ , μ stałe materiałowe.

$\mathbf{U}(\boldsymbol{\zeta}, \tau)$ funkcję określoną na powierzchni S , ciągłą wraz z pierwszymi pochodnymi w punktach wewnętrznych S .

Korzystając [1] z właściwości potencjału warstwy podwójnej otrzymujemy dla nieciągłości pola przemieszczeń, określonego zależnością (1.1), oraz dla wynikającego stąd pola naprężeń na powierzchni S następujące wartości:

$$(1.4) \quad [\mathbf{u}] = \mathbf{U}, \quad [\sigma_{(n)} \mathbf{u}] = 0.$$

Funkcja \mathbf{u} odpowiada więc polu przemieszczeń pochodzącemu od szczeliny o rozwarciu \mathbf{U} .

Uwzględniając charakter rozpatrywanego zadania przyjmujemy

$$(1.5) \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{k},$$

gdzie

$$\begin{aligned} U &= U(\zeta, t), \quad \zeta \in [-a, a], \quad t \in (-\infty, \infty), \\ U(-a, t) &\equiv U(a, t) \equiv 0. \end{aligned}$$

Wprowadźmy wektor naprężeń

$$(1.6) \quad t_i = \sigma_{ik} n_k,$$

gdzie $\sigma_{ik} = c_{iklm} \nabla_l u_m$. Z (1.1) wykorzystując równanie Lamégo oraz całkując przez części otrzymujemy:

$$(1.7) \quad t_i = t_i^{\text{reg}} + \mu \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_S ds k_r U \delta(t-\tau) \delta_3(\mathbf{x}-\zeta),$$

gdzie

$$(1.8) \quad t_i^{\text{reg}} = \mu \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_S ds k_r U_{,k} c_{iklm} \nabla_l G_{mr} - \mu \rho \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_S ds k_r U \frac{\partial^2 G_{ir}}{\partial t^2}.$$

Wektor t jest ciągły na powierzchni S (z (1.4)), natomiast składowa zawierająca δ funkcje przy przejściu do punktu $\mathbf{x} \in S$ przez punkty nie leżące na S daje graniczną wartość równą 0.

Dla granicznego naprężenia własnego szczeliny na jej powierzchni otrzymujemy

$$(1.9) \quad \bar{t}_i = \lim_{\substack{x_2 \rightarrow 0 \\ x_2 \neq 0 \\ |x_1| \leq a}} t_i = \lim_{\substack{x_2 \rightarrow 0 \\ |x_2| \neq 0 \\ |x_1| \leq a}} t_i^{\text{reg}}.$$

Uwzględniając właściwości trójwymiarowego tensora Greena oraz postać powierzchni S , otrzymujemy

$$\bar{t}_1 \equiv \bar{t}_2 \equiv 0,$$

$$(1.10) \quad \bar{t}_3 = \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-a}^a d\zeta_1 \frac{\partial U(\zeta_1, \tau)}{\partial \zeta_1} \nabla_1 \bar{G}_{33}(x_1 - \zeta_1, 0, t - \tau) - \\ - \mu \rho \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-a}^a d\zeta_1 U(\zeta_1, \tau) \frac{\partial^2 \bar{G}_{33}(x_1 - \zeta_1, 0, t - \tau)}{\partial t^2},$$

gdzie \bar{G}_{33} spełnia równanie

$$(1.11) \quad A_{(2)} \bar{G}_{33} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{G}_{33} = -\frac{1}{\mu} \delta(t) \delta(x_1) \delta(x_2), \\ A_{(2)} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad c_2^2 = \mu \rho^{-1}.$$

Oznaczmy przez σ_{ij}^z zewnętrzne pole naprężeń, pod działaniem którego znajduje się szczelina oraz przez \bar{t}_i wartość graniczną zewnętrznego pola naprężeń na powierzchni szczeliny ($\lim_{x \rightarrow x_1 \in S} \sigma_{ij}^z n_j$).

Równanie równowagi szczeliny otrzymane przy założeniu, że powierzchnia szczeliny jest wolna od naprężeń, przyjmuje postać

$$(1.12) \quad \bar{t}_3 = -\bar{t}_3.$$

2. ROZWIĄZANIE RÓWNOWAGI SZCZELINY

Funkcja rozwarcia szczeliny, będącej w równowadze w danym zewnętrznym polu naprężeń, spełnia równanie (1.12). Jeżeli wyznaczyć stąd funkcję U , a następnie określić z zależności (1.1) pole przemieszczeń u , to spełnia ono równanie Lamégo oraz posiada na powierzchni szczeliny nieciągłość równą U (jako potencjał warstwy podwójnej). Stosując powyższe postępowanie otrzymujemy więc rozwiązanie zagadnienia szczeliny znajdującej się w równowadze w danym, zmiennym w czasie, polu naprężeń zewnętrznych.

Równanie (1.12) jest zbyt skomplikowane, aby otrzymać w sposób bezpośredni jego rozwiązanie. Dlatego wykorzystane zostanie przedstawienie \bar{G}_{33} jako rozwiązania równania (1.11) w postaci szeregu potencjałów natychmiastowych. Otrzymamy w ten sposób pewne rozwiązanie szczególne równania równowagi, tj. rozwiązanie odpowiadające równowadze w polu zewnętrznym, nie uwzględniające jednak w ogólnym przypadku wpływu warunków początkowych. Stosowalność rozwiązania podlegać będzie ogólnym [1] ograniczeniom wynikającym z metody potencjałów natychmiastowych. Metoda ta prowadzi w przypadku rozpatrywanej fali płaskiej do ograniczenia λa , a rozwiązanie będzie miało zastosowanie w pewnym otoczeniu szczeliny.

Rozwiązanie równania (1.11) przyjmujemy w postaci

$$(2.1) \quad \bar{G}_{33} = \frac{1}{2\pi\mu} \sum_{n=0}^{\infty} c_2^{-2n} \delta^{(2n)}(t) \frac{r^{2n}}{4^n (n!)^2} \left[\ln \frac{a}{r} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right],$$

$$r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}.$$

Postać taką można otrzymać stosując do równania (1.11) metodę operatorową polegającą na formalnym rozwinięciu operatora \square^{-1} w szereg lub wykorzystując formalne postępowanie stosowane w elektrodynamice [3].

Rozwiązania równania równowagi (1.12) poszukujemy w postaci (dostosowanej do \bar{G}_{33})

$$(2.2) \quad U(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_2^{-2i} \overset{i}{U}(x, t)$$

z warunkiem

$$\overset{i}{U}(-a, t) \equiv \overset{i}{U}(a, t) \equiv 0.$$

Ze wzoru (1.12), wykorzystując (2.1) i (2.2), przyrównując do siebie współczynniki przy odpowiednich potęgach c_2 oraz wykonując całkowanie względem t , otrzymujemy dla elementów $\overset{i}{U}$ następujący układ równań całkowych:

$$(2.3) \quad \int_{-a}^a d\zeta \left[\frac{\partial \overset{n}{U}(\zeta, t)}{\partial \zeta} \frac{\partial \overset{n}{G}(x_1 - \zeta, 0)}{\partial x_1} \right] = -\frac{1}{2\mu} \overset{n}{f}(x_1, t), \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

gdzie

$$\overset{\circ}{f}(x_1, t) = \frac{2}{\mu} \overset{\circ}{t}_3(x_1, t),$$

$$(2.4) \quad \overset{n}{f}(x_1, t) = 2\mu \int_{-a}^a d\zeta \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial^{2(n-i)}}{\partial t^{2(n-i)}} \frac{\partial U(\zeta, t)}{\partial \zeta} \frac{\partial^{n-i} G(x_1 - \zeta, 0)}{\partial x_1} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial^{2(n-i)} U(\zeta, t)}{\partial t^{2(n-i)}} G^{n-i-1}(x_1 - \zeta, 0) \right],$$

$$(2.5) \quad G = \frac{1}{2\pi\mu 4^k (k!)^2} r^{2k} \left[\ln \frac{a}{r} + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \right].$$

Rozwiązanie układu (2.3) uwzględniające warunek (2.2)₂ oraz zapewniające [6, 7 i 8] koncentrację naprężeń w wierzchołkach szczeliny otrzymujemy w postaci

$$(2.6) \quad \overset{n}{U}(x_1, t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{x_1} dx \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a d\zeta \frac{\sqrt{a^2 - \zeta^2} \overset{n}{f}(\zeta, t)}{x - \zeta}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

3. SZCZELINA W POLU NAPRĘŻEŃ FALI POPRZECZNEJ

Na podstawie otrzymanych w p. 2 zależności rozpatrzone zostanie oddziaływanie na szczelinę poprzecznej fali płaskiej, padającej normalnie do powierzchni szczeliny i spolaryzowanej równoległe do x_3 . Pole naprężeń takiej fali wyraża się w następujący sposób:

$$(3.1) \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = T \sin \omega \left(t + \frac{x_2}{c_2} \right),$$

gdzie $T = \text{const}$.

4. NIECIĄGŁOŚĆ PRZEMIESZCZEŃ NA POWIERZCHNI SZCZELINY

Funkcję nieciągłości przemieszczeń na powierzchni szczeliny otrzymujemy z (2.2) wyznaczając $\overset{n}{U}$ ze wzorów (2.6) i (2.4), w których dla rozpatrywanego przypadku

$$(4.1) \quad \overset{\circ}{t}_3 = T \sin \omega t.$$

Można wykazać, że dla wyrazów $\overset{k}{U}$ otrzymujemy następujące wzory:

$$(4.2) \quad \overset{k}{U} = \frac{2T \sin(\omega t) \omega^{2k}}{\mu} \sum_{i=0}^k (\alpha_i a^{2(k-i)} x_1^{2i}) \sqrt{a^2 - x_1^2}, \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

gdzie α_i oznaczają współczynniki liczbowe ((4.3) i dalej) niezależne od a i t .

Dla wyznaczania współczynników α_i^k otrzymujemy następujący wzór rekurencyjny:

$$(4.3) \quad \dot{U}(x_1, t) = \frac{2T \sin(\omega t)}{\mu} \sqrt{a^2 - x_1^2}$$

oraz

$$(4.4) \quad U^n(x_1, t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{x_1} dx \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a d\zeta \frac{\sqrt{a^2 - \zeta^2} f(\zeta, t)}{x - \zeta}, \quad n=1, 2, 3, \dots,$$

gdzie

$$(4.5) \quad f^n(x_1, t) = \frac{T \sin(\omega t) \omega^{2n}}{\pi \mu} \int_{-a}^a d\zeta \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i} \times \right. \\ \times \sum_{j=0}^i (\alpha_j a^{2(i-j+1)} 2^j \zeta^{2j-1} - \alpha_j a^{2(i-j)} (2j+1) \zeta^{2j+1}) \frac{1}{\sqrt{a^2 - \zeta^2}} \times \\ \times \frac{(x_1 - \zeta)^{2(n-i)-1}}{4^{n-i} ((n-i)!)^2} \left(2(n-i) \ln \frac{a}{|x_1 - \zeta|} + 2(n-i) \sum_{k=1}^{n-i} \left(\frac{1}{k} \right) - 1 \right) - \\ - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i} \sum_{j=0}^i \alpha_j a^{2(i-j)} \zeta^{2j} \sqrt{a^2 - \zeta^2} \times \\ \times \left. \frac{(x_1 - \zeta)^{2(n-i-1)}}{4^{n-i-1} ((n-i-1)!)^2} \left(\ln \frac{a}{|x_1 - \zeta|} + \sum_{k=1}^{n-i-1} \frac{1}{k} \right) \right\}.$$

Całki występujące we wzorach (4.4) i (4.5) wyrażają się dla $x_1 \in [-a, a]$ w następujący sposób:

$$(4.6)^{(1)} \quad \int_{-a}^a d\zeta \frac{\zeta^m}{\sqrt{a^2 - \zeta^2}} \ln \frac{|x_1 - \zeta|}{a} = a^m \int_{-1}^1 d\alpha \frac{\alpha^m}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \ln \left| \frac{x_1}{a} - \alpha \right|, \\ \int_{-1}^1 d\alpha \frac{\alpha^{2j}}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \ln \left| \frac{x_1}{a} - \alpha \right| = \pi \prod_{r=1}^j \frac{2r-1}{2r} \left\{ \sum_{i=1}^j \frac{1}{2i} \prod_{r=1}^i \frac{2r}{2r-1} \times \right. \\ \times \sum_{z=0}^{i-1} \left[\left(\frac{x_1}{a} \right)^{2(i-1-z)} - \left(\frac{x_1}{a} \right)^{2(i-z)} \right] \frac{(2z-1)!!}{(2z)!!} - \ln(2) - \sum_{i=1}^j \frac{1}{2i} \right\}, \\ j=0, 1, 2, \dots,$$

$$\int_{-1}^1 d\alpha \frac{\alpha^{2j+1}}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \ln \left| \frac{x_1}{a} - \alpha \right| = \pi \prod_{r=1}^j \frac{2r}{2r+1} \left\{ \sum_{i=1}^j \frac{1}{2i+1} \prod_{r=1}^i \frac{2r+1}{2r} \times \right.$$

⁽¹⁾ $(-1)!!=1$, $0!!=1$, $\sum_{i>2}^i = 0$, $\prod_{i+1}^i = 1$.

$$\begin{aligned}
 & \times \sum_{z=0}^{l-1} \left[\left(\frac{x_1}{a} \right)^{2(l-z)-1} - \left(\frac{x_1}{a} \right)^{2(l-z)+1} \right] \frac{(2z-1)!!}{(2z)!!} - \\
 & - \frac{x_1}{a} \sum_{l=0}^j \frac{1}{(2l+1)^2} \left(\prod_{r=1}^l \frac{2r+1}{2r} \right)^2, \quad j=0, 1, 2, \dots, \\
 & \int_{-a}^a d\zeta \zeta^m \sqrt{a^2 - \zeta^2} \ln \frac{|x_1 - \zeta|}{a} = a^2 \int_{-a}^a d\zeta \frac{\zeta^m}{\sqrt{a^2 - \zeta^2}} \ln \frac{|x_1 - \zeta|}{a} - \\
 & - \int_{-1}^a d\zeta \frac{\zeta^{m+2}}{\sqrt{a^2 - \zeta^2}} \ln \frac{|x_1 - \zeta|}{a}, \\
 & \int_{-a}^a d\zeta \frac{\zeta^m}{\sqrt{a^2 - \zeta^2}} = a^m \frac{\pi}{2} [1 + (-1)^m] \frac{(m-1)!!}{m!!}, \quad m=0, 1, 2, \dots, \\
 & \int_{-a}^a d\zeta \zeta^m \sqrt{a^2 - \zeta^2} = a^2 \int_{-a}^a d\zeta \frac{\zeta^m}{\sqrt{a^2 - \zeta^2}} - \int_{-a}^a d\zeta \frac{\zeta^{m+2}}{\sqrt{a^2 - \zeta^2}}, \\
 & \int_{-a}^a d\zeta \sqrt{a^2 - \zeta^2} \frac{\zeta^{2j}}{x_1 - \zeta} = -\pi \sum_{z=0}^{j-1} x_1^{2(j-z)+1} a^{2(z+1)} \frac{(2z-1)!!}{(2z)!!} + \\
 & + \pi \sum_{z=0}^j x_1^{2(j-z)+1} a^{2z} \frac{(2z-1)!!}{(2z)!!}, \quad j=0, 1, 2, \dots, \\
 & \int_{-a}^{x_1} d\zeta \frac{\zeta^{2j+1}}{\sqrt{a^2 - \zeta^2}} = -\sqrt{a^2 - x_1^2} \sum_{l=0}^j x_1^{2l} a^{2(j-l)} \frac{1}{2l+1} \times \\
 & \times \prod_{k=l+1}^j \frac{2k}{2k+1}, \quad j=0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

Współczynniki α_i^n otrzymujemy rekurencyjnie podstawiając (4.5) do (4.4), wykonując całkowanie z wykorzystaniem (4.6) i następnie grupując wyrazy względem potęg x_1 .

5. POLE PRZEMIESZCZEŃ I NAPRĘŻEŃ POCODZĄCYCH OD SZCZELINY

Ze wzorów (1.1) (1.2) otrzymujemy dla pola przemieszczeń pochodzących od szczeliny wzór

$$u_i = -\mu \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_s ds U (\nabla_2 G_{i3} + \nabla_3 G_{i2}).
 \tag{5.1}$$

Z (5.1), uwzględniając właściwości tensora Greena (asymetria postaci $x_3 - \zeta_3$ składowych G_{i3} oraz $\nabla_3 G_{i2}$ ($i=1, 2$) i znikanie w ∞) oraz kształt powierzchni S , otrzymujemy

$$(5.2) \quad u_1 \equiv u_2 \equiv 0,$$

$$(5.3) \quad u_3 = -\mu \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-a}^a d\zeta_1 U(\zeta_1, \tau) \nabla_2 \bar{G}_{33}(x_1 - \zeta_1, x_2, t - \tau).$$

Korzystając z przedstawienia \bar{G}_{33} w postaci (2.1) oraz funkcji nieciągłości przemieszczeń U w postaci (2.2), otrzymujemy

$$(5.4) \quad u_3 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n,$$

gdzie

$$(5.5) \quad u_n = -\mu c_2^{-2n} \sum_{i=0}^n \int_{-a}^a d\zeta \left[\frac{\partial^{2(n-i)}}{\partial t^{2(n-i)}} U(\zeta, t) \nabla_2 G^{n-i}(x_1 - \zeta, x_2) \right].$$

Stąd oraz z (4.2) znajdziemy

$$(5.6) \quad u_n = -\frac{T \sin(\omega t) \omega^{2n}}{\pi \mu c_2^{2n}} x^2 \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \frac{(-1)^{n-i} \alpha_k a^{2(i-k)}}{4^{n-i} ((n-i)!)^2} \int_{-a}^a d\zeta \zeta^{2k} \sqrt{a^2 - \zeta^2} \times \\ \times \left[\left(2(n-i) \ln \frac{a}{\sqrt{(x_1 - \zeta)^2 + x_2^2}} + 2(n-i) \sum_{r=1}^{n-i} \left(\frac{1}{r} \right) - 1 \right) ((x_1 - \zeta)^2 + x_2^2)^{n-i-1} \right].$$

Wzory dla całek występujących w (5.6) mają następującą postać. Całki typu $\int_{-a}^a d\zeta \zeta^m \sqrt{a^2 - \zeta^2}$ określają wzory (4.10) i (4.11). Korzystając z reguł całkowania w dziedzinie zmiennej zespolonej, wyznaczamy następujące całki:

$$(5.7) \quad \int_{-a}^a d\zeta \frac{\sqrt{a^2 - \zeta^2}}{(x_1 - \zeta)^2 + x_2^2} = -\pi \left\{ \frac{1}{|x_2|} \sqrt[4]{(a^2 - x_1^2 + x_2^2)^2 + 4x_1^2 x_2^2} \times \right. \\ \left. \times \cos \left(\frac{\arg((a^2 - x_1^2 + x_2^2) - 2i|x_1 x_2|)}{2} \right) + 1 \right\},$$

$$(5.8) \quad \int_{-a}^a d\zeta \frac{\zeta \sqrt{a^2 - \zeta^2}}{(|x_1| - \zeta)^2 + x_2^2} = -\pi \left\{ \frac{1}{|x_2|} \sqrt[4]{(a^2 - x_1^2 + x_2^2)^2 + 4x_1^2 x_2^2} \times \right. \\ \left. \times \left[|x_1| \cos \left(\frac{\arg((a^2 - x_1^2 + x_2^2) - 2i|x_1 x_2|)}{2} \right) - |x_2| \sin \left(\frac{\arg(a^2 - x_1^2 + x_2^2 - 2i|x_1 x_2|)}{2} \right) \right] + 2|x_1| \right\}.$$

Niech

$$(5.9) \quad f_m = \int_{-a}^a d\zeta \frac{\zeta^m \sqrt{a^2 - \zeta^2}}{(|x_1| - \zeta)^2 + x_2^2}.$$

Dla f_m otrzymujemy zależność rekurencyjną

$$(5.10) \quad f_m = 2|x_1| f_{m-1} - (x_1^2 + x_2^2) f_{m-2} + a^m \frac{\pi}{2} [1 + (-1)^m] \frac{(m-3)!!}{m!!}.$$

Wyrazy f_0, f_1 są określone za pomocą wzorów (5.7) i (5.8).

Niech

$$(5.11) \quad h_m = \int_{-a}^a d\zeta \zeta^m \sqrt{a^2 - \zeta^2} \ln \left[\frac{(x_1 - \zeta)^2 + x_2^2}{a^2} \right]$$

oraz

$$(5.12) \quad g_m := \int_{-a}^a d\zeta (a^2 - \zeta^2) (x_1 - \zeta) \zeta^{m-1} \sqrt{a^2 - \zeta^2} \frac{1}{(x_1 - \zeta)^2 + x_2^2}.$$

Prawdziwy jest następujący wzór rekurencyjny:

$$(5.13) \quad h_m = \frac{m-1}{m+2} h_{m-2} - \frac{2}{m+2} g_m.$$

Wyrazy wolne wyznaczamy korzystając ze wzoru (5.10). Natomiast pierwsze wyrazy wzoru rekurencyjnego odpowiednio dla m nieparzystych i parzystych wyznaczamy ze wzoru

$$(5.14) \quad \int_{-a}^a d\zeta \zeta \sqrt{a^2 - \zeta^2} \ln \left[\frac{(x_1 - \zeta)^2 + x_2^2}{a^2} \right] = -\frac{2}{3} \int_{-a}^a d\zeta \frac{(a^2 - \zeta^2) (x_1 - \zeta) \sqrt{a^2 - \zeta^2}}{(x_1 - \zeta)^2 + x_2^2}.$$

Całkę (5.14) wyznaczamy korzystając z (5.10).

Całka

$$(5.15) \quad \int_{-a}^a d\zeta \sqrt{a^2 - \zeta^2} \ln \left[\frac{(x_1 - \zeta)^2 + x_2^2}{a^2} \right]$$

pozostaje do obliczenia metodami numerycznymi.

Ze wzoru

$$\sigma_{ik} = c_{iklm} \nabla_l u_m$$

otrzymujemy dla tensora naprężeń:

$$(5.16) \quad \sigma_{ij} = 0 \quad \text{dla} \quad (i, j) \neq (1, 3), (2, 3),$$

$$\sigma_{i3} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{i3}^n \quad \text{dla} \quad i=1, 2,$$

gdzie $\sigma_{i3}^n = \mu \nabla_i u_n$.

6. WSPÓLCZYNNIK INTENSYWNOŚCI NAPRĘŻEŃ

Dla naprężeń na przedłużeniu szczeliny otrzymujemy z (5.6) i (5.16)

$$(6.1) \quad \sigma_{13}(x_1, 0, t) = 0, \quad \sigma_{23} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{23}^n,$$

$$(6.2) \quad \sigma_{23}^n(x_1, 0, t) = -\frac{T \sin(\omega t) \omega^{2n}}{\pi c_2^{2n}} \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \frac{(-1)^{n-i} \alpha_k^i a^{2(t-k)}}{4^{n-i} ((n-i)!)^2} \times \\ \times \int_{a-}^a d\zeta \zeta^{2k} \sqrt{a^2 - \zeta^2} \left[-2(n-i) \ln \frac{|x_1 - \zeta|}{a} + 2(n-i) \sum_{r=1}^{n-i} \left(\frac{1}{r} \right) - 1 \right] (x_1 - \zeta)^{2(n-i-1)}.$$

Wartości występujących w (6.2) całek dla $|x_1| > a$ można wyznaczyć podobnie jak to zrobiono dla $|x_1| < a$.

Z określenia współczynnika intensywności naprężeń mamy

$$(6.3) \quad K = \lim_{x_1 \rightarrow a+} \sqrt{2(x_1 - a)} \sigma_{23}(x_1, 0, t).$$

Wartość K w obu wierzchołkach szczeliny w rozpatrywanym przypadku jest taka sama.

Z (6.2) i (6.3) otrzymujemy

$$(6.4) \quad K = \sum_{n=0}^{\infty} k_n,$$

gdzie

$$k_n = \lim_{x_1 \rightarrow a+} \sqrt{2(x_1 - a)} \sigma_{23}^n(x_1, 0, t).$$

Stąd oraz z (6.2) znajdziemy

$$(6.5) \quad k_n = \frac{T \sin(\omega t) \omega^{2n} a^{2n} \sqrt{a}}{c_2^{2n}} \sum_{k=0}^n \alpha_k.$$

7. OBLICZENIA NUMERYCZNE

Ze wzorów rekurencyjnych (4.3) – (4.13) znaleziono wartości współczynników α_i^n dla $n=0, \dots, 9$. Wyniki przedstawione są w tablicy 1. Wyznaczono następnie wielomiany:

$$(7.1) \quad W_n(l_1) = \sum_{i=0}^n \alpha_i l_1^{2i}$$

oraz

$$F_n(l_1) = W_n(l_1) \sqrt{1 - l_1^2}, \quad \bar{V}(l_1, \Lambda a) = \sum_{n=0}^9 (\Lambda a)^{2n} F_n(l_1), \\ \bar{u}(\gamma_1, \gamma_2, \Lambda a) = \frac{1}{aT} \sum_{n=0}^9 \frac{u(\gamma_1, \gamma_2)}{\sin(\omega t)}, \quad k_n = \sum_{i=0}^n \alpha_i, \quad \bar{K}(\Lambda a) = \sum_{n=0}^9 (\Lambda a)^{2n} \bar{k}_n,$$

gdzie

$$A = \frac{\omega}{c_2}, \quad \gamma_i = \frac{x_i}{a}, \quad l_1 \in [0, 1].$$

Rezultaty obliczeń przedstawiono w tablicach 1 i 2 oraz na wykresach (rys. 1–5). Na wykresie z rys. 3 przedstawiono przerywaną linią $\bar{V}(l_1, 0)$ w skali odpowiadającej $\bar{V}(l_1, 1, 2)$. Pozwala to porównać tendencje zmiany kształtu rozwarcia szczeliny ze wzrostem Aa w stosunku do kształtu statycznego. Widać stąd, że nie zostaje zachowany kształt elipsy. W części centralnej następuje większe rozwarcie w porównaniu z elipsoidalnym. Rysunek 4 przedstawia współczynnik intensywności naprężeń jako funkcję Aa . Podobne rezultaty otrzymano przybliżonymi metodami w pracy [17 i 14]. Rozwiązanie otrzymano tam z wykorzystaniem transformat, rozkładając pewne

Tablica 1. Wartości liczbowe współczynników α_i

$i \backslash n$	1		2		3	
0	3,816201285	—1	1,220175242	—1	3,823621387	—2
1	—8,333333333	—2	—4,353584939	—2	—1,380101443	—2
2			3,125000000	—3	1,739588963	—3
3					—6,200396821	—5

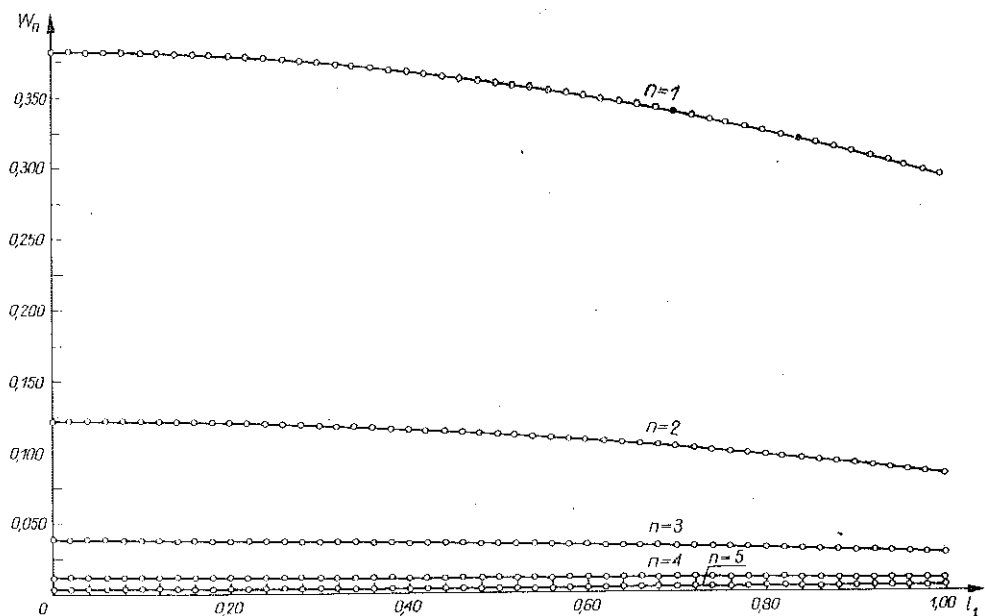
$i \backslash n$	4		5		6	
0	1,204290036	—2	3,789972584	—3	1,192519188	—3
1	—4,341319735	—3	—1,370215268	—3	—4,311595166	—4
2	5,458428319	—4	1,720748679	—4	5,436936873	—5
3	—3,538027049	—5	—1,101456150	—5	—3,477306866	—6
4	7,535204431	—7	4,354021931	—7	1,347495614	—7
5			—6,165167236	—9	—3,588396338	—9
6					3,622693341	—11

$i \backslash n$	7		8		9	
0	3,752452283	—4	1,180768076	—4	3,715457057	—5
1	—1,356665371	—4	—4,260941865	—5	—1,343315205	—5
2	1,710607465	—5	5,382566441	—6	1,693755424	—9
3	—1,099416660	—6	—3,458723114	—7	—1,088324070	—7
4	4,258494357	—8	1,346983917	—8	4,237232345	—9
5	—1,105645102	—9	—3,496951333	—10	—1,106441051	—10
6	2,118962656	—11	6,504775195	—12	2,058626637	—12
7	—1,601864343	—13	—9,400722673	—14	—2,877531544	—14
8			5,521410469	—16	3,248155591	—16
9					—1,523733015	—18

Tablica 2. Wartości liczbowe współczynników k_n

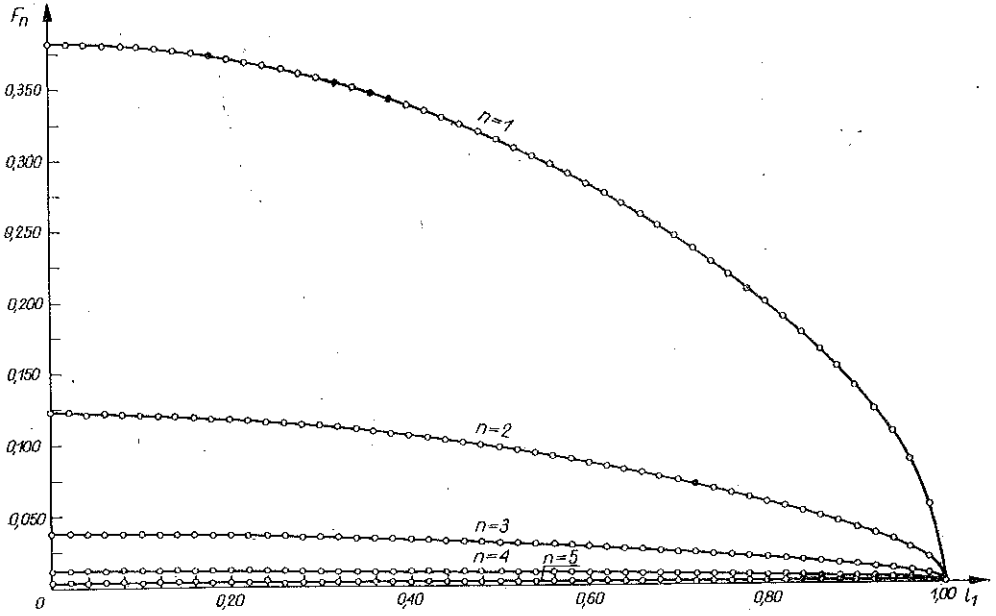
n	k_n	n	k_n
0	1,	5	2,581246860 —3
1	2,982867951 —1	6	8,123829299 —4
2	8,160667480 —2	7	2,556278495 —4
3	2,611278444 —2	8	8,043620965 —5
4	8,212796705 —3	9	2,5311047001 —5

funkcje, przez które rozwijały się one w szereg Laurenta, pozostawiając tylko pierwsze wyrazy. Otrzymane układy równań całkowych oraz odwracanie transformat wykonywano numerycznie. Wyznaczona w ten sposób krzywa w początkowej swojej części posiada przebieg podobny do przedstawionego na rys. 4, przy nieco mniejszych wartościach osiąga maksimum dla $\lambda a \approx 0,95$, a następnie szybko opada. Uzyskane maksimum wydaje się być rezultatem przybliżeń. Jeżeli istnieje, to nie w postaci tam otrzymanej, tzn. może istnieć poza zakresem zbieżności otrzymanego tutaj rozwiązania.

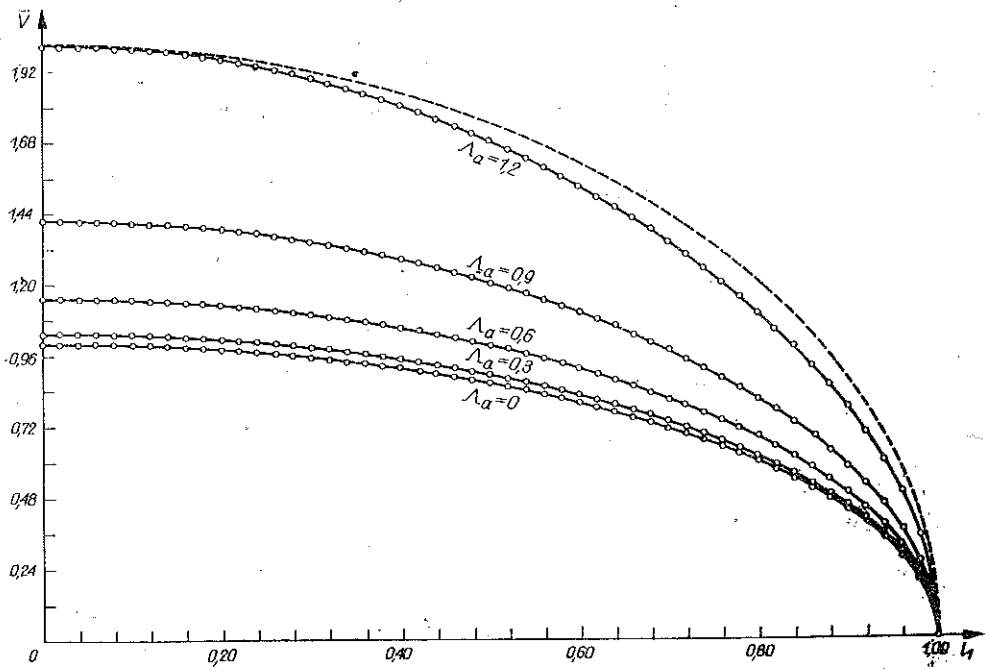


Rys. 1

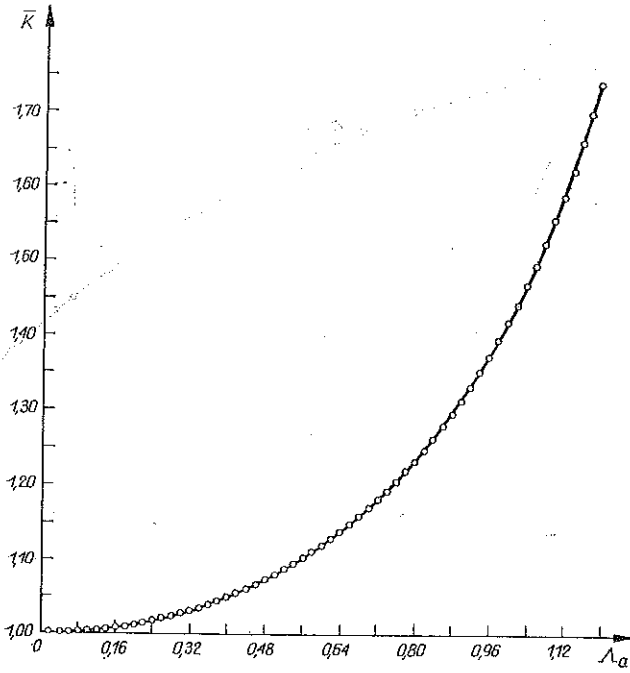
Z charakteru rozwiązania i wartości współczynników α_i (tablica 1) wynika zbieżność dla $\lambda a \leq 1$. Wydaje się jednak, a można to wykazać stosując specjalne obliczenia numeryczne, że zbieżność rozpatrywanych szeregów zachowuje się również dla pewnego zakresu $\lambda a > 1$. Wykresy podano dla wartości $\lambda a = 1, 2$. Biorąc pod uwagę szybkość, z jaką maleją współczynniki α_i wraz z n , można sądzić o zbieżności wy-



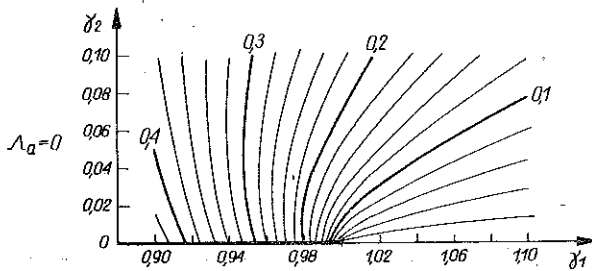
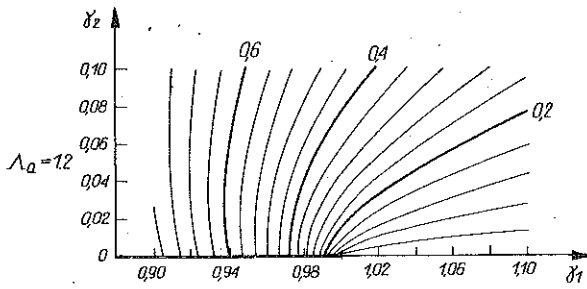
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

ników dla tego zakresu wartości λa ($1, 2^{18} \approx 26$). W_n oraz F_n wyznaczono dla $n=1, \dots, 5$. Pozostałe mają kształt podobny do wyznaczonych, a o ich wielkości można sądzić na podstawie tablicy 1.

Na rys. 5 przedstawiono w postaci izolinii funkcję $\bar{u}(\gamma_1, \gamma_2, \lambda a)$, odpowiadającą przemieszczeniom. Kształt izolinii ulega wraz ze wzrostem λa małym zmianom, natomiast następuje znaczne ich zagęszczenie.

8. WNIOSKI

Korzystając z teorii defektów [1] otrzymano rozwiązanie stacjonarne problemu szczeliny w polu naprężeń fali poprzecznej. Metoda zastosowana do stanu antyplaskowego przenosi się w całości na odpowiednie zagadnienia płaskie, a również pozwala (ewentualnie z wykorzystaniem obliczeń numerycznych) rozpatrywać inne zmienne w czasie pola naprężeń zewnętrznych.

Otrzymane rozwiązanie (zgodnie z wynikami ogólnej teorii) wyznaczone jest w pewnym otoczeniu szczeliny. Wynika to ze wzorów (5.10), gdzie występuje jako współczynnik $x_1^2 + x_2^2$.

Następne ograniczenia dotyczą prędkości zmian pola zewnętrznego. Sprawdzają się one do ograniczenia wartości λa , dla których otrzymane szeregi są zbieżne.

Otrzymane wyniki wskazują, że rozwiązanie dynamiczne istotnie różni się od statycznego. Szczególnie jest to widoczne dla współczynnika intensywności naprężeń, który znacznie przewyższa wartość odpowiadającą rozwiązaniu quasi-statycznemu. Okazało się zarazem, że metody przybliżone typu stosowanych w pracach [14 i 17] prowadzą do znacznego zniekształcenia wyników.

Na zakończenie chciałbym podziękować Panu Profesorowi dr Markowi SOKOŁOWSKIEMU za konsultacje oraz Pani dr Elżbiecie KOSSECKIEJ za wiele poświęconej mi uwagi oraz liczne dyskusje, które umożliwiły mi napisanie tej pracy.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. H. ZORSKI, *Theory of discrete defects*, Arch. Mech. Stos., **18**, 3, 1966.
2. E. KOSSECKA, *Defects as surface distributions of double forces*, Arch. Mech. Stos., **23**, 4, 1971.
3. M. SUFICZYŃSKI, *Elektrodynamika*, PWN, Warszawa 1965.
4. J. KOSSECKI, *The Green tensor and the displacement and stress field due to a dislocation in anisotropic medium*, Arch. Mech. Stos., **22**, 5, 1970.
5. I. PIETROWSKI, *Równania różniczkowe cząstkowe*, PWN, Warszawa 1955.
6. Н. И. МУСХЕЛИШВИЛИ, *Сингулярные интегральные уравнения*, Наука, 1968.
7. Л. Д. ЛАНДАУ, Е. М. ЛИФШИЦ, *Теория упругости*, Наука, 1965.
8. M. MATCZYŃSKI, *The static problem of crack in an elastic medium*, Arch. Mech. Stos., **22**, 4, 1970.
9. M. MATCZYŃSKI, *The quasi-static problem of crack in an elastic medium*, Arch. Mech. Stos., **22**, 5, 1970.
10. И. С. ГРАДШТЕИН, И. М. РЫЖИК, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, 1971.

11. D. BIERENS de HAAN, *Nouveles tables d'intégrales définies*, G. E. Stechert and Co, New York 1939.
12. L. B. FREUND, *Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading*. I. *Constant rate of extension*. II. *Non uniform rate of extension*, J. Mech. and Phys. of Solids, June 1972.
13. Б. В. Костров, *Неустановившееся распространение трещины продольного сдвига*, Прикл. Мат. Мех., **30**, 6, 1966.
14. C. C. SH, J. F. LOEBER, *Interaction of horizontal shear waves with a running crack*, Appl. Mech., **37**, series E, No 2, June 1970.
15. I. N. SNEDDON, M. LOWENGRUB, *Crack problems in the classical theory of elasticity*, John Wiley & Sons, 1969.
16. J. F. LOEBER and G. C. SH, *Diffraction of antiplane shear wave by a finite crack*, J. Acoust. Soc. of America, **44**, 1, 1968.
17. Е. Ф. Афанасьев, Г. Д. Герепанов, *Некоторые динамические проблемы упругости*, Прикл. Мат. Мех., **37**, 1973.

Резюме

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ СДВИГА НА ТРЕЩИНУ ГРИФФИСА

Используя теорию дефектов [1], получено стационарное решение задачи трещины в поле напряжений поперечной волны. Метод, примененный для антиплоского состояния, полностью переносится на соответствующую плоскую задачу, а также он позволяет, возможно с использованием численных расчетов, рассматривать другие, переменные во времени поля внешних напряжений. Полученное решение подлежит ограничениям, вытекающим из применения мгновенных потенциалов.

SUMMARY

INTERACTION OF PLANE SHEAR WAVE ON GRIFFITH CRAKE

Basing on defects theory the stationary solution of crack problem in a shear wave stress field is given. A method applied previously to the antiplane state transfers entirely to the corresponding plane problems and permits also, in any case by means of numerical calculations, to consider the other time-variable exterior stress fields. The limitation of the solution obtained results from the application of instantenous potentials.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 kwietnia 1974 r.