

## PRZEDŁUŻENIE STANU NAPRĘŻENIA W OBSZAR SZTYWNY DLA PEWNYCH ROZWIĄZAŃ W MECHANICE GRUNTÓW

LECH DIETRICH, WIESŁAW TRĄMPCZYŃSKI (WARSZAWA)

W pracy przedstawiono sposób wyznaczania statycznie dopuszczalnego stanu naprężenia poza obszarem uplastycznionym dla procesu urabiania gruntu za pomocą lemiesza spycharki. Wykorzystując rozwiązania matematycznej teorii ośrodków sypkich w obszarze uplastycznionym określano przedłużenia w obszar sztywny zarówno przy przyjęciu warunku stanu granicznego Coulomba jak i Treski. We wszystkich opisanych rozwiązaniach uwzględniono ciężar własny ośrodka.

### 1. WSTĘP

Jednym z istotnych problemów przy rozwiązywaniu zagadnień brzegowych dla ciał sztywno-idealnie plastycznych jest znalezienie przedłużenia stanu naprężenia w obszar sztywny, tzn. wykazanie, że nigdzie poza polem uplastycznionym nie jest przekroczony warunek plastyczności ośrodka.

W sformułowanym przez BISHOPA [1] zagadnieniu konstrukcji przedłużenia założono, że w części obszaru sztywnego stan naprężenia spełnia warunek plastyczności. Uzyskane rozwiązanie ograniczone jest następnie liniami nieciągłości naprężeń, poza którymi stan naprężenia jest poniżej warunku plastyczności. Zaproponowana przez BISHOPA metoda pozwoliła na uzyskanie wielu kompletnych rozwiązań teorii plastyczności dla ośrodków, których przejście w stan plastyczny nie zależy od pierwszego niezmiennika naprężeń. W niewielu natomiast przypadkach podejmowano próby budowania przedłużenia stanu naprężenia w obszar sztywny dla gruntów. Do klasycznych rozwiązań należy podane przez COXA, EASONA i HOPKINSA [2] przedłużenie dla wciskania sztywnego, osiowo-symetrycznego stempla w ośrodek opisany warunkiem Coulomba-Mohra. Dla analogicznego zadania w płaskim stanie odkształcenia przedłużenie stanu naprężenia w obszar sztywny podał SALEÇON [3]. W obu tych rozwiązaniach [2 i 3] nie uwzględniono ciężaru własnego ośrodka, który w przypadku gruntów ma istotne znaczenie.

W niniejszej pracy przedstawiono przedłużenia stanu naprężenia w obszar sztywny dla problemu urabiania gruntu lemieszem o zarysie prostoliniowym. Podane przykłady rozwiązano przy założeniu zarówno warunku plastyczności Coulomba-Mohra jak i warunku Treski. We wszystkich przypadkach uwzględniono ciężar własny ośrodka.

Rozwiązanie w obszarze uplastycznionym dla pracy lemiesza przedstawił SZCZEPIŃSKI [4 i 5]. Obszerny ich opis i dyskusję można znaleźć w monografii [6].

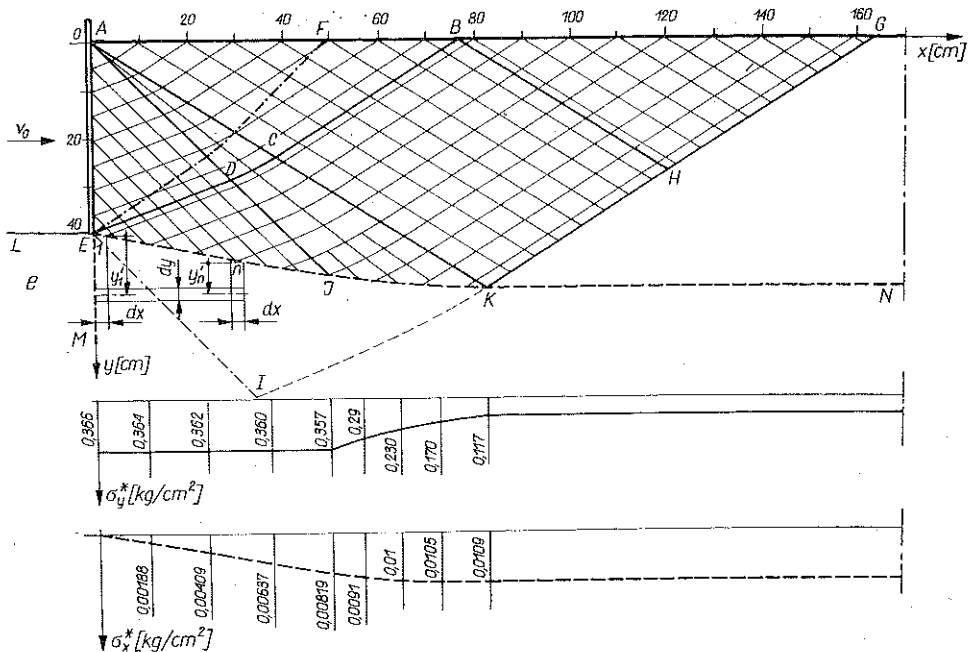
Jako punkt wyjścia dla wyznaczenia przedłużenia stanu naprężenia w obszar sztywny przyjęto rozwiązanie w obszarze uplastycznionym przedstawione w pracy [7], w której można znaleźć szczegółowy opis zarówno procedury numerycznej jak i analizę uzyskanych wyników. W pracy niniejszej ograniczymy się więc tylko do bardzo ogólnego omówienia tej części rozwiązania.

2. PRZEDŁUŻENIE STANU NAPRĘŻENIA W OBSZAR SZTYWNY DLA OŚRODKA TYPU COULOMBA-MOHRA ZE SPÓJNOŚCIĄ

Określenie stanu naprężenia przy pracy lemiesza spychacza jest analogiczne do wyznaczenia parcia na ścianę oporową [8]. Charakterystyki układu równań równowagi i związku wzdułuż nich zachodzące mają odpowiednio postać

$$(2.1) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi \pm \varepsilon), \quad d\sigma \pm 2\sigma \operatorname{tg} \rho d\varphi = \gamma(dy \pm \operatorname{tg} \rho dx),$$

gdzie  $\varphi$  oznacza kąt, jaki tworzy kierunek większego z naprężeń głównych z osią  $x$ ,  $\sigma$  sumę średniego naprężenia i wytrzymałości na trójosiowe rozciąganie  $H$ ,  $\gamma$  ciężar objętościowy ośrodka,  $\rho$  kąt tarcia wewnętrznego, a  $\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}$  kąt, jaki tworzą charakterystyki z kierunkiem większego z naprężeń głównych. Zagadnienie Cauchy'ego w trójkącie  $ABC$  (rys. 1) wyznaczone jest warunkami brzegowymi wzdułuż swobodnej krawędzi  $AB$ , na której znane są wartości i kierunki naprężeń głównych.



Rys. 1

Dla przedstawionej na rys. 1 sytuacji mamy  $\varphi=0$  oraz  $\sigma=H/(1-\sin \rho)$ . Ta ostatnia zależność wynika z zerowania się wzdłuż brzegu  $AB$  naprężenia głównego o kierunku prostopadłym do osi  $x$ .

Założone warunki tarcia na lemieszu określają kąt wachlarza w punkcie  $A$  i po rozwiązaniu zagadnienia zdegenerowanego  $CAD$  wyznaczają wspólnie z danymi wzdłuż charakterystyki  $AD$  zagadnienie mieszane w polu  $ADE$ . Przedstawione na rys. 1 rozwiązanie otrzymano przyjmując następujące dane liczbowe:

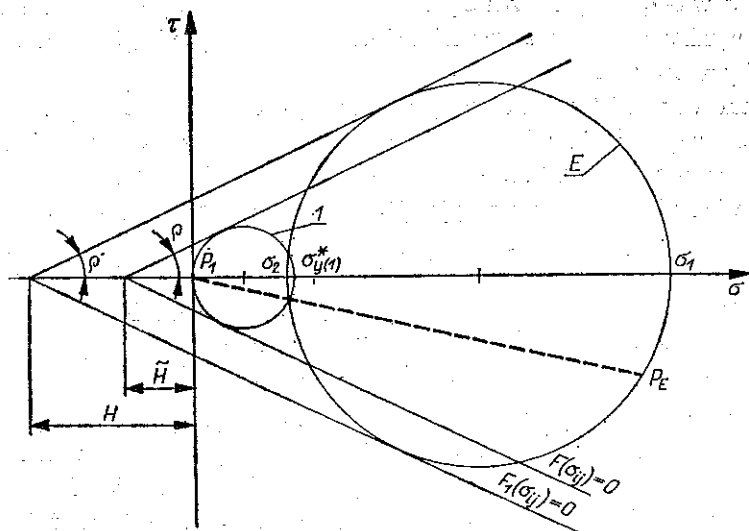
$$\gamma=2,25 \cdot 10^{-3} \text{ kG/cm}^3, \quad \rho=25^\circ, \quad k=0,5 \text{ kG/cm}^2 \quad i \quad \mu=0,2.$$

Wartość  $H$  określona przez  $\rho$  i spójność ośrodka  $k$  wynosi  $1,07 \text{ kG/cm}^2$ . Współczynnik tarcia  $\mu$  zdefiniowany jest jako stosunek składowej stycznej do składowej normalnej naprężenia działającego na element powierzchni lemieszka.

Znając stan naprężenia wzdłuż charakterystyki  $BCDE$  przystępujemy do wyznaczenia przedłużenia stanu naprężenia w obszar sztywny. Wpierw poszukujemy takiego pola naprężenia poniżej linii  $BCDE$ , które spełnia równania równowagi i warunków plastyczności rozpatrywanego ośrodka  $F_1(\sigma_{ij})=0$ . Wykorzystując warunki brzegowe wzdłuż swobodnej krawędzi brzegu  $BG$  [ $\varphi=0$ ,  $\sigma=H/(1-\sin \rho)$ ] rozwiązujemy, opierając się na równaniach (2.1), zagadnienie Cauchy'ego w trójkącie  $BGH$ , a następnie zagadnienie charakterystyczne w krzywoliniowym czworokącie  $BHIE$ . Położenie punktu  $G$  nie jest znane w pierwszej fazie rozwiązania i będzie określone w dalszej części pracy. Wyznaczone w ten sposób pole naprężenia ograniczamy, poczynając od punktu  $E$ , linią nieciągłości naprężenia  $EJKN$ . Pole naprężeń poniżej tej linii budujemy tak, żeby w żadnym miejscu nie był przekroczony warunek plastyczności ośrodka, żeby nie występowały naprężenia rozciągające oraz żeby kierunki główne naprężeń poniżej  $EJKN$  pokrywały się z osiami  $x$  i  $y$ . Dwa ostatnie założenia przyjęto, aby można było ograniczyć przedłużenia w obszar sztywny przez pionowe i poziome, sztywne ściany obciążone jedynie ściskającymi naprężeniami normalnymi. Poza tym musi być spełniony warunek ciągłości naprężeń przy przejściu przez linię  $EJKN$ .

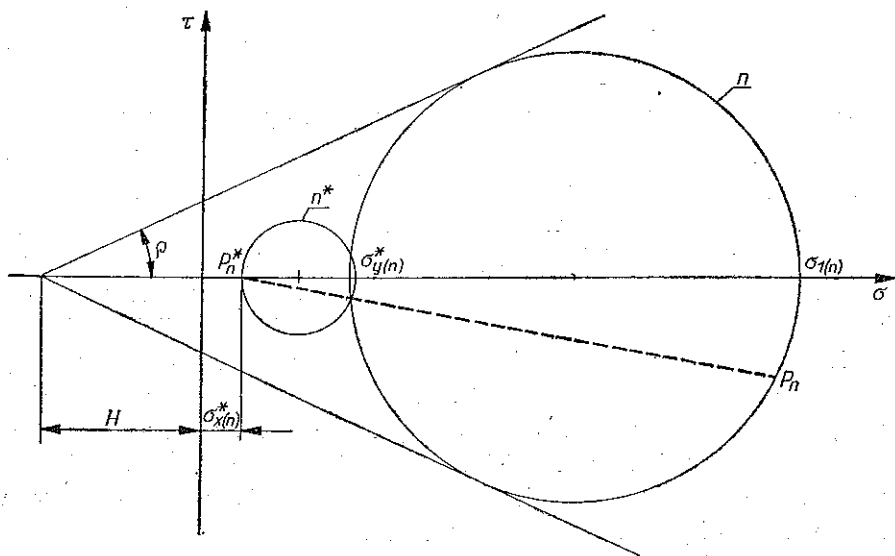
Sposób wyznaczania kierunku linii nieciągłości ilustruje konstrukcja wykreślona na płaszczyźnie kół Mohra, pokazana schematycznie na rys. 2. Koło  $E$  i biegun  $P_E$  reprezentuje stan naprężenia w punkcie  $E$  od strony obszaru uplastycznionego. Pamiętając, że biegun  $P_1$  koła Mohra dla stanu naprężenia poniżej linii nieciągłości leży na osi  $\sigma$  (kierunki  $x$  i  $y$  płaszczyzny fizycznej są kierunkami głównymi), przyjmujemy wstępnie jego położenie w początku układu  $\sigma$ ,  $\tau$  (chcemy uniknąć naprężeń rozciągających). Linia łącząca bieguny  $P_E$  i  $P_1$  wyznacza kierunek linii nieciągłości, poniżej której stan naprężenia będzie reprezentowany przez koło 1 przechodzące przez biegun  $P_1$  i punkt przecięcia koła  $E$  z prostą  $P_1 P_E$ . W sytuacji przedstawionej na rys. 1, kiedy stan naprężenia odwzorowany kołem 1 nie przekracza warunku plastyczności, wyznacznie kierunku linii nieciągłości w rozpatrywanym punkcie jest zakończone. W przeciwnym wypadku przesuujemy położenie bieguna  $P_1$  w dodatnim kierunku osi  $\sigma$  i powtarzamy całą procedurę.

Linie nieciągłości w kolejnych punktach jej przecięcia z charakterystykami obszaru  $EBHI$  wyznaczamy w podobny sposób, uwzględniając jeszcze dodatkowy



Rys. 2

warunek stałości naprężeń  $\sigma_x$  na określonej głębokości  $y$  (rys. 1). Położenie bieguna  $P_n$  na kole Mohra  $n$  (rys. 3), odwzorowującego stan naprężenia w punkcie  $n$  od strony obszaru uplastycznionego oraz położenie bieguna  $P_n^*$  dla stanu naprężenia bezpośrednio pod wyznaczaną linią, określa kierunek tej linii i wartość  $\sigma_y^*(n)$ . Położenie punktu  $P_n^*$  na osi  $\sigma$  wynika z równości naprężeń w kierunku osi  $x$  dla tej samej głębokości ( $\sigma_{x(n)}^* = \sigma_{x(1)}$ ).



Rys. 3

Zakładamy dalej, że w pionowym słupku o nieskończonej małej szerokości  $dx$ , ustawionym pod punktem  $E$  i oznaczonym cyfrą 1, stan naprężenia na dowolnej głębokości, określonej odległością  $y'_1$  od linii nieciągłości wyznaczony jest wzorami

$$(2.2) \quad \sigma_{y(1)} = \sigma_{y(1)}^* + \gamma y'_1$$

oraz

$$(2.3) \quad \sigma_{x(1)} = \eta \sigma_{y(1)},$$

w których indeks ujęty w nawias określa numer przekroju pionowego, gwiazdka natomiast oznacza naprężenia działające bezpośrednio pod linią nieciągłości. Wartość współczynnika  $\eta$ , wynosząca

$$(2.4) \quad \eta = \frac{1 - \sin \rho}{1 + \sin \rho} \frac{2\bar{H} \sin \rho}{\sigma_{y(1)}(1 + \sin \rho)},$$

wynika z przyjęcia, że w całym słupku spełniony jest nowy warunek Coulomba-Mohra  $F(\sigma_{ij}) = 0$  o takim samym kącie tarcia wewnętrznego  $\rho = 25^\circ$ , jak w całym obszarze, ale o wytrzymałości na trójosiowe rozciąganie  $\bar{H}$ , wynikającej ze stanu naprężenia odwzorowanego kołem Mohra 1 na rys. 2. Zapewniamy w ten sposób, że stan naprężenia na dowolnej głębokości spełnia warunek  $F_1(\sigma_{ij}) < 0$ . Wartość  $\bar{H}$  w rozpatrywanym przypadku określona jest wzorem

$$(2.5) \quad \bar{H} = \frac{\sigma_{y(1)}^*(1 - \sin \rho)}{2 \sin \rho},$$

co po uwzględnieniu we wzorze (2.4) i przekształceniu zależności (2.3) doprowadza do prostego związku między naprężeniem  $\sigma_{x(1)}$  i głębokością  $y'_1$

$$(2.6) \quad \sigma_{x(1)} = \frac{1 - \sin \rho}{1 + \sin \rho} \gamma y'_1.$$

Dla dowolnego punktu na linii nieciągłości naprężenie  $\sigma_{x(n)}$  od strony obszaru dolnego jest wyznaczone przez stan naprężenia panujący w słupku 1 i wynosi

$$(2.7) \quad \sigma_{x(n)}^* = \eta [\sigma_{y(1)}^* + \gamma (y_n - y_E)],$$

gdzie przez  $y_n$  i  $y_E$  oznaczono odległości punktów  $n$  i  $E$  od osi  $x$ , a współczynnik  $\eta$  określony jest przez wzór (2.4). Naprężenie w kierunku osi  $y$  w pionowym słupku o nieskończonej małej szerokości  $dx$  pod punktem  $n$  na dowolnej głębokości  $y'_n$ , mierzonej dla danego słupka od linii nieciągłości, określone jest za pomocą wzoru

$$(2.8) \quad \sigma_{y(n)} = \sigma_{y(n)}^* + \gamma y'_n.$$

Począwszy od punktu  $K$ , w którym linia nieciągłości wchodzi w obszar wpływu swobodnego brzegu  $AG$ , zarówno jej kierunek jak i wartość naprężeń  $\sigma_y^*$  i  $\sigma_x^*$  nie ulegają zmianie i naprężenia te mogą rozchodzić się do nieskończoności lub kończyć się w dowolnym miejscu w przypadku wstawienia w ośrodek sztywnej ściany zdolnej do przeniesienia naprężeń  $\sigma_x$ . Punkt  $K$  określa położenie punktu  $G$  na swobodnym brzegu.

Łatwo wykazać, że stan naprężenia poniżej linii *EJKN* nigdzie nie przekracza warunku stanu granicznego ośrodka. Wzdłuż poziomych pasków o szerokości *dy* naprężenie  $\sigma_x$  jest stałe, określone wzorem (2.3). Naprężenia  $\sigma_y$  w pionowych słupkach 1 i *n* określone są wzorami (2.2) i (2.8). W rozpatrywanym przykładzie (rys. 1) dla jednokowej odległości od osi *x* spełnione są nierówności  $\sigma_{y(n)}^* < \sigma_{y(1)}^*$  i  $y_n' < y_1'$ , stąd wynika, że  $\sigma_{y(n)} < \sigma_{y(1)}$  oraz  $\eta_n > \eta_1$ , co oznacza, że stan naprężenia poniżej linii *EJKN* w dowolnym przekroju pionowym jest poniżej warunku Coulomba-Mohra  $F(\sigma_{ij})=0$ , który spełniają składowe naprężenia w pionowym przekroju pod punktem *E*. Formułując to ogólnie, można powiedzieć, że stan naprężenia w rozpatrywanym polu spełnia warunek  $F(\sigma_{ij}) \leq 0$ , o ile rozkład naprężeń  $\sigma_y$  nie jest rosnącą funkcją wzdłuż linii *EJKN* i gdy odległość tej linii od osi *x* nie ulega zmniejszeniu dla rosnących *x*, co jest równoważne warunkowi  $dy/dx \geq 0$  wzdłuż *EJKN*.

Przedstawione pole może być przedłużone dla nieskończonej głębokości *y* lub też może być w dowolnym poziomym przekroju poniżej linii *KN* ograniczone przez sztywne dno, zdolne do przeniesienia naprężeń  $\sigma_y$  wynikających z rozwiązania.

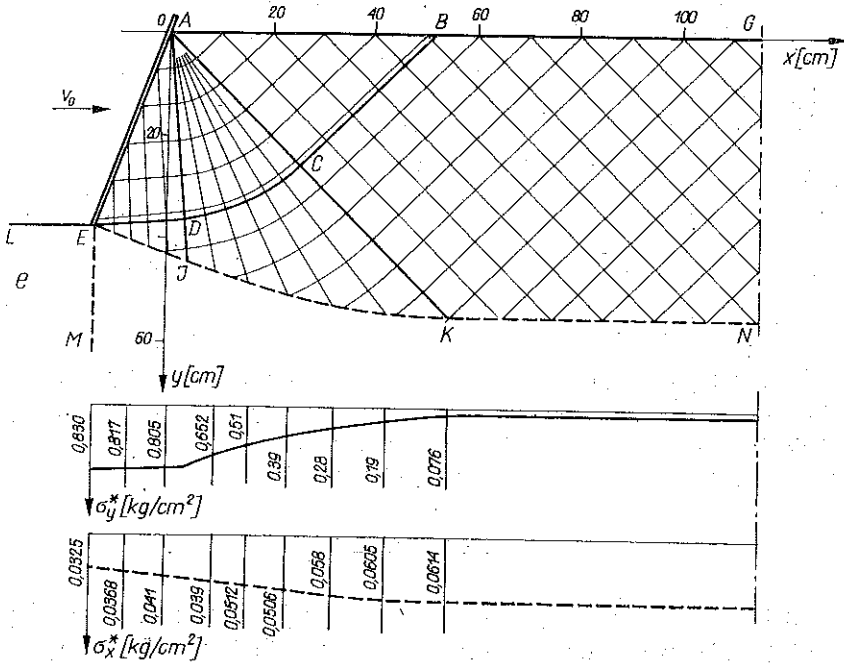
W obszarze na lewo od linii *EM* naprężenie  $\sigma_x$  jest określone przez wzór (2.6). Naprężenie  $\sigma_y$  zależy wyłącznie od głębokości *y*, liczonej od swobodnej krawędzi *EL* i wynosi  $\sigma_y = \gamma y'$ . W całym więc obszarze oznaczonym przez *e* stosunek mniejszego do większego naprężenia głównego ma stałą wartość wynikającą z (2.6), przy czym

$$(2.9) \quad \eta_e = \frac{1 - \sin \rho}{1 + \sin \rho}.$$

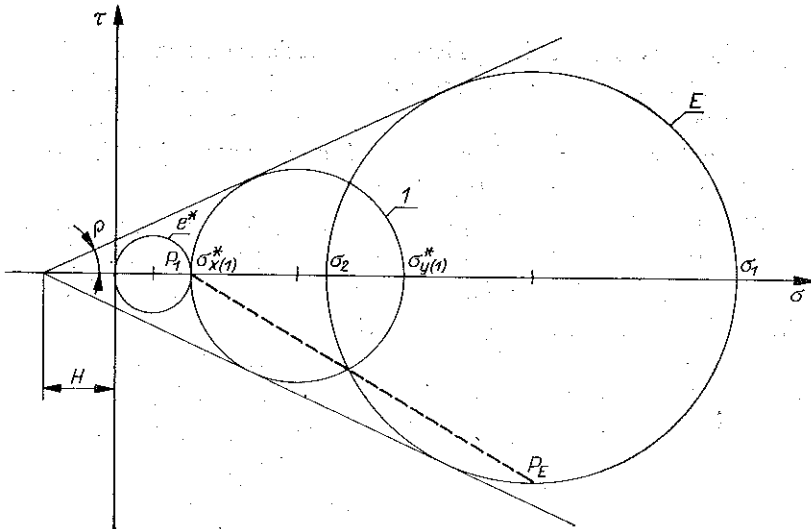
Współczynnik ten jest zawsze większy od liczby określonej przez wzór (2.4). Znaczy to, że stan naprężenia w obszarze *e* spełnia warunek  $F(\sigma_{ij}) \leq 0$ , a tym samym w obszarze tym nie jest przekroczony stan graniczny ośrodka. Stan naprężenia w obszarze *e* nie zależy od współrzędnej *x* i może propagować się w nieskończoność. Obszar ten pozostanie statycznie dopuszczalny, jeśli w dowolnym punkcie krawędzi *EL* ograniczymy go pionową sztywną ścianą, która przeniesie naprężenia  $\sigma_x$  określone wzorem (2.6).

Opisana procedura nie ulega zmianie dla innych warunków brzegowych rozpatrywanej klasy problemów. Jako przykład na rys. 4 przedstawiono rozwiązanie dla lemieszka nachylnego pod kątem  $115^\circ$  do osi *x* i przesuwanego w kierunku tej osi. Parametry warunku Coulomba-Mohra, opisującego przejście materiału w stan plastyczny, są takie same jak w poprzednio opisanym przypadku. Przyjęto też taki sam współczynnik tarcia  $\mu=0,2$  między lemieszem i gruntem. Niezmienione pozostają warunki brzegowe wzdłuż swobodnego brzegu *AB* oraz wyznaczenie rozwiązania dla naprężeń w obszarze uplastycznionym *ABCDE* opierając się na równaniu (2.1).

Konstrukcję przedłużenia stanu naprężenia w obszarze sztywny zaczynamy od rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego i następnie zagadnienia charakterystycznego na podstawie danych wzdłuż linii *BCDE* i *BH*. Począwszy od punktu *E* wyznaczamy linię nieciągłości naprężeń zgodnie z podaną poprzednio procedurą. W rozpatrywanym przypadku przyjmując wstępne położenie bieguna  $P_1$  w początku układu  $\sigma, \tau$  okazuje się, że naprężenia pod linią nieciągłości przekraczają warunek stanu granicznego ośrodka. Przesuwamy więc biegun  $P_1$  w dodatnim kierunku osi  $\sigma$  w takie



Rys. 4



Rys. 5

położenie, przy którym naprężenia po drugiej stronie linii nieciągłości spełniają warunek plastyczności ośrodka  $F_1(\sigma_{ii})=0$ . Odzworowanie stanu naprężenia po obu stronach linii nieciągłości w punkcie  $E$  podano na rys. 5.

W pionowym przekroju pod punktem  $E$  naprężenia określone wzorami (2.2) i (2.3) spełniają warunek plastyczności ośrodka. Stosunek mniejszego do większego naprężenia głównego wynika ze wzoru (2.4) po podstawieniu  $\tilde{H}=H$ .

Wyznaczenie kierunku linii nieciągłości w pozostałych punktach jest takie samo jak poprzednio i stan naprężenia w każdym miejscu obszaru poniżej linii  $EJKN$  nie przekracza warunku plastyczności ośrodka.

W obszarze na lewo od linii  $EM$  naprężenie w kierunku osi  $x$  określone jest za pomocą wzoru (2.3). Naprężenie w kierunku pionowym zależy wyłącznie od głębokości  $y'$ , określonej od krawędzi  $EL$ , i wynosi  $\sigma_y = \gamma y'$ . Wzdłuż swobodnej krawędzi  $EL$  mamy  $\sigma_x > 0$ ,  $\sigma_y = 0$  (koło  $e$ , rys. 4) i stan ten spełnia warunek plastyczności. W miarę zwiększania głębokości  $\sigma_y$  rośnie szybciej od  $\sigma_x$ , ale przez cały czas obie wielkości nie spełniają warunku plastyczności. Ich różnica ulega stopniowemu zmniejszeniu, osiągając zerową wartość na głębokości

$$(2.10) \quad y' = \frac{(1 + \sin \rho) \sigma_{x(1)}^*}{2\gamma \sin \rho}$$

Przy dalszym zwiększaniu głębokości spełniony jest warunek  $\sigma_y > \sigma_x$  i postępując podobnie jak w opisanym poprzednio rozwiązaniu łatwo można sprawdzić, że stan ten nigdzie nie przekracza warunku plastyczności. Skonstruowane przedłużenie pola naprężeń w obszar sztywny jest więc statycznie dopuszczalne.

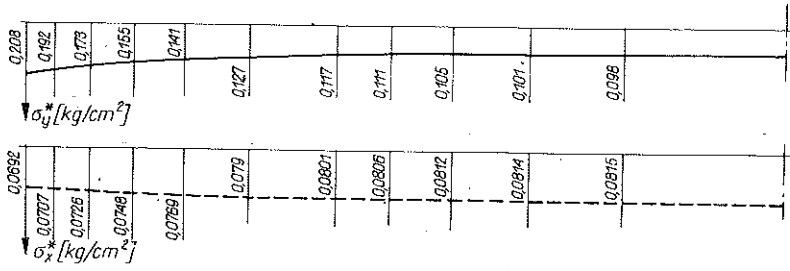
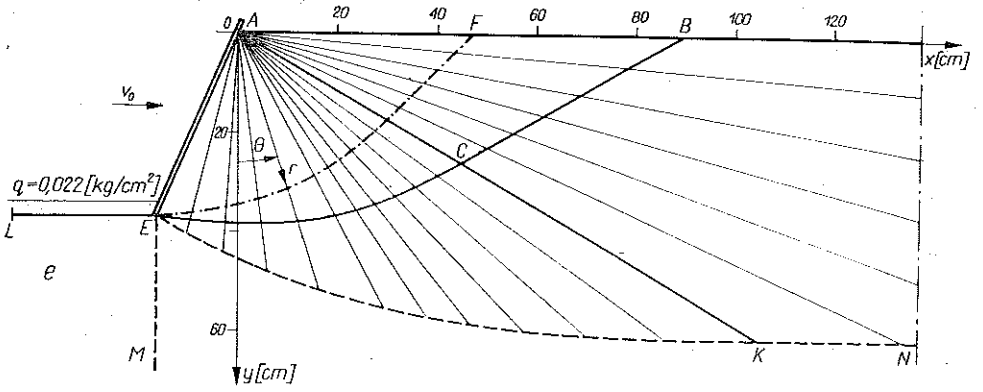
### 3. PRZEDŁUŻENIE STANU NAPRĘŻENIA W OBSZAR SZTYWNY DLA IDEALNIE SYPKIEGO OŚRODKA COULOMBA-MOHRA

W przypadku ośrodka idealnie sypkiego rozwiązania w obszarze uplastycznionym uzyskano przy założeniu radialnego rozkładu naprężeń [8]. Przedstawione na rys. 6 rozwiązanie dla lemiesza nachylonego pod kątem  $115^\circ$  do osi  $x$  otrzymano dla ośrodka o ciężarze objętościowym  $\gamma = 1,6 \cdot 10^{-3}$  kG/cm<sup>3</sup> i następujących parametrach  $\rho$  i  $H$  warunku plastyczności:  $\rho = 30^\circ$ ,  $H = 0$ .

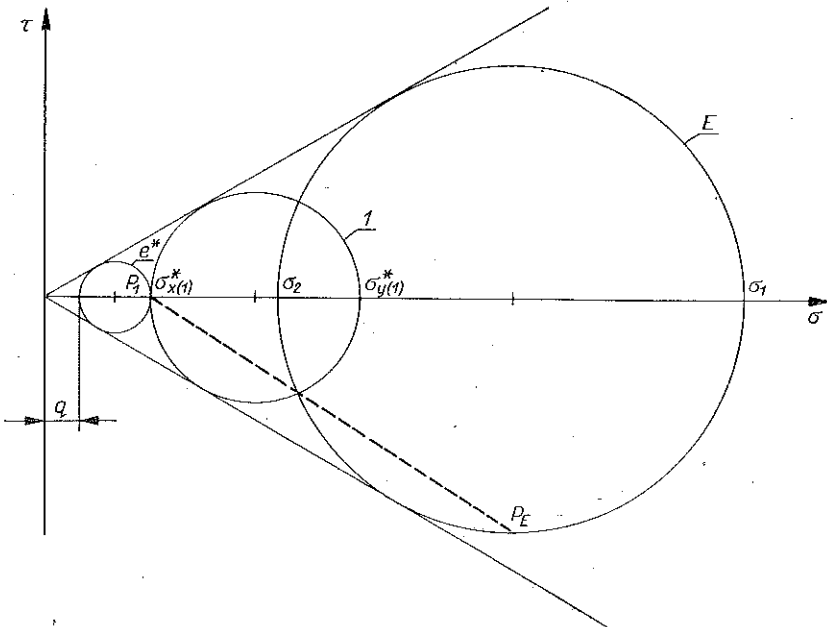
We współrzędnych biegunowych  $r$ ,  $\theta$  wprowadzamy dodatkową funkcję  $s = s(\theta)$ , która określa średnie naprężenie według wzoru  $\sigma = \gamma r s(\theta)$ . Przyjmując wartość funkcji  $s_0$  na lemieszu, obliczamy kąt  $\varphi$  w ten sposób, żeby stosunek składowych naprężeń na lemieszu był zgodny z przyjętym współczynnikiem tarcia  $\mu = 0,2$ . Rozwiązując następnie numerycznie układ równań różniczkowych wzdłuż  $\theta$  sprawdzamy, czy spełniony jest warunek ciągłości na linii  $AC$  rozwiązania Rankina dla obszaru  $ABC$ . W razie potrzeby powtarzamy procedurę, przyjmując nową wartość  $s_0$  tak długo, aż otrzymamy ciągle rozwiązanie w całym obszarze. Znajomość funkcji  $s$  pozwala na określenie składowych naprężeń i wykreślenie linii poślizgu pola naprężeń.

Konstrukcja linii nieciągłości naprężeń  $EKN$  jest identyczna z konstrukcją poprzednio opisaną. Kierunek linii nieciągłości w punkcie  $E$  określamy, przyjmując





Rys. 6



Rys. 7

taką minimalną wartość  $\sigma_{x'}^*$ , aby stan naprężenia bezpośrednio poniżej tej linii spełniał warunek plastyczności dla rozpatrywanego ośrodka. Wyznaczenie kierunków szukanej linii w kolejnych punktach jej przecięcia z poszczególnymi promieniami jak i sprawdzenie, czy w żadnym miejscu poniżej tej linii (niezależnie od głębokości) nie jest przekroczony warunek plastyczności, niczym nie różni się od procedury opisanej w p. 2.

W obszarze  $e$  ograniczonym krawędzią  $EL$  i linią  $EM$  wartość naprężenia w kierunku osi  $x$  równa się odpowiedniej składowej stanu naprężenia występującego na tej samej głębokości po prawej stronie linii nieciągłości  $EM$ . Ze względu na osłabiłość ( $H=0$ ) warunku plastyczności, odnoszącego się do ośrodków idealnie sypkich, musimy założyć występowanie wzdłuż całej krawędzi  $EL$  równomiernie rozłożonego nacisku  $q$ , którego wartość wynika z warunku spełnienia stanu granicznego (rys. 7); wynosi ona

$$(3.1) \quad q = \left( \frac{1 - \sin \rho}{1 + \sin \rho} \right)^2 \sigma_{y(1)}^*.$$

Naprężenia w rozpatrywanym obszarze  $e$  określają wzory:

$$(3.2) \quad \sigma_{y(e)} = q + \gamma y'$$

oraz

$$(3.3) \quad \sigma_{x(e)} = \sigma_{x(1)}.$$

Wzdłuż krawędzi  $EL$  dla  $y' = 0$  wielkości te spełniają warunek plastyczności, przy czym  $\sigma_{x(e)} > \sigma_{y(e)}$ . Przy zwiększaniu głębokości naprężenie w kierunku  $y$  rośnie szybciej niż  $\sigma_{x(e)}$  i różnica  $\sigma_{x(e)} - \sigma_{y(e)}$  zmniejsza się osiągając zerową wartość na głębokości

$$(3.4) \quad y'_0 = \frac{(1 + \sin \rho) q}{(1 - \sin \rho) \gamma}.$$

Dla głębokości większych od  $y'_0$  naprężenia spełniają warunek  $\sigma_{y(e)} > \sigma_{x(e)}$  i podobnie jak w p. 2 łatwo wykazać, że w żadnym miejscu nie jest przekroczony warunek plastyczności.

Przedstawione pole naprężeń jest więc statycznie dopuszczalne, o ile wzdłuż krawędzi  $EL$  od punktu  $E$  aż do nieskończoności przyłożone jest obciążenie  $q$ . Podobnie jednak jak we wszystkich tego typu polach można je ograniczyć poziomymi i pionowymi ścianami. Pole to pozostanie oczywiście statycznie dopuszczalne, jeśli ograniczymy je pionową ścianą wzdłuż linii nieciągłości naprężenia  $EM$ .

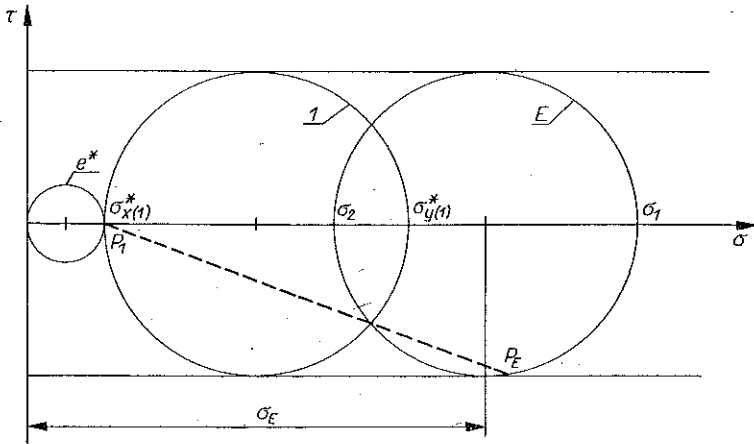
#### 4. OŚRODEK IDEALNIE SPOISTY

Trzecim często spotykanym warunkiem określającym przejście gruntu w stan plastyczny jest warunek Treski:

$$(4.1) \quad \sigma_1 - \sigma_2 = 2k,$$



stan naprężenia, spełniający zależność (4.1) (koło 1 na rys. 9). Natomiast w przypadku, gdy wartość  $\sigma_E$  (rys. 9) będzie dostatecznie mała, naprężenie  $\sigma_{x(1)}^*$  pod linią nieciągłości będzie równe zero i stan naprężenia w całym pionowym przekroju pod punktem  $E$  nie będzie spełniał warunku plastyczności ośrodka.



Rys. 9

W ogólnym przypadku naprężenia w pionowym przekroju pod punktem  $E$  określone są wzorem

$$(4.4) \quad \sigma_{y(1)} = \sigma_{y(1)}^* + \gamma y_1'$$

oraz

$$(4.5) \quad \sigma_{x(1)} = \sigma_{y(1)} - 2\tilde{k},$$

w których liczba  $\tilde{k}$  zależy od wartości  $\sigma_E$  i w przypadku przedstawionym na rys. 9 mamy  $\tilde{k} = k$ .

Wyznaczenie wykresu linii  $EJKN$  w dalszych punktach jest identyczne z opisanym poprzednio. Prawdziwe jest również stwierdzenie, że warunkiem wystarczającym, żeby w żadnym miejscu tak określonego pola naprężeń na prawo od punktu  $E$  i poniżej linii  $EJKN$  nie był przekroczony stan graniczny, jest żeby rozkład naprężeń  $\sigma_y^*$ , występujących bezpośrednio pod linią nieciągłości, nie był rosnącą funkcją  $x$  i żeby wzdłuż tej linii spełniony był warunek  $dy/dx \geq 0$ .

Pozostaje tylko sprawdzić, czy w obszarze  $e$  na lewo od linii nieciągłości  $EM$  jest spełniony warunek stanu granicznego. Działające w tym obszarze naprężenia w kierunku osi  $x$  można określić z równości normalnych naprężeń po obu stronach linii  $EM$ . Składowa w kierunku osi  $y$  zależy od głębokości  $y'$ , mierzonej od krawędzi  $EL$ . Po uwzględnieniu wzorów (4.4) i (4.5) stan ten można wyrazić w formie

$$(4.6) \quad \sigma_{y(e)} = \gamma y_1'$$

oraz

$$(4.7) \quad \sigma_{x(e)} = \sigma_{y(1)}^* + \gamma y_1' - 2\tilde{k},$$

przy czym w zależności od wielkości naprężenia  $\sigma_{y(1)}^*$ , występującego w punkcie  $E$  pod linią nieciągłości  $EJKN$ , możliwe są dwa przypadki. W pierwszym, określonym warunkiem  $\sigma_{y(1)}^* \leq 2k$ , mamy  $\tilde{k} \leq k$  i  $\sigma_{y(1)}^* = 2\tilde{k}$ , z czego wynika, że w całym obszarze  $e$  niezależnie od głębokości mamy stan hydrostatycznego ściskania. W drugim natomiast przypadku pokazanym na rys. 8 dla  $\sigma_{y(1)}^* > 2k$  mamy  $\tilde{k} = k$  i stan naprężenia wzdłuż pionowego przekroju pod punktem  $E$  spełnia warunek plastyczności (4.1). Różnica naprężeń głównych w obszarze  $e$  wynikająca ze wzorów (4.6) i (4.7):

$$(4.8) \quad \sigma_{x(e)} - \sigma_{y(e)} = \sigma_{y(1)}^* - 2k,$$

jest stała niezależnie od głębokości  $y'$ , mierzonej od krawędzi  $EL$ . Warunek plastyczności będzie spełniony w każdym punkcie tego obszaru, o ile spełniona jest nierówność  $\sigma_{y(1)}^* \leq 4k$ . Dla większych wartości naprężeń, gdy  $\sigma_{y(1)}^* > 4k$ , dla tego żeby stan naprężenia w obszarze  $e$  spełniał warunek Treski, konieczne jest przyłożenie wzdłuż krawędzi  $EL$  równomiernie rozłożonych nacisków w kierunku osi  $y$  o wartości  $q = \sigma_{y(1)}^* - 4k$ . Przypadek ten rozważamy jedynie dla formalnej ścisłości, ponieważ dla rozwiązywania konkretnych problemów brzegowych będzie na ogół spełniony warunek  $\sigma_{y(1)}^* \leq 4k$ .

Z powyższego wynika, że dla ośrodków idealnie spoistych, których przejście w stan plastyczny opisane jest warunkiem Treski, zaproponowane przedłużenie pola naprężeń w obszar sztywny jest statycznie dopuszczalne.

## 5. WNIOSKI

Przedstawione w pracy dla różnych typów ośrodków z uwzględnieniem ich ciężaru własnego przedłużenia pola naprężeń w obszar sztywny dla pracy lemiesza spychacza mogą być zastosowane do znacznie szerszej klasy zadań. Z łatwością można je wykorzystać np. w rozwiązaniach problemów parcia ośrodka na ściany oporowe czy też stateczności skarp.

Otrzymane statycznie dopuszczalne przedłużenia pola naprężeń w obszar sztywny stanowią istotne rozwiązania teorii plastyczności. Są one niezbędne do uzyskania rozwiązań kompletnych w przypadku zastosowania prawa płynięcia związanego z warunkiem plastyczności.

Opisany w niniejszej pracy typ pola naprężeń może być ograniczony sztywnymi ścianami, które nie wchodzi w zakres obszaru plastycznego płynięcia, ograniczonego na zamieszczonych rysunkach odpowiednio linią  $BCDE$  dla stowarzyszonego prawa płynięcia lub linią punktową  $EF$  przy wykorzystaniu warunków nieściśliwości i izotropii. Zbudowane pole naprężeń pozwala określić zarówno rodzaj jak i wartość naprężeń działających na sztywne ściany. Jest to szczególnie istotne w badaniach modelowych mechaniki ośrodków sypkich, dla których brak było dotychczas jakichkolwiek metod wyznaczania niezbędnych, minimalnych odległości powierzchni swobodnej od dna pojemnika, czy odległości narzędzia od przedniej i tylnej ściany. Przedłużenie w obszar sztywny dają więc podstawę do prawidłowego zaprojektowania badań doświadczalnych jak i właściwej ich interpretacji.

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. F. BISHOP, *On the complete solutions to problems of deformation of plastic-rigid material*, J. Mech. Phys. Solids, 2, 43–53, 1953.
2. A. D. COX, G. EASON, H. G. HOPKINS, *Axially symmetric plastic deformations in soils*, Philosophical Trans. Roy. Soc. of London, 254. A, 1036, 1961.
3. J. SALENÇON, *Sur le prolongement statique des champs de Prandtl pour le matériau de Coulomb*, Arch. Mech. Stos., 25, 4, 646–648, 1973.
4. W. SZCZEPIŃSKI, *Mechanika ruchu ośrodka sypkiego przy pracy łyżki ładowarki*, Arch. Bud. Maszyn, 18, 463–478, 1971.
5. W. SZCZEPIŃSKI, *Mechanika ruchu ośrodka sypkiego w początkowej fazie pracy lemieszki sypkarki*, Arch. Bud. Maszyn, 19, 15–24, 1972.
6. W. SZCZEPIŃSKI, *Stany graniczne i kinematyka ośrodków sypkich*, PWN, Warszawa 1974.
7. W. TRĄMPCZYŃSKI, *Mechanika procesów urabiania gruntów jako zagadnienie teorii plastyczności*, Praca doktorska, IPPT PAN.
8. W. W. SOKOŁOWSKI, *Statyka ośrodków sypkich*, PWN, Warszawa 1958.

## Резюме

## ПРОДОЛЖЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ЖЕСТКУЮ ОБЛАСТЬ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЙ В МЕХАНИКЕ ГРУНТОВ

В работе представлен способ определения статически допустимого напряженного состояния вне области пластического течения для процесса разработки грунта с помощью отвала бульдозера.

Используя решения математической теории сыпучих сред в области пластического течения определено продолжение в жесткую область так при принятии условия предельного состояния Кулона, как и Треска. Во всех описанных решениях учтен собственный вес среды.

## SUMMARY

## EXTENSION OF STRESS STATE INTO A RIGID REGION FOR CERTAIN SOLUTIONS OF SOIL MECHANICS

In a paper a manner of determining of statically admissible stress state beyond the plastic region for earthmoving process by means of bulldozer blade is presented. Using solutions of mathematical theory of soils in plastic region the extensions into rigid region under assumption as well of Coulomb as Tresca limit state criterion are determined. In all solutions presented a mass density was taken into account.

POLSKA AKADEMIA NAUK  
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 marca 1974 r.