

## OPTYMALNE ZWIERANIE POWIERZCHNIOWYCH USTROJÓW STRUKTURALNYCH

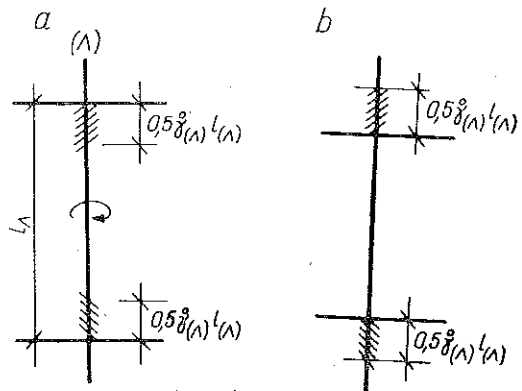
JAN HOLNICKI-SZULC (WARSZAWA)

W pracy omówione jest zagadnienie optymalnego zwierania powierzchniowych ustrojów siatkowych przy założeniu na tyle regularnej ich struktury oraz pola wprowadzanych odkształceń wstępnych (dystorsji), że wyniki uzyskane przy zastosowaniu ciągłego modelu ośrodka dyskretnego są dostatecznie dokładne. Podano równania opisujące statykę powłok strukturalnych z uwzględnieniem wpływu dystorsji, a następnie sformułowano problem optymalnego zwierania (regulacji stanu odkształcenia i napięcia ustroju). Omówiono warunki konieczne i dostateczne optymalnych rozwiązań. Bardziej szczegółowo opracowano zagadnienie zwierania dwuwarstwowych powłok siatkowych o węzłach przegubowych. Na zakończenie rozwiązano przykład optymalnego zwierania dwuwarstwowej płyty strukturalnej.

### WSTĘP

Przedmiotem rozważań są prętowe powierzchniowe ustroje siatkowe, utworzone z  $n$  ( $n=2, 3$ ) rodzin smukłych prętów pryzmatycznych, wykonanych z izotropowego, sprężystego materiału. Ograniczono się do rozpatrywania ustrojów o tak gęstej i regularnej strukturze, że z dostateczną dokładnością można stosować ciągły model ośrodka dyskretnego [1].

Celem pracy jest omówienie zagadnienia optymalnego zwierania rozpatrywanych ustrojów przez wprowadzenie odpowiedniego pola odkształceń wstępnych (dystorsji). Podano związki opisujące statykę powłok strukturalnych z uwzględnieniem wpływu dystorsji, a następnie sformułowano problem zwierania optymalnego (regulacji stanu na-



Rys. 1

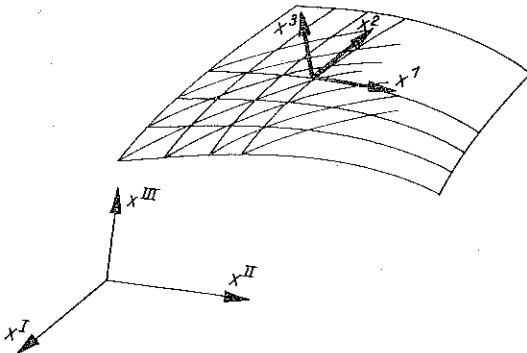
pięcia i odkształcenia ustroju), wyprowadzając warunki konieczne i dostateczne spełnienia kryterium regulacji. Szczególną uwagę zwrócono na przypadek dystorsji ( $\gamma$ ) wprowadzanych przez wydłużenia i skrócenia poszczególnych prętów, który pozwala na zastosowanie dogodnej technologii zwierania — w przypadku łączenia prętów z węzłami na gwinty przeciwskrętne (rys. 1, por. [10]).

Z zagadnienia zwierania powłok strukturalnych można w sposób formalny przejść do zagadnień zwierania ustrojów tarczowych, który to temat przedstawiono w publikacji [10], oraz do zagadnień zwierania ustrojów płytowych, co jest tematem dalszych rozważań niniejszej pracy.

Rozważania zilustrowano przykładowym rozwiązaniem zagadnienia zwierania optymalnego dwuwarstwowej płyty strukturalnej.

## 1. STATYKA POWŁOK STRUKTURALNYCH Z UWZGLĘDNIENIEM WPŁYWU DYSTORSJI

Na wstępie przytoczymy za pracą [1] podstawowy układ związków opisujących statykę siatkowych powłok prętowych, przyjmując te same oznaczenia. Przyjmujemy, że omawiana struktura spełnia wszystkie założenia regularności [1], pozwalające na zastosowanie ciągłego modelu ustroju.



Rys. 2

Przyjęto, że powłoka kształtowana jest na powierzchni  $\pi$  parametryzowanej układem współrzędnych krzywoliniowych  $x^k$  ( $k=1, 2$ ; rys. 2). Siatka struktury składa się z dwu lub trzech rodzin (A) prętów.

Związki geometryczne ustroju przyjmują postać

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \gamma_{ks} &= u_{s|k} - b_{sk} u + e_{sk} v, \\ \gamma_k &= u_{|k} + b_k^l u_l + e_{km} v^m, \\ \kappa_{ks} &= v_{s|k} - b_{sk} v, \\ \kappa_k &= v_{|k} + b_k^l v_l, \end{aligned}$$

gdzie

- $u_k = u_k(x^l)$  funkcje opisujące przemieszczenia styczne do  $\pi$ ,
- $u = u(x^l)$  funkcje opisujące przemieszczenia normalne do  $\pi$ ,
- $v^k = v^k(x^l)$  funkcje opisujące obroty o wektorach stycznych do  $\pi$  (stosując prawoskrętną konwencję znakowania),
- $v = v(x^l)$  funkcje opisujące obroty o wektorach normalnych do  $\pi$ ,
- $e_{km}$  dwuwektor Ricciego powierzchni  $\pi$ ,
- $b_{sk}$  składowe drugiego tensora podstawowego powierzchni  $\pi$ ,
- $(\dots)_{|k}$  pochodna kowariantna względem współrzędnej  $x^k$ .

Stan napięcia powłoki siatkowej można zdefiniować następująco:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} p^{kl} &\equiv \sum_A p_{(A)}^{kl} \equiv \sum_A t_{(A)}^k (t_{(A)}^l P_{(A)} + \tilde{t}_{(A)}^l \tilde{P}_{(A)}) \tilde{l}_{(A)}^{-1}, \\ m^{kl} &\equiv \sum_A m_{(A)}^{kl} \equiv \sum_A t_{(A)}^k (t_{(A)}^l M_{(A)} + \tilde{t}_{(A)}^l \tilde{M}_{(A)}) \tilde{l}_{(A)}^{-1}, \\ p^k &\equiv \sum_A p_{(A)}^k \equiv \sum_A t_{(A)}^k \check{P}_{(A)} \tilde{l}_{(A)}^{-1}, \quad m^k \equiv \sum_A m_{(A)}^k \equiv \sum_A t_{(A)}^k \check{M}_{(A)} \tilde{l}_{(A)}^{-1}, \end{aligned}$$

gdzie

$$A = I, II \quad \text{lub} \quad A = I, II, III,$$

$t_{(A)}^k = t_{(A)}^k(x^l)$  funkcje opisujące składowe jednostkowych wektorów stycznych do poszczególnych rodzin krzywych  $A$ ,

$\tilde{l}_{(A)}^k \equiv e_m^k t_{(A)}^m$  odległość sąsiednich krzywych w rodzinie  $A$ ,

$l_{(A)}$  odległość sąsiednich węzłów w rodzinie  $A$ ,

$P_A, \tilde{P}_A, \check{P}_A$  składowe siły wypadkowej działającej na przekrój pręta rodziny  $A$  w połowie jego rozpiętości,

$M_A, \tilde{M}_A, \check{M}_A$  składowe momentu wypadkowego działającego na przekrój pręta rodziny  $A$  w połowie jego rozpiętości.

Warunki równowagi ustroju przyjmują postać:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} p^{kl}|_k - b_k^l p^k + b^l &= 0, & m^k|_k + e_{kl} p^{kl} + b_{kl} m^{kl} + h &= 0, \\ p^k|_k + b_{kl} p^{kl} + b &= 0, & m^{kl}|_k - b_k^l m^k + e_k^l p^k + h^l &= 0, \end{aligned}$$

gdzie  $b^k, b$  są to składowe siłowego obciążenia zewnętrznego, a  $h^k, h$  składowe momentowego obciążenia zewnętrznego.

Warunki nierozdzielności odkształceń można zapisać następująco [4]:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \gamma^{kl}|_k - b_k^l \gamma^k + e_k^l \kappa^k &= 0, & \kappa^{kl}|_k - b_k^l \kappa^k &= 0, \\ \gamma^k|_k + e_{kl} \kappa^{kl} + b_{kl} \gamma^{kl} &= 0, & \kappa^k|_k + b_{kl} \kappa^{kl} &= 0. \end{aligned}$$

Związki konstytutywne przybierają postać [1]:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} p^{kl} &= A^{klmn} \gamma_{mn}, & m^{kl} &= C^{klmn} \kappa_{mn}, \\ p^k &= A^{kl} \gamma_l, & m^k &= C^{kl} \kappa_l. \end{aligned}$$

Zakładając sztywność węzłów, otrzymujemy

$$(1.6) \quad \begin{aligned} A^{klmn} &\equiv \sum_A t_{(A)}^k t_{(A)}^m (t_{(A)}^l t_{(A)}^n R^{(A)} + \tilde{l}_{(A)}^l \tilde{l}_{(A)}^n \tilde{R}^{(A)}), \\ C^{klmn} &\equiv \sum_A t_{(A)}^k t_{(A)}^m (t_{(A)}^l t_{(A)}^n S^{(A)} + \tilde{l}_{(A)}^l \tilde{l}_{(A)}^n \tilde{S}^{(A)}), \\ A^{kl} &\equiv \sum_A t_{(A)}^k t_{(A)}^l \check{R}^{(A)}, & C^{kl} &\equiv \sum_A t_{(A)}^k t_{(A)}^l \check{S}^{(A)}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(1.7) \quad \begin{aligned} R^{(A)} &\equiv \frac{E_{(A)} A_{(A)}}{l_{(A)}}, & \tilde{R}^{(A)} &\equiv \frac{12 E_{(A)} \check{J}_{(A)}}{l_{(A)} l_{(A)}^2}, & \check{R}^{(A)} &\equiv \frac{12 E_{(A)} \check{J}_{(A)}}{l_{(A)} l_{(A)}^2}, \\ S^{(A)} &\equiv \frac{C_{(A)}}{l_{(A)}}, & \tilde{S}^{(A)} &\equiv \frac{E_{(A)} \check{J}_{(A)}}{l_{(A)}}, & \check{S}^{(A)} &\equiv \frac{E_{(A)} \check{J}_{(A)}}{l_{(A)}}. \end{aligned}$$

We wzorach tych przyjęliśmy następujące oznaczenia:  $\check{J}_A, \check{J}_A$  główne centralne momenty bezwładności przekroju poprzecznego pręta rodziny  $A$  względem osi stycznej do  $\pi$  oraz względem osi prostopadłej do  $\pi$  oraz  $A_A, E_A, C_A$  odpowiednio.

pole przekroju pręta rodziny  $A$ , współczynnik sprężystości podłużnej materiału pręta rodziny  $A$  i sztywność skręcania przekroju poprzecznego pręta rodziny  $A$ .

Wpływ odkształceń wstępnych (dystorsji) na statykę omawianych ustrojów można uwzględnić przez formalne przyjęcie zmodyfikowanych związków konstytutywnych [por. 10, 5, 6]:

$$(1.8) \quad \begin{aligned} p^{kl} &= A^{klmn} (\gamma_{mn} - \dot{\gamma}_{mn}), & m^{kl} &= C^{klmn} (\kappa_{mn} - \dot{\kappa}_{mn}), \\ p^k &= A^{km} (\gamma_m - \dot{\gamma}_m), & m^k &= C^{km} (\kappa_m - \dot{\kappa}_m). \end{aligned}$$

Stosowanie ciągłego modelu ośrodka dyskretnego ogranicza możliwość uwzględnienia wpływu dystorsji jedynie do takich dystorsji, które można z dostateczną dokładnością opisać polami tensorowymi o składowych  $\dot{\gamma}_{mn}$ ,  $\dot{\kappa}_{mn}$ ,  $\dot{\gamma}_m$ ,  $\dot{\kappa}_m$ , odpowiednio regularnych.

Wstawiając (1.8) do (1.3) uzyskujemy układ równań

$$(1.9) \quad \begin{aligned} [A^{klmn} (\gamma_{mn} - \dot{\gamma}_{mn})]_{|k} - b_k^l A^{km} (\gamma_m - \dot{\gamma}_m) + b^l &= 0, \\ [C^{km} (\kappa_m - \dot{\kappa}_m)]_{|k} + e_{kl} A^{klmn} (\gamma_{mn} - \dot{\gamma}_{mn}) + b_{kl} C^{klmn} (\kappa_{mn} - \dot{\kappa}_{mn}) + h &= 0, \\ [A^{km} (\gamma_m - \dot{\gamma}_m)]_{|k} + b_{kl} A^{klmn} (\gamma_{mn} - \dot{\gamma}_{mn}) + b &= 0, \\ [C^{klmn} (\kappa_{mn} - \dot{\kappa}_{mn})]_{|k} - b_k^l C^{km} (\kappa_m - \dot{\kappa}_m) + e_{.k}^l A^{km} (\gamma_m - \dot{\gamma}_m) + h^l &= 0, \end{aligned}$$

który wraz z równaniami nierozdzielności (1.4) stanowi układ dwunastu równań z dwunastoma niewiadomymi funkcjami  $\gamma_{mn}$ ,  $\kappa_{mn}$ ,  $\gamma_m$ ,  $\kappa_m$  przy danych dystorsjach  $\dot{\gamma}_{mn}$ ,  $\dot{\kappa}_{mn}$ ,  $\dot{\gamma}_m$ ,  $\dot{\kappa}_m$ .

Wstawiając (1.1) do (1.9) uzyskujemy układ sześciu równań względem sześciu niewiadomych  $u_m$ ,  $u$ ,  $v_m$ ,  $v$ :

$$(1.10) \quad \begin{aligned} [A^{klmn} (u_{n|m} - b_{nm} u + e_{nm} v)]_{|k} - b_k^l A^{km} (u_{|m} + b_m^l u_r + e_{mr} v^r) + b^l &= 0, \\ [C^{km} (v_{|m} + b_m^l v_l)]_{|k} + e_{kl} A^{klmn} (u_{n|m} - b_{nm} u + e_{nm} v) + b_{kl} C^{klmn} (v_{n|m} - b_{nm} v) + &+ h = 0, \\ [A^{km} (u_{|m} + b_m^l u_l + e_{ml} v^l)]_{|k} + b_{kl} A^{klmn} (u_{n|m} - b_{nm} u + e_{nm} v) + b &= 0, \\ [C^{klmn} (v_{n|m} - b_{nm} v)]_{|k} - b_k^l C^{km} (v_{|m} + b_m^l v_l) + e_{.k}^l A^{km} (u_{|m} + b_m^l u_l + e_{ml} v^l) + &+ h^l = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(1.11) \quad \begin{aligned} b^* &= b^l - [(A^{klmn} \dot{\gamma}_{mn})_{|k} + b_k^l A^{km} \dot{\gamma}_m], \\ h &= h - [(C^{km} \dot{\kappa}_m)_{|k} + e_{kl} A^{klmn} \dot{\gamma}_{mn} + b_{kl} C^{klmn} \dot{\kappa}_{mn}], \\ b &= b - [(A^{km} \dot{\gamma}_m)_{|k} + b_{kl} A^{klmn} \dot{\gamma}_{mn}], \\ h^* &= h^l - [(C^{klmn} \dot{\kappa}_{mn})_{|k} - b_k^l C^{km} \dot{\kappa}_m + e_{.k}^l A^{km} \dot{\gamma}_m]. \end{aligned}$$

Z postaci związków (1.10) i (1.11) widać, że wpływ dystorsji można traktować przez analogię jako dodatkowe obciążenie zewnętrzne sił i momentów [10 i 5].

Można zatem, zamiast poszukiwać deformacji ustroju z obciążeniem zewnętrznym  $b^l$ ,  $h$ ,  $b$ ,  $h^l$  i z uwzględnieniem wpływu dystorsji, określić deformację ustroju poddanego obciążeniu zewnętrznemu  $b^l$ ,  $h$ ,  $b$ ,  $h^l$ .

Otrzymane pola przemieszczeń i obrotów  $u_k$ ,  $u$ ,  $v_k$ ,  $v$  będą w obu przypadkach identyczne, o ile przyjmujemy identyczne warunki graniczne na części brzegu  $A_u$ . Symbol  $A_u$  oznacza część brzegu, na której dane są przemieszczeniowe warunki graniczne, np. pełne utwierdzenie:  $u_k=0$ ,  $u=0$ ,  $v_k=0$ ,  $v=0$ .

W powyższych związkach stan deformacji określa ogólne odkształcenie, wywołane działaniem obciążenia zewnętrznego oraz dystorsji.

Przyjmując w równaniach  $b^l \equiv 0$ ,  $b \equiv 0$ ,  $h \equiv 0$ ,  $h^l \equiv 0$ , można wyznaczyć stan deformacji wywołany jedynie przez dystorsje wstępnie wprowadzane. W szczególnym przypadku, gdy dystorsje spełniają warunki nierozdzielności (1.4), stan odkształcenia ustroju przez nie wywołany jest identyczny z wprowadzonymi dystorsjami:

$$(1.12) \quad \gamma_{mn} = \overset{\circ}{\gamma}_{mn}, \quad \kappa_{mn} = \overset{\circ}{\kappa}_{mn}, \quad \gamma_m = \overset{\circ}{\gamma}_m, \quad \kappa_m = \overset{\circ}{\kappa}_m.$$

Z równań konstytutywnych (1.8) wynika, że wprowadzone dystorsje nie wywołują w ustroju żadnego stanu napięcia. Jest to zatem przypadek czysto geometrycznych zmian kształtu ustroju.

W ogólnym przypadku, dystorsje nie muszą spełniać równań (1.4), co wiąże się z wywoływaniem w ustroju pewnego stanu samonapięcia.

## 2. ZAGADNIENIE OPTYMALNEGO ZWIERANIA

Przyjmijmy, że dysponujemy możliwością wprowadzania do ustroju dystorsji spełniających przyjęte założenia regularności. Przez wprowadzanie odpowiednich dystorsji do ustroju poddanego działaniu obciążenia zewnętrznego można, jak to wynika z rozważań w p. 1, regulować ogólny stan napięcia i odkształcenia konstrukcji.

Sformułujemy zatem warunek optymalnego zwierania ustroju (optymalnej regulacji stanu deformacji lub napięcia), przyjmując za zmienne «decyzyjne» składowe wprowadzonego pola dystorsji:

$$(2.1) \quad J = \int_D f(\gamma_{kl}, \gamma_k, \kappa_{kl}, \kappa_k, \overset{\circ}{\gamma}_{kl}, \overset{\circ}{\gamma}_k, \overset{\circ}{\kappa}_{kl}, \overset{\circ}{\kappa}_k) d\omega = \min.$$

Dla przykładu jako warunek optymalnego zwierania można przyjąć warunki: 1) minimalizacji stanu odkształcenia ustroju, co prowadzi do przyjęcia funkcji podcałkowej w postaci

$$(2.2) \quad f \equiv \gamma_{kl} \gamma^{kl} + \kappa_{kl} \kappa^{kl} + \gamma_k \gamma^k + \kappa_k \kappa^k;$$

2) minimalizacji stanu napięcia ustroju w pewnym podobzdarze  $D' \subset D$ , co prowadzi do przyjęcia funkcji

$$(2.3) \quad f \equiv p^{kl} p_{kl} + m^{kl} m_{kl} + p^k p_k + m^k m_k = A^{klmn} (\gamma_{mn} - \overset{\circ}{\gamma}_{mn}) A_{klpr} (\gamma^{pr} - \overset{\circ}{\gamma}^{pr}) + \\ + C^{klmn} (\kappa_{mn} - \overset{\circ}{\kappa}_{mn}) C_{klpr} (\kappa^{pr} - \overset{\circ}{\kappa}^{pr}) + A^{kl} (\gamma_l - \overset{\circ}{\gamma}_l) A_{kp} (\gamma^p - \overset{\circ}{\gamma}^p) + \\ + C^{kl} (\kappa_l - \overset{\circ}{\kappa}_l) C_{kp} (\kappa^p - \overset{\circ}{\kappa}^p);$$

3) minimalizacji energii wewnętrznej ustroju, co prowadzi do przyjęcia funkcji

$$(2.4) \quad f \equiv \frac{1}{2} A^{klmn} (\gamma_{kl} - \dot{\gamma}_{kl}) \gamma_{mn} + \frac{1}{2} C^{klmn} (\kappa_{kl} - \dot{\kappa}_{kl}) \kappa_{mn} + \\ + \frac{1}{2} A^{kl} (\gamma_k - \dot{\gamma}_k) \gamma_l + \frac{1}{2} C^{kl} (\kappa_k - \dot{\kappa}_k) \kappa_l;$$

4) minimalizacji wprowadzanych dystorsji (przy ograniczeniach (2.9)<sub>1</sub>), co prowadzi do przyjęcia funkcji

$$(2.5) \quad f \equiv \dot{\gamma}_{kl} \dot{\gamma}^{kl} + \dot{\kappa}_{kl} \dot{\kappa}^{kl} + \dot{\gamma}_k \dot{\gamma}^k + \dot{\kappa}_k \dot{\kappa}^k.$$

W celu uzyskania rozwiązań technicznie dogodnych do zrealizowania — należy dopuścić możliwość narzucenia na stan dystorsji ograniczeń, które przedstawimy symbolicznie:

$$(2.6) \quad q^K (\dot{\gamma}_{kl}, \dot{\kappa}_{kl}, \dot{\gamma}_k, \dot{\kappa}_k) = 0, \quad K = 1, 2, \dots, \bar{K}.$$

Na przykład, ograniczając się do rozpatrywania dystorsji wywoływanych jedynie wydłużeniami poszczególnych prętów, który to przypadek jest istotny ze względu na łatwość technicznej realizacji (por. Wstęp), ograniczenia (2.6) należy przyjąć w postaci

$$(2.7) \quad t_{(A)}^k \bar{t}_{(A)}^l \dot{\gamma}_{kl} = 0, \quad \dot{\kappa}_{kl} = 0, \quad \dot{\gamma}_k = 0, \quad \dot{\kappa}_k = 0.$$

Widać stąd, że poza szczególnymi przypadkami, aby możliwe było wprowadzenie do ustroju dystorsji spełniających ograniczenia (2.7), muszą one spełniać warunki silniejsze:

$$(2.8) \quad \dot{\gamma}_{kl} \equiv \dot{\gamma} \delta_{kl}, \quad \dot{\kappa}_{kl} = 0, \quad \dot{\gamma}_k = 0, \quad \dot{\kappa}_k = 0,$$

gdzie  $\delta_{kl}$  oznacza deltę Kroneckera.

Nazwijmy wprowadzanie do ustroju takich pól dystorsji zwieraniem membranowym. Przypadek ten omówimy bardziej szczegółowo w następnych punktach.

Ze względów technicznych celowe jest narzucenie na poszukiwane rozwiązania ograniczeń w postaci nierówności:

$$(2.9) \quad \underline{\delta}_L \leq \eta^L (\gamma_{kl}, \kappa_{kl}, \gamma_k, \kappa_k) \leq \bar{\delta}_L, \\ \underline{\delta}_L \leq \dot{\eta}^L (\dot{\gamma}_{kl}, \dot{\kappa}_{kl}, \dot{\gamma}_k, \dot{\kappa}_k) \leq \bar{\delta}_L, \quad L = 1, 2, \dots, \bar{L},$$

przy czym wartości dopuszczalne  $\delta_L$ ,  $\bar{\delta}_L$ ,  $\underline{\delta}_L$ ,  $\bar{\delta}_L$  określone są dla danego materiału i sposobu połączeń prętów w węzłach.

Omawiany problem sprowadza się do zagadnienia wariacyjnego poszukiwania minimum warunkowego funkcjonau (2.1) z więzami w postaci równań (1.4), (1.9), (2.6) oraz ograniczeniami w postaci nierówności (2.9).

Przyjmując, że ograniczenia (2.9) nie ingerują w poszukiwane rozwiązanie, można stosując metodę Lagrange'a zdefiniować funkcjonal zastępczy o funkcji podcałkowej

$$(2.10) \quad F(z_i, s_j, \lambda_K) \equiv f(z_i) - \lambda_K g^K(z_i, z_{i|k}, z_{i|kl}, s_j, s_{j|k}, s_{j|kl}),$$

gdzie  $z_i, s_j$ , przybierają wartości poszukiwanych funkcji:  $\gamma_{kl}, \kappa_{kl}, \gamma_k, \kappa_k, \dot{\gamma}_{kl}, \dot{\kappa}_{kl}, \dot{\gamma}_k, \dot{\kappa}_k$  oraz gdzie  $g^K(z_i, s_j)$  oznaczają więzy ograniczające (1.4), (1.9), (2.6),  $K=1, 2, \dots, \bar{K}+12$ .

Warunki konieczne ekstremum funkcjonału prowadzą do równań Eulera:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} F(z_i, s_j, \lambda_K)_{;s_j} &\equiv [\lambda_K g^K(z_i, s_j)]_{;s_j} = 0, \\ F(z_i, s_j, \lambda_K)_{;z_i} &\equiv f_{;z_i} - [\lambda_K g^K(z_i, s_j)]_{;z_i} = 0, \\ F(z_i, s_j, \lambda_K)_{;\lambda_K} &\equiv g^K(z_i, s_j) = 0. \end{aligned}$$

Symbol  $(\dots)_{;z_i}$  jest zdefiniowany [10] następująco:

$$(2.12) \quad g^K(z_i, z_i|_k, z_i|_{kl}, s_j)_{;z_i} \equiv \frac{\partial g^K}{\partial z_i} - \left[ \frac{\partial g^K}{\partial (z_i|_k)} \right]_{|_k} + \left[ \frac{\partial g^K}{\partial (z_i|_{kl})} \right]_{|_{kl}}.$$

W równaniu tym obowiązuje sumowanie względem wskaźników  $k, l$ .

Przyjmijmy, że znamy rozwiązanie  $z'_i, s'_j, \lambda'_k$  równań (2.11). Warunkiem koniecznym i dostatecznym globalnego minimum funkcjonału (2.1) dla stanu  $z'_i, s'_j, \lambda'_k$  jest spełnienie nierówności:

$$(2.13) \quad J - J' = \int \int_D [f(z_i) - f(z'_i)] d\omega \geq 0$$

dla dowolnego stanu  $z_i$  (spełniającego ograniczenia (2.11)<sub>3</sub>). Przekształćmy lewą stronę nierówności (2.13) [7]:

$$(2.14) \quad \int \int_D [f(z_i) - f(z'_i)] d\omega = \int \int_D [f(z_i) - f(z'_i) - f'_{;z_i}(z_i - z'_i)] d\omega + \int \int_D [f'_{;z_i}(z'_i)(z_i - z'_i)] d\omega.$$

Korzystając z faktu, że stan określony wielkościami ze znakiem «prim»  $z'_i, s'_j, \lambda'_k$  spełnia warunek (2.11)<sub>2</sub>, można przekształcić składnik drugi prawej strony związku (2.14), przedstawiając ostatecznie warunek (2.13) w postaci

$$(2.15) \quad \int \int_D [f(z_i) - f(z'_i) - f'_{;z_i}(z_i - z'_i)] d\omega + \int \int_D \{[\lambda'_K g^K(z'_i, s'_j)]_{;z_i}(z_i - z'_i)\} d\omega \geq 0.$$

Ze spełnienia nierówności

$$(2.16) \quad \begin{aligned} f(z_i) - f(z'_i) - f'_{;z_i}(z_i - z'_i) &\geq 0, \\ [\lambda'_K g^K(z'_i, s'_j)]_{;z_i}(z_i - z'_i) &\geq 0 \end{aligned}$$

dla dowolnego stanu  $z_i$  wynika zatem, że określony stan  $z'_i, s'_j, \lambda'_k$  jest stanem poszukiwanym, dla którego wartość funkcjonału (2.1) osiąga minimum globalne.

W szczególności [7], jeśli nierówności (2.16) spełnione są dla dowolnych dwu stanów  $z_i, z'_i, s'_j, \lambda'_k$ , to warunki (2.11) są jednocześnie warunkami koniecznymi i dostatecznymi dla minimum globalnego funkcjonału (2.1).

Powracając do przytoczonych przykładów warunku optymalnego zwierania (2.1) można zauważyć, że jeśli nie ingerują ograniczenia (2.9)<sub>2</sub>, to kryterium najmniejszej odkształcalności (2.1), (2.2) lub minimum energii wewnętrznej (2.1), (2.4) prowadzi do wyznaczenia dystorsji z warunku znikania obciążeń zastępczych (1.11). Z przytoczonej w p. 1 analogii wpływu dystorsji do wpływu obciążeń zewnętrznych wynika, że ustrój pozostanie w stanie nieodkształconym. Osiągnięte zatem zostanie minimum globalne. Dobór dystorsji z warunku znikania obciążeń zastępczych jest wieloznaczny.

Posługiwanie się kryterium najmniejszych dystorsji (2.1), (2.5) ma sens jedynie przy istotnym wpływie na rozwiązanie ograniczeń (2.9)<sub>1</sub> i prowadzi do wyrównywania poszczególnych składowych stanu odkształcenia do wartości dopuszczalnych  $\underline{\delta}_L$ ,  $\bar{\delta}_L$  w obszarach, gdzie zostały wartości dopuszczalne przekroczone, najmniejszym «kosztem» wprowadzanych dystorsji.

W przypadku, gdy rozwiązanie zagadnienia jest wieloznaczne, celowe jest przyjęcie warunku optymalizacji drugiego stopnia. I tak np. uzasadnione jest dołączenie jako takiego warunku kryterium minimum dystorsji do warunku najmniejszej odkształcalności.

Osobnym przykładem zastosowania zwierania, który jest odmianą zagadnienia (2.1), (2.2), jest problem wywoływania przez dystorsje przyjętego stanu deformacji, np. wywoływanie w płytach założonego ugięcia wstępnego, przeciwnego do efektu działania obciążeń zewnętrznych.

### 3. ZWIERANIE MEMBRANOWE POWŁOK STRUKTURALNYCH

Rozważmy przypadek zwierania membranowego przy ograniczeniu (2.8) wprowadzanych dystorsji.

Z postaci związków (1.4), (1.9) widać, że wprowadzane zwieranie posiada najistotniejszy wpływ na regulację stanu tarczowego ustroju, przy małym wpływie na regulację stanu płytowego.

Mamy do czynienia ze znacznie korzystniejszą sytuacją w przypadku kratownicy powierzchniowej, kiedy macierze sztywności (1.6) przybierają postać [1]:

$$(3.1) \quad A^{klmn} = \sum_A t_{(A)}^k t_{(A)}^l t_{(A)}^m t_{(A)}^n R^{(A)},$$

$$(3.2) \quad C^{klmn} = 0, \quad A^{kl} = 0, \quad C^{kl} = 0.$$

Z równań (1.8), (2.8), (3.1) (3.2) wynika, że jedynym występującym stanem napięcia są wtedy napięcia tarczowe  $p^{kl}$ .

Szersze możliwości stosowania zwierania membranowego dają kratownice powłokowe [1, 2, 3], które stanowią dwie kratownice powierzchniowe kształtowane na dwu niezbyt odległych powierzchniach  $\pi^{(g)}$ ,  $\pi^{(d)}$  (rys. 3), związane przegubowo łącznikami.

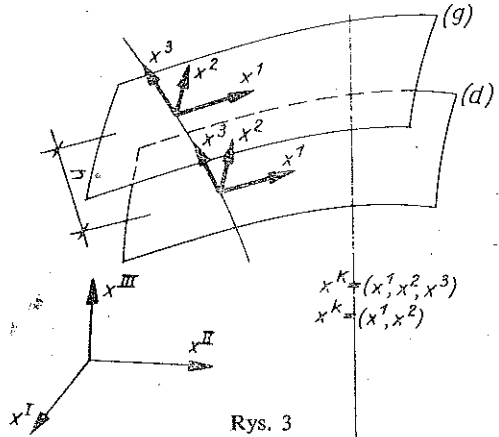


Przyjmijmy, że indeksy (g) i (d) odnoszą się do warstwy odpowiednio górnej i dolnej powłoki oraz że funkcja  $h' = 2h$  opisuje odległość obu warstw.

Statykę kratownic powłokowych omówiono w pracach [1 i 2] przy założeniu odpowiadających sobie siatek warstwy górnej i dolnej oraz przy pominięciu wpływu łączników międzywarstwowych. W pracy [9] założenia tych nie przyjmowano i przedstawiono zagadnienie analogicznie do teorii powłok sandwichowych, przyjmując, że warstwa środkowa łączników «pracuje na ścinanie». Założono jednak z góry istnienie pewnej powierzchni środkowej  $\pi$  (powierzchni obojętnej na zginanie) odległej od warstwy dolnej o  $2\lambda h/(1+\lambda)$  oraz od warstwy górnej o  $2h/(1+\lambda)$ .

Wyprowadźmy podstawowe wzory dla kratownic powłokowych przyjmując, że współczynniki określające położenie środków zginania zależą od rozmieszczenia materiału:

$$(3.3) \quad \lambda_l \equiv \frac{\sum_A^{(g)} A_{(A)}^{(g)} t_{(A)}^{(g)}}{\sum_A^{(d)} A_{(A)}^{(d)} t_{(A)}^{(d)}}$$



Rys. 3

Założmy, że  $\lambda_l = \text{const}$  oraz że  $b_{kl} = b_{kl}^{(g)} = b_{kl}^{(d)}$ . Określmy funkcje opisujące przemieszczenia warstwy górnej i dolnej:

$$(3.4) \quad u_k, u_3, u_k, u_3$$

oraz zdefiniujmy uśredniony stan przemieszczeń i obrotów ustroju

$$(3.5) \quad u_k \equiv \frac{\lambda_{(k)}^{(g)} u_k^{(g)} + u_k^{(d)}}{1 + \lambda_{(k)}}, \quad u \equiv \frac{1}{2} (u_3^{(g)} + u_3^{(d)}), \quad v_m \equiv e_{.m}^k \frac{1}{2h} (u_k^{(g)} - u_k^{(d)})$$

Określając składowe odkształcenia warstw górnej i dolnej

$$(3.6) \quad \gamma_{kl}^{(g)} \equiv u_{l|k}^{(g)} - b_{lk}^{(g)} u, \quad \gamma_{kl}^{(d)} \equiv u_{l|k}^{(d)} - b_{lk}^{(d)} u,$$

można zdefiniować składowe uśrednionego stanu odkształcenia:

$$(3.7) \quad \gamma_{kl} \equiv \frac{\lambda_{(l)}^{(g)} \gamma_{kl}^{(g)} + \gamma_{kl}^{(d)}}{1 + \lambda_{(l)}} = \frac{\lambda_{(l)}^{(g)} u_{l|k}^{(g)} + u_{l|k}^{(d)}}{1 + \lambda_{(l)}} - b_{lk} u = u_{l|k} - b_{lk} u,$$

$$(3.7) \quad \kappa_{kl} \equiv e_{.l}^m \frac{1}{2h} (\gamma_{km}^{(g)} - \gamma_{km}^{(d)}) = e_{.l}^m \frac{1}{2h} (u_{m|k}^{(g)} - u_{m|k}^{(d)}) = v_{l|k},$$

$$\gamma_l \equiv u_{l|} + b_l^m \frac{\lambda_{(m)}^{(g)} u_m^{(g)} + u_m^{(d)}}{1 + \lambda_{(m)}} + e_{.l}^m e_{.m}^k \frac{1}{2h} (u_k^{(g)} - u_k^{(d)}) = u_{l|} + b_l^m u_m + e_{.l}^m v_m$$

Odwracając związki (3.7)<sub>1,2</sub> znajdziemy

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \gamma_{kl} &= \gamma_{kl} + \frac{2h}{1+\lambda_{(l)}} e_i^m \kappa_{km}, & \gamma_{kl} &= \gamma_{kl} - \frac{2h \lambda_{(l)}}{1+\lambda_{(l)}} e_i^m \kappa_{km}. \end{aligned}$$

Uwzględniając przegubowość połączeń oraz założenie, że warstwy zewnętrzne przenoszą siły tarczowe, a warstwa środkowa siły tnące, stan napięcia poszczególnych warstw można zdefiniować przyjmując zmodyfikowane wzory (1.2) [8]:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} p^{kl} &\equiv \sum_A \binom{(g)}{t_{(A)}^k} \binom{(g)}{t_{(A)}^l} P_{(A)} \bar{l}_{(A)}^{-1}, & A &= I, II \quad \text{lub} \quad A = I, II, III, \\ p^{kl} &\equiv \sum_A \binom{(d)}{t_{(A)}^k} \binom{(d)}{t_{(A)}^l} P_{(A)} \bar{l}_{(A)}^{-1}, & A &= I, II \quad \text{lub} \quad A = I, II, III, \\ p^k &\equiv \sum_A \binom{(d)}{t_{(A)}^k} \binom{(d)}{t_{(A)}^3} P_{(A)} \omega_{(A)}^{-1} l_{(A)}, & A &= I, II, \dots, N, \end{aligned}$$

gdzie  $\omega_A^{-1}$  oznacza średnią gęstością prętów rodziny  $A$ . Wielkości bez indeksu  $(g)$  lub  $(d)$  odnoszą się tu do warstwy środkowej.

Związki konstytutywne przyjmują postać:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} p^{kl} &= A^{klmn} \gamma_{mn}, & \bar{p}^{kl} &= \bar{A}^{klmn} \gamma_{mn}, & p^k &= A^{kl} \gamma_l, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.11) \quad \begin{aligned} A^{klmn} &= \sum_A \binom{(g)}{t_{(A)}^k} \binom{(g)}{t_{(A)}^l} \binom{(g)}{t_{(A)}^m} \binom{(g)}{t_{(A)}^n} E_{(A)} A_{(A)} \bar{l}_{(A)}^{-1}, \\ \bar{A}^{klmn} &= \sum_A \binom{(d)}{t_{(A)}^k} \binom{(d)}{t_{(A)}^l} \binom{(d)}{t_{(A)}^m} \binom{(d)}{t_{(A)}^n} E_{(A)} A_{(A)} \bar{l}_{(A)}^{-1}, \\ A^{kl} &= \sum_A \binom{(d)}{t_{(A)}^k} \binom{(d)}{t_{(A)}^l} \binom{(d)}{t_{(A)}^3} E_{(A)} A_{(A)} \omega_{(A)}^{-1} l_{(A)}. \end{aligned}$$

Możemy więc wypisać wzory na energię sprężystą ustroju:

$$(3.12) \quad E = \frac{1}{2} p^{kl} \gamma_{kl} + \frac{1}{2} \bar{p}^{kl} \gamma_{kl} + \frac{1}{2} p^k \gamma_k.$$

Stosując kolejno wzory (3.10), (3.8) i przekształcając wyrażenie (3.12), otrzymujemy

$$(3.13) \quad \begin{aligned} E &= \frac{1}{2} A^{klmn} \gamma_{kl} \gamma_{mn} + \frac{1}{2} \bar{A}^{klmn} \gamma_{kl} \gamma_{mn} + \frac{1}{2} A^{kl} \gamma_k \gamma_l = \\ &= \frac{1}{2} A^{klmn} \left( \gamma_{kl} + \frac{2h}{1+\lambda_{(l)}} e_i^p \kappa_{kp} \right) \left( \gamma_{mn} + \frac{2h}{1+\lambda_{(n)}} e_n^r \kappa_{mr} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \bar{A}^{klmn} \left( \gamma_{kl} - \frac{2h \lambda_{(l)}}{1+\lambda_{(l)}} e_i^p \kappa_{kp} \right) \left( \gamma_{mn} - \frac{2h \lambda_{(n)}}{1+\lambda_{(n)}} e_n^r \kappa_{mr} \right) + \frac{1}{2} A^{kl} \gamma_k \gamma_l = \\ &= \frac{1}{2} A^{klmn} \gamma_{kl} \gamma_{mn} + \frac{1}{2} C^{klmn} \kappa_{kl} \kappa_{mn} + B^{klmn} \gamma_{kl} \kappa_{mn} + \frac{1}{2} A^{kl} \gamma_k \gamma_l, \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 A^{klmn} &= A^{(g)klmn} + A^{(d)klmn}, \\
 (3.14) \quad C^{klmn} &= \frac{4h^2}{(1 + \lambda_{(p)}) (1 + \lambda_{(r)})} e_p^{i1} e_r^{jn} (A^{(g)kpmr} + \lambda_{(p)} \lambda_{(r)} A^{(d)kpmr}), \\
 B^{klmn} &= \frac{2h}{1 + \lambda_{(r)}} e_r^{jn} (A^{(g)klmr} - \lambda_{(r)} A^{(d)klmr}) = \frac{2h}{1 + \lambda_{(p)}} e_p^{i1} (A^{(g)kpmm} - \lambda_{(p)} A^{(d)kpmm}).
 \end{aligned}$$

Można zatem określić składowe uśrednionego stanu napięcia ustroju ze związków konstytutywnych:

$$\begin{aligned}
 (3.15) \quad p^{kl} &= A^{klmn} \gamma_{mn} + B^{klmn} \kappa_{mn}, \\
 m^{kl} &= C^{klmn} \kappa_{mn} + B^{klmn} \gamma_{mn}, \\
 p^k &= A^{kl} \gamma_l,
 \end{aligned}$$

które są uogólnieniem wzorów (1.5)<sub>1, 2, 3</sub>.

Z postaci wzorów (3.14), (3.11) wynika symetria  $p^{kl} = p^{lk}$ . W przypadku, gdy nie występują zewnętrzne momenty skręcające  $h=0$ , można założyć, że w omawianym ustroju [1]  $m^{kl} \equiv 0$  oraz że równanie (1.3)<sub>2</sub> spełnione jest dla uśrednionego stanu napięcia z dokładnością do  $b_{kl} m^{kl} \approx 0$ .

Równania równowagi (1.3) redukują się zatem dla uśrednionego stanu napięcia do układu pięciu równań:

$$(3.16) \quad p^{kl}|_k - b^l_k p^k + b^l = 0, \quad p^k|_k + b_{kl} p^{kl} + b = 0, \quad m^{kl}|_k + e^l_k p^k + h^l = 0,$$

gdzie

$$(3.17) \quad b^l = b^l + b^l, \quad b = b + b, \quad h^l = e_p^{i1} \frac{2h}{1 + \lambda_{(p)}} (b^p - \lambda_{(p)} b^p).$$

W szczególnym przypadku, gdy  $A^{klmn} = A^{(d)klmn}$  (a zatem  $B^{klmn} = 0$ ), uśrednione stany napięcia i odkształcenia spełniają formalnie układ równań (3.16), (3.15), (3.7), opisujący kratownice powłokowe, podany w pracy [1]. Różnica w obu metodach polega w tym przypadku na określeniu macierzy sztywności  $C^{klmn}$ ,  $A^{kl}$ .

Podstawiając do (3.15) wielkości (3.14), (3.7), przekształcając odpowiednio związki oraz wykorzystując (3.10), uzyskujemy wyrażenie uśrednionego stanu napięcia przez stany napięcia poszczególnych warstw:

$$\begin{aligned}
 (3.18) \quad p^{kl} &= (A^{(g)klmn} + A^{(d)klmn}) \frac{\lambda_{(n)} \gamma_{mn} + \gamma_{mn}}{1 + \lambda_{(n)}} + \frac{1}{1 + \lambda_{(r)}} e_r^{jn} e_p^{i1} (A^{(g)kpmr} - \lambda_{(r)} A^{(d)kpmr}) (\gamma_{ms} - \\
 &\quad - \gamma_{ms}) = p^{kl} + p^{kl}, \\
 m^{kl} &= \frac{4h^2}{(1 + \lambda_{(p)}) (1 + \lambda_{(r)})} e_p^{i1} e_r^{jn} (A^{(g)kpmr} + \lambda_{(p)} \lambda_{(r)} A^{(d)kpmr}) e_r^{i1} \frac{1}{2h} (\gamma_{mt} - \gamma_{mt}) + \\
 &\quad + \frac{2h}{1 + \lambda_{(p)}} e_p^{i1} (A^{(g)kpmm} - \lambda_{(p)} A^{(d)kpmm}) \frac{\lambda_{(n)} \gamma_{mn} + \gamma_{mn}}{1 + \lambda_{(n)}} = \\
 &= e_p^{i1} \frac{2h}{1 + \lambda_{(p)}} (p^{kp} - \lambda_{(p)} p^{kp}).
 \end{aligned}$$

Wstawiając do równań równowagi (3.16) wielkości (3.18) oraz (3.10) uzyskujemy układ pięciu równań:

$$(3.19) \quad \begin{aligned} & (A^{klmn} \gamma_{mn} + A^{klmn} \gamma_{mn})_{|k} - b_k^l A^{kn} \gamma_n + b^l = 0, \\ & (A^{kl} \gamma_l)_{|k} + b_{kl} (A^{klmn} \gamma_{mn} + A^{klmn} \gamma_{mn}) + b = 0, \\ & \left[ \frac{2h}{1 + \lambda_{(p)}} e_p^l (A^{kpqn} \gamma_{mn} - \lambda_{(p)} A^{kpqn} \gamma_{mn}) \right]_{|k} + e^l_{\cdot k} A^{km} \gamma_m + h^l = 0. \end{aligned}$$

Dopisując pięć równań nierozdzielności dla poszczególnych warstw, wynikających ze związków (1.4) oraz z zależności (3.7)

$$(3.20) \quad \begin{aligned} & \gamma^{kl}|_k - b_k^l \gamma^k = 0, \quad \gamma^{kl}|_k - b_k^l \gamma^k = 0, \\ & \gamma^k|_k + e_{kl} e_m^l \frac{1}{2h} (\gamma^{km} - \gamma^{km}) + b_{kl} \frac{\lambda_{(l)} \gamma^{kl} + \gamma^{kl}}{1 + \lambda_{(l)}} = 0, \end{aligned}$$

uzyskujemy pełny układ równań względem dziesięciu składowych stanu odkształcenia  $\gamma_{kl}$ ,  $\gamma_{kl}$ ,  $\gamma_k$ .

Przyjmując zamiast równań (3.10) zmodyfikowane związki konstytutywne, uwzględniające wpływ dystorsji membranowych:

$$(3.21) \quad \gamma_{mn} = \gamma^{\circ} \delta_{mn}, \quad \gamma_{mn} = \gamma^{\circ} \delta_{mn}, \quad \dot{\gamma}_m = \dot{\gamma}^{\circ} \dot{\mathbf{i}}_m,$$

gdzie  $\mathbf{i}_m$  oznacza wersory przyjętego układu współrzędnych, dochodzimy do następujących równań zastępujących równania (3.19):

$$(3.22) \quad \begin{aligned} & [A^{klmn} (\gamma_{mn} - \gamma^{\circ} \delta_{mn}) + A^{klmn} (\gamma_{mn} - \gamma^{\circ} \delta_{mn})]_{|k} - b_k^l A^{kr} (\gamma_r - \dot{\gamma}^{\circ} \dot{\mathbf{i}}_r) + b^l = 0, \\ & [A^{kl} (\gamma_l - \dot{\gamma}^{\circ} \dot{\mathbf{i}}_l)]_{|k} + b_{kl} [A^{klmn} (\gamma_{mn} - \gamma^{\circ} \delta_{mn}) + A^{klmn} (\gamma_{mn} - \gamma^{\circ} \delta_{mn})] + b = 0, \\ & \left\{ \frac{2h}{1 + \lambda_{(p)}} e_p^l [A^{kpqn} (\gamma_{mn} - \gamma^{\circ} \delta_{mn}) - \lambda_{(p)} A^{kpqn} (\gamma_{mn} - \gamma^{\circ} \delta_{mn})] \right\}_{|k} + \\ & \quad + e^l_{\cdot k} A^{km} (\gamma_m - \dot{\gamma}^{\circ} \dot{\mathbf{i}}_m) + h^l = 0. \end{aligned}$$

Z postaci równań (3.20), (3.22), określających wielkości statyczne kratownic powłokowych z uwzględnieniem zwierania membranowego, wynika, że wprowadzane dystorsje mają istotny wpływ na wszystkie składowe stanu odkształcenia i napięcia ustroju. W szczególności można sprowadzić ustrój do stanu «niedokształconego», określając dystorsje (wieloznacznie) z warunku znikania obciążenia zastępczego (1.11):

$$(3.23) \quad \begin{aligned} & \overset{*}{b}^n = b^n - \{ [\gamma^{\circ} A^{klmn} \delta_{mn} + \gamma^{\circ} A^{klmn} \delta_{mn}]_{|k} - b_k^l \dot{\gamma}^{\circ} A^{kl} \dot{\mathbf{i}}_l \} = 0, \\ & \overset{*}{b} = b - [ (\dot{\gamma}^{\circ} A^{kl} \dot{\mathbf{i}}_l)_{|k} + b_{kl} (\dot{\gamma}^{\circ} A^{klmn} \delta_{mn} + \gamma^{\circ} A^{klmn} \delta_{mn}) ] = 0, \\ & \overset{*}{h}^l = h^l - \left\{ \left[ \frac{2h}{1 + \lambda_{(p)}} e_p^l (\gamma^{\circ} A^{kpqn} \delta_{mn} - \lambda_{(p)} \gamma^{\circ} A^{kpqn} \delta_{mn}) \right]_{|k} + e^l_{\cdot k} \dot{\gamma}^{\circ} A^{km} \dot{\mathbf{i}}_m \right\} = 0. \end{aligned}$$

W przypadku zwierania kratownic powłokowych można obok warunków regulacji (2.1)–(2.5) stawiać np. kryterium minimalizacji napięcia górnej warstwy, która z reguły poddana jest ścisłaniu. Stosowanie tego warunku celowe jest z punktu widzenia zapewnienia stateczności ustroju.

#### 4. ZWIERANIE PŁASKICH USTROJÓW STRUKTURALNYCH

W przypadku ustroju płaskiego, to znaczy takiego, dla którego powierzchnia  $\pi$ , na której kształtowana jest siatka prętów jest płaszczyzną, podstawowe układy równań (1.4), (1.9) lub (1.10), (1.11) opisujące statykę dźwigarów z uwzględnieniem wpływu dystorsji w odkształceniach lub w przemieszczeniach, rozdzielają się na układ opisujący stan tarczowy oraz na układ opisujący stan płytowy.

Przedstawiając zagadnienie w kartezjańskim układzie współrzędnych, przyjmując  $b_{kl}=0$  oraz

$$(4.1) \quad \varepsilon_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{dla } k=1, l=2, \\ -1 & \text{dla } k=2, l=1, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

otrzymujemy z (1.9) oraz z (1.4) po przekształceniach:

1) równania równowagi tarczy

$$(4.2) \quad \begin{aligned} [A^{klmn}(\gamma_{mn} - \dot{\gamma}_{mn})]_{,k} + b^l &= 0, \\ [C^{km}(\kappa_m - \dot{\kappa}_m)]_{,k} + \varepsilon_{kl} A^{klmn}(\gamma_{mn} - \dot{\gamma}_{mn}) + h &= 0 \end{aligned}$$

z warunkami nierozdzielności

$$(4.3) \quad \varepsilon^{kl} \gamma_{km, l} + \kappa_m = 0, \quad \varepsilon^{kl} \kappa_{k, l} = 0;$$

2) równania równowagi płyty

$$(4.4) \quad \begin{aligned} [A^{kl}(\gamma_l - \dot{\gamma}_l)]_{,k} + b &= 0, \\ [C^{klmn}(\kappa_{mn} - \dot{\kappa}_{mn})]_{,k} + \varepsilon^l_k A^{klmn}(\gamma_m - \dot{\gamma}_m) + h^l &= 0 \end{aligned}$$

z warunkami nierozdzielności

$$(4.5) \quad \varepsilon^{kl} \gamma_{k, l} - \delta^{kl} \kappa_{lk} = 0, \quad \varepsilon^{kl} \kappa_{km, l} = 0.$$

Zagadnienie zwierania tarcz siatkowych omówiono w pracy [10] i nie będziemy się nim dalej zajmować. Omówimy natomiast bardziej szczegółowo zwieranie membranowe ustrojów płytowych.

Z postaci równań (4.4) widać, że przyjmując ograniczenia (2.8) stanu dystorsji, zawieranie nie wywoła żadnych zmian w płycie siatkowej (ruszcie) w stanach płytowego napięcia ani odkształcenia, wywołanych obciążeniem zewnętrznym  $b$  i  $h^l$ . Można jednak rozważyć zagadnienie zwierania membranowego w płytach dwuwarstwowych. Związki opisujące statykę takich ustrojów z uwzględnieniem wpływu dystorsji uzyskamy z przejścia do przypadku płaskiego z równaniami

(3.21), (3.22) oraz po dopisaniu warunków nierozdzielności wynikających z (3.6), (3.7), w ten sposób znajdziemy

1) równania równowagi

$$(4.6) \quad \begin{aligned} & [A^{klmn}(\gamma_{mn} - \gamma^\circ \delta_{mn}) + A^{klmn}(\gamma_{mn} - \gamma^\circ \delta_{mn})]_{,k} + b^l = 0, \\ & [A^{kl}(\gamma_l - \gamma^l i_l)]_{,k} + b = 0, \\ & \left\{ \frac{2h}{1 + \lambda_{(p)}} \varepsilon_p^{\cdot l} [A^{kpnm}(\gamma_{mn} - \gamma^\circ \delta_{mn}) - \lambda_{(p)} A^{kpnm}(\gamma_{mn} - \gamma^\circ \delta_{mn})] \right\}_{,k} + \\ & \quad + \varepsilon_{\cdot k}^l A^{km}(\gamma_m - \gamma^m i_m) + h^l = 0; \end{aligned}$$

2) warunki nierozdzielności

$$(4.7) \quad \gamma_{11,22} + \gamma_{22,11} = 2\gamma_{12,12}, \quad \gamma_{11,22} + \gamma_{22,11} = 2\gamma_{12,12}, \quad \gamma_{1,2} = \gamma_{2,1}.$$

Można zauważyć, że w przypadku, gdy

$$(4.8) \quad A^{kl} \equiv A^{\delta^{kl}}$$

układ równań (4.6), (4.7) można rozdzielić na dwa niezależne układy, opisujące stany odkształcenia warstw zewnętrznych oraz warstwy łączników środkowych. Założenie (4.8) jest często spełnione w stosowanych strukturach (np. «unistrut»).

Przekształcając równanie (4.6)<sub>3</sub> otrzymujemy

$$(4.9) \quad \begin{aligned} & \varepsilon_i^{\cdot r} \varepsilon_p^{\cdot l} \left\{ \frac{2h}{1 + \lambda_{(p)}} [A^{kpnm}(\gamma_{mn} - \gamma^\circ \delta_{mn}) - \lambda_{(p)} A^{kpnm}(\gamma_{mn} - \gamma^\circ \delta_{mn})] \right\}_{,kr} + \\ & \quad + \varepsilon_i^{\cdot r} \varepsilon_{\cdot k}^l [A^{km}(\gamma_m - \gamma^m i_m)]_{,r} + \varepsilon_i^{\cdot r} h_{,r}^l = 0, \\ & \delta_i^{\cdot r} \varepsilon_p^{\cdot l} \left\{ \frac{2h}{1 + \lambda_{(p)}} [A^{kpnm}(\gamma_{mn} - \gamma^\circ \delta_{mn}) - \lambda_{(p)} A^{kpnm}(\gamma_{mn} - \gamma^\circ \delta_{mn})] \right\}_{,kr} + \\ & \quad + \delta_i^{\cdot r} \varepsilon_{\cdot k}^l [A^{km}(\gamma_m - \gamma^m i_m)]_{,r} + \delta_i^{\cdot r} h_{,r}^l = 0. \end{aligned}$$

Wstawiając (4.6)<sub>2</sub> do (4.9)<sub>1</sub> oraz uwzględniając (4.7)<sub>3</sub> i (4.8) w (4.9)<sub>2</sub> można wzory (4.9) doprowadzić do postaci:

$$(4.10) \quad \begin{aligned} & \left\{ \frac{2h}{1 + \lambda_{(l)}} [A^{klmn}(\gamma_{mn} - \gamma^\circ \delta_{mn}) - \lambda_{(l)} A^{klmn}(\gamma_{mn} - \gamma^\circ \delta_{mn})] \right\}_{,kl} + b - \varepsilon_i^{\cdot n} h_{,n}^l = 0, \\ & \varepsilon_s^{\cdot k} \left\{ \frac{2h}{1 + \lambda_{(l)}} [A^{slmn}(\gamma_{mn} - \gamma^\circ \delta_{mn}) - \lambda_{(l)} A^{slmn}(\gamma_{mn} - \gamma^\circ \delta_{mn})] \right\}_{,kl} + h_{,l}^k = 0. \end{aligned}$$

Uzyskano zatem dwa niezależne układy równań: równania (4.6)<sub>2</sub>, (4.7)<sub>3</sub> określające stan warstwy środkowej ustroju oraz równania (4.6)<sub>1</sub>, (4.10), (4.7)<sub>1,2</sub> określające stan warstw zewnętrznych ustroju.

Zajmijmy się dalej zagadnieniem zwierania membranowego zewnętrznych warstw ustroju, ograniczając rozważania do przypadku

$$(4.11) \quad A^{klmn} = A^{klmn} \equiv A^{klmn} = \text{const}, \quad 2h \equiv h' = \text{const}, \quad h^l = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Układ równań (4.6)<sub>1</sub>, (4.10), (4.7)<sub>1, 2</sub> przybiera postać

$$\begin{aligned}
 & A^{klmn} [(\overset{(g)}{\gamma}_{mn} - \overset{(g)}{\gamma} \overset{\circ}{\delta}_{mn}) + (\overset{(d)}{\gamma}_{mn} - \overset{(d)}{\gamma} \overset{\circ}{\delta}_{mn})]_{,k} + b^l = 0, \\
 & A^{klmn} [(\overset{(g)}{\gamma}_{mn} - \overset{(g)}{\gamma} \overset{\circ}{\delta}_{mn}) - (\overset{(d)}{\gamma}_{mn} - \overset{(d)}{\gamma} \overset{\circ}{\delta}_{mn})]_{,kl} + \frac{2b}{h'} = 0, \\
 (4.12) \quad & \varepsilon_s^{,k} A^{stmn} [(\overset{(g)}{\gamma}_{mn} - \overset{(g)}{\gamma} \overset{\circ}{\delta}_{mn}) - (\overset{(d)}{\gamma}_{mn} - \overset{(d)}{\gamma} \overset{\circ}{\delta}_{mn})]_{,kl} = 0, \\
 & \quad \quad \quad \overset{(g)}{\gamma}_{11, 22} + \overset{(g)}{\gamma}_{22, 11} = 2\overset{(g)}{\gamma}_{12, 12}, \\
 & \quad \quad \quad \overset{(d)}{\gamma}_{11, 22} + \overset{(d)}{\gamma}_{22, 11} = 2\overset{(d)}{\gamma}_{12, 12}.
 \end{aligned}$$

W przypadku gdy nie występuje w równaniach (4.12) tarczowe obciążenie zewnętrzne  $b^l = 0$ , uzasadnione jest przyjęcie  $\gamma_{kl} = 0$ , skąd wynika (3.7)  $\overset{(g)}{\gamma}_{kl} = -\overset{(d)}{\gamma}_{kl}$  i spełnienie równań (4.12)<sub>1</sub>. Chcąc przyjąć to założenie do naszych rozważań, musimy zastosować je także do stanu dystorsji. Przyjmijmy zatem

$$(4.13) \quad \overset{(g)}{\gamma}_{mn} \equiv \overset{(d)}{\gamma}_{mn} = -\overset{(g)}{\gamma}_{mn}, \quad \overset{\circ}{\gamma} \equiv \overset{(g)}{\gamma} = -\overset{(d)}{\gamma}.$$

Związki (4.12) sprowadzają się w omawianym przypadku do układu trzech niezależnych równań:

$$\begin{aligned}
 (4.14) \quad & A^{klmn} (\overset{(g)}{\gamma}_{mn} - \overset{\circ}{\gamma} \overset{\circ}{\delta}_{mn})_{,kl} + \frac{b}{h'} = 0, \\
 & \varepsilon_s^{,k} A^{stmn} (\overset{(g)}{\gamma}_{mn} - \overset{\circ}{\gamma} \overset{\circ}{\delta}_{mn})_{,kl} = 0, \quad \overset{(g)}{\gamma}_{11, 22} + \overset{(g)}{\gamma}_{22, 11} = 2\overset{(g)}{\gamma}_{12, 12}
 \end{aligned}$$

z czterema niewiadomymi funkcjami:  $\overset{(g)}{\gamma}_{mn} = \overset{(d)}{\gamma}_{mn}$ ,  $\overset{\circ}{\gamma}$ .

Przyjmując dodatkowo stosowane w teorii płyt założenie o prostych normalnych, co prowadzi do przyjęcia [(3.7)<sub>3</sub>, (4.13)]

$$(4.15) \quad \gamma_l = u_{,l} + \delta_l^k \frac{2}{h'} u_{,k} = 0,$$

i wyrażając równanie (4.14)<sub>1</sub> w przemieszczeniach oraz korzystając z (4.15), uzyskujemy

$$(4.16) \quad A^{klmn} \left( \frac{h'}{2} u_{,mn} + \overset{\circ}{\gamma} \overset{\circ}{\delta}_{mn} \right)_{,kl} - \frac{b}{h'} = 0.$$

### 5. PRZYKŁAD OPTYMALNEGO ZWIERANIA DWUWARSTWOWEJ PŁYTY STRUKTURALNEJ

Rozpatrzmy przykład optymalnego zwierania membranowej płyty dwuwarstwowej, wykonanej z identycznych prętów o długości  $l$  i polu przekroju  $\varnothing$  (rys. 4).

Przyjmując wektory kierunkowe prętów poszczególnych rodzin  $t_A^k, t_A^k, t_A^k$  jak na rys. 4, można wyznaczyć na podstawie (3.11) i zależności geometrycznych — macierze sztywności:

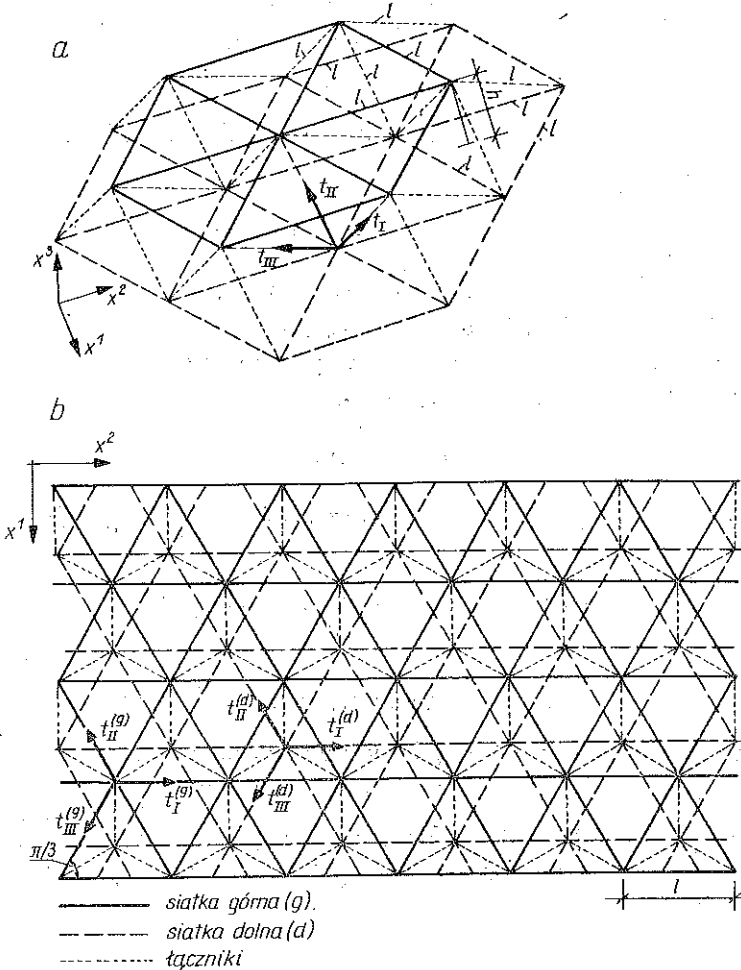
$$\begin{aligned}
 (5.11) \quad & A^{klmn} \equiv \overset{(g)}{A}^{klmn} = \overset{(d)}{A}^{klmn} : \\
 & A^{1111} = A^{2222} = 3A, \quad A^{1212} = A^{1221} = A^{2112} = A^{2121} = A^{1122} = A^{2211} = A,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$(5.2) \quad A = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{E\varnothing}{l}, \quad A^{kl} = A\delta^{kl}, \quad \text{gdzie} \quad A = \frac{2E\varnothing}{l^2}.$$

Ponieważ omawiany przypadek spełnia założenia (4.8) i (4.11), zatem ograniczając się do przypadku (4.13),  $b^l = 0$ , równaniom równowagi i warunkom nierozdzielności (4.14) nadamy postać

$$(5.3) \quad \begin{aligned} (3\gamma_{11} + \gamma_{22} - 4\dot{\gamma})_{,11} + (\gamma_{11} + 3\gamma_{22} - 4\dot{\gamma})_{,22} + 4\gamma_{12,12} + \frac{b}{Ah'} &= 0, \\ (\gamma_{11} - \gamma_{22})_{,12} + \gamma_{12,12} - \gamma_{12,11} &= 0, \\ \gamma_{11,22} + \gamma_{22,11} - 2\gamma_{12,12} &= 0. \end{aligned}$$



Rys. 4



Rozwińmy zagadnienie optymalnego zwierniania warstw zewnętrznych ze względu na warunek minimalizacji stanu napięcia ustroju (2.1), (2.3), który z uwagi na (4.8) sprowadza się do minimalizacji stanu napięcia w siatce górnej i dolnej:

$$(5.4) \quad J = \int_D \int (p^{(a)ki} p_{ki} + p^{(d)kl} p_{kl}) d\omega = \min,$$

przy warunku dodatkowym nieodkształcalności płyty.

Wykorzystując związki konstytutywne oraz (5.1), funkcję podcałkową zapisać można w postaci

$$(5.5) \quad f = 4A^2 [5(\gamma_{11} - \check{\gamma})^2 + 5(\gamma_{22} - \check{\gamma})^2 + 2\gamma_{12}^2].$$

Konstruując funkcjonal zastępczy o funkcji podcałkowej (2.10), w której uwzględniamy ograniczenia (5.3), warunki konieczne jego ekstremum (2.11) sprowadzamy do układu równań:

$$(5.6) \quad \begin{aligned} 40A^2(\gamma_{11} - \check{\gamma}) - 3\lambda_{1,11} - \lambda_{1,22} - \lambda_{2,12} - \lambda_{3,22} &= 0, \\ 40A^2(\gamma_{22} - \check{\gamma}) - \lambda_{1,11} - 3\lambda_{1,12} + \lambda_{2,12} - \lambda_{3,11} &= 0, \\ 16A^2\gamma_{12} - 4\lambda_{1,12} - \lambda_{2,22} + \lambda_{2,11} + \lambda_{3,12} &= 0, \\ 40A^2[(\gamma_{11} - \check{\gamma}) + (\gamma_{22} - \check{\gamma})] - 4\lambda_{1,11} - 4\lambda_{1,22} &= 0, \\ (3\gamma_{11} + \gamma_{22} - 4\check{\gamma})_{,11} + (\gamma_{11} + 3\gamma_{22} - 4\check{\gamma})_{,22} + 4\gamma_{12,12} + \frac{b}{Ah'} &= 0, \\ (\gamma_{11} - \gamma_{22})_{,12} + \gamma_{12,22} - \gamma_{12,11} &= 0, \\ \gamma_{11,22} + \gamma_{22,11} - 2\gamma_{12,12} &= 0, \quad \gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{12} = 0. \end{aligned}$$

Można sprawdzić, że funkcje spełniające warunki

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \gamma_{11} = 0, \quad \gamma_{22} = 0, \quad \gamma_{12} = 0, \quad \check{\gamma}_{,22} = \check{\gamma}_{,11} = \frac{b}{8Ah'}, \\ \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_{1,12} = 0, \quad \lambda_{1,22} = \lambda_{1,11} = -10A^2\check{\gamma}, \end{aligned}$$

są rozwiązaniem układu (5.6), a zatem spełniają warunek konieczny ekstremum (5.4).

Można pokazać, że funkcja (5.5) jest wypukła.

Pisząc lewą stronę warunku (2.16)<sub>1</sub> w postaci rozwiniętej dla obu dowolnych stanów  $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{12}, \check{\gamma}$  oraz  $\gamma'_{11}, \gamma'_{22}, \gamma'_{12}, \check{\gamma}'$  otrzymujemy po przekształceniach:

$$(5.8) \quad \begin{aligned} 4A^2 [5(\gamma_{11} - \check{\gamma})^2 + 5(\gamma_{22} - \check{\gamma})^2 + 2\gamma_{12}^2 - 5(\gamma'_{11} - \check{\gamma}')^2 - 5(\gamma'_{22} - \check{\gamma}')^2 - \\ - 2\gamma_{12}^2 - 10(\gamma'_{11} - \check{\gamma}')(\gamma_{11} - \gamma'_{11}) - 10(\gamma'_{22} - \check{\gamma}')(\gamma_{22} - \gamma'_{22}) - \\ - 4\gamma'_{12}(\gamma_{12} - \gamma'_{12}) + 10(\gamma'_{11} - \check{\gamma}')(\check{\gamma} - \check{\gamma}') + 10(\gamma'_{22} - \check{\gamma}')(\check{\gamma} - \check{\gamma}')] = \\ = 4A^2 \{2(\gamma_{12} - \gamma'_{12})^2 + 5[(\gamma_{11} - \check{\gamma}) - (\gamma'_{11} - \check{\gamma}')]^2 + 5[(\gamma_{22} + \check{\gamma}) - (\gamma'_{22} - \check{\gamma}')]^2\} \geq 0. \end{aligned}$$

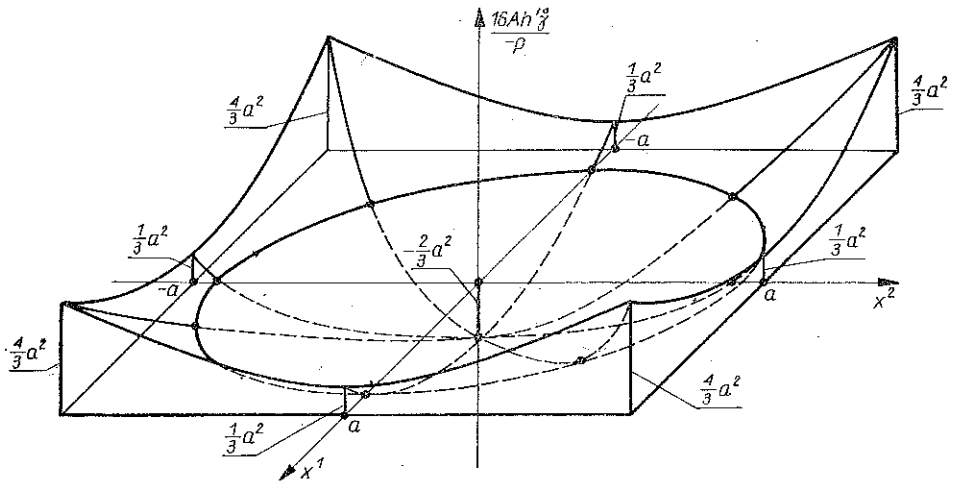
Warunek (2.16)<sub>2</sub> po uwzględnieniu (5.7) i (5.10) jest także spełniony, zatem rozwiązanie (5.7) spełnia warunek konieczny i dostateczny minimum globalnego funkcjonala (5.4). Nie jest to rozwiązanie trywialne, gdyż wyznaczone dystorsje nie spełniają warunku nierozdzielności  $\Delta\check{\gamma} = 0$ , a zatem regulują w sposób istotny stan napięcia ustroju (tutaj  $\Delta$  — operator Laplace'a).

Rozwiązanie (5.7) zapewnia niedokształcalność warstw zewnętrznych ustroju, a wprowadzane dystorsje powodują oczywiście (3.23) znikanie zastępczego obciążenia zewnętrznego, występującego w równaniach równowagi (5.3)<sub>1,2</sub>:

$$(5.9) \quad \overset{*}{b} = \frac{b}{Ah'} - 4A\overset{\circ}{\gamma} = 0.$$

Przytoczmy na zakończenie przykład liczbowy płyty kwadratowej, obciążonej równomiernie (rys. 5):

$$b = -p = \text{const.}$$



Rys. 5

Przyjmując, że dystorsje (5.7) mają postać

$$(5.10) \quad \overset{\circ}{\gamma} = \frac{-p}{16Ah'} (x_1^2 + x_2^2 + c)$$

i uwzględniając fakt, że warstwy zewnętrzne nie ulegają odkształceniu, można określić minimalną wartość funkcjonału (5.4):

$$(5.11) \quad I = \frac{5p^2}{8h'^2} \int_0^a \int_0^a (x_1^2 + x_2^2 + c)^2 dx_1 dx_2 = \frac{5p^2 a^2}{8h'^2} \left( c^2 + \frac{4}{3} a^2 c + \frac{28}{45} a^4 \right).$$

Przyjmując

$$(5.12) \quad c = -\frac{2}{3} a^2,$$

uzyskujemy wartość całkowitego napięcia  $I = 11a^6 p^2 / h'^2$ , które wywołane jest w ustroju obciążeniem  $b$  oraz dystorsjami wprowadzonymi w warstwach zewnętrznych (4.13)<sub>2</sub>, (5.10) (rys. 5):

$$(5.13) \quad \overset{\circ}{\gamma} = \overset{(o)}{\gamma} = -\overset{(a)}{\gamma} = \frac{-p}{16Ah'} \left( x_1^2 + x_2^2 - \frac{2}{3} a^2 \right).$$

Z postaci wzorów (4.6)<sub>2</sub>, (4.7)<sub>3</sub>, (5.2) określających warstwę środkową płyty wynika, że można uzyskać jej nieodkształcalność, przyjmując

$$(5.14) \quad \dot{\gamma}_{,1}^{(s)} + \dot{\gamma}_{,2}^{(s)} = \frac{b}{A^{(s)}}.$$

Zakładając

$$(5.15) \quad \dot{\gamma}_{,1} = \dot{\gamma}_{,2} = \frac{b}{2A^{(s)}}, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0,$$

dystorsje spełniają warunek nierozdzielności (4.7)<sub>3</sub>, a zatem nie wprowadzają do ustroju żadnej zmiany stanu napięcia.

W przypadku zwierania omawianego ustroju w celu uzyskania danego ugięcia  $\bar{u}$  (jeśli przyjąć założenie o prostych normalnych), z równania (4.16) wynika

$$(5.16) \quad \Delta \dot{\gamma} = \frac{3h'}{8} (\bar{u}_{,1111} + \bar{u}_{,2222}) + \frac{3h'}{4} \bar{u}_{,1122} + \frac{b}{4Ah'}.$$

Podstawiając  $\bar{u} = 0$ , uzyskujemy wynik zgodny z rozwiązaniem (5.7).

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Cz. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, PWN, IPPT, PAN, 1970.
2. R. PEŁA, *Podstawy obliczeń kratownic powłokowych*, Arch. Inż. Łąd., 15, 1-2, 1969.
3. R. PEŁA, Cz. WOŹNIAK, *Wstęp do teorii i obliczeń kratownic powierzchniowych*, Arch. Inż. Łąd., 12, 4, 1966.
4. M. KLEIBER, Cz. WOŹNIAK, *On equations of the linear theory of elastic lattice shells*, Bull. Acad. Polon. Sci., 3, 19, 1971.
5. W. NOWACKI, *Zagadnienie dystorsji w mikropolarnej teorii sprężystości*, referat na II Narodowym Kongresie Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, Varna, październik 1973.
6. J. P. NOWACKI, *The linear theory of dislocation in Cosserat continuum*, Bull. Acad. Polon. Sci., 1973.
7. Z. MRÓZ, *Multiparameter optimal design of plates and shells*. I. Struct. Mech., 1(3), 1973.
8. J. GIERLIŃSKI, *Przybliżone obliczanie płaskich, prętowych przekryć strukturalnych*, Mech. Teoret. Stos., 1, 1975.
9. J. GIERLIŃSKI, *Statyka prętowych powłok strukturalnych* Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. [w druku].
10. J. HOŁNICKI-SZULC, *Regulacja stanu deformacji w płaskich ustrojach prętowych*, Rozpr. Inż., 21, 4, 1973.

#### Резюме

#### ОПТИМАЛЬНОЕ СМЫКАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ СТРУКТУРНЫХ СИСТЕМ

В работе обсуждена проблема оптимального смыкания поверхностных решетчатых систем, при предположении на столько регулярной их структуры и подя вводимых предварительных деформаций (дисторсии), что результаты полученные при применении сплошной модели дискретной среды достаточно точны. Даются уравнения описывающие статику

структурных покрытий с учетом влияния дисторсии, а затем сформулирована задача оптимального смыкания (регулировка состояний деформаций и напряжений системы). Обсуждены необходимые и достаточные условия оптимальных решений. Более подробно разработана задача смыкания двухслойных решетчатых покрытий с шарнирными узлами. В заключение решен пример оптимального смыкания двухслойной структурной плиты.

#### SUMMARY

#### OPTIMAL JOINING OF SURFACE NET STRUCTURES

In a paper a problem of optimal joining of surface net structures under assumption of such structure regularity and of field of introduced prestrains (distorsion) that the results obtained on the basis of continuous model of discrete media are sufficiently correct is considered. Equations describing the statics of lattice shells with taking into account the distorsion effect are given and then the problem of optimal joining (regulation of strain and stress state of structure) is formulated. Necessary and sufficient conditions for optimal solutions are discussed. The problem of joining of two-layer net shells with hinge constraints are treated more particularly. Finally an example of optimal joining of two-layer structural plate is presented.

POLSKA AKADEMIA NAUK  
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

*Praca została złożona w Redakcji dnia 27 marca 1974 r.*