

QUASI-STACJONARNY STAN NAPRĘŻEŃ TERMICZNYCH W RURZE GRUBOŚCIENNEJ

KONSTANTY SKAŁSKI (WARSZAWA)

Praca poświęcona jest wyznaczeniu stanów naprężeń termicznych, wywołanych osiowo-symetrycznym rozkładem temperatur zmiennym w czasie. Intensywne obciążenie cieplne powoduje początkowo częściowe uplastycznienie rury, a z upływem czasu jej odciążanie. Modele fizyczno-matematyczne zagadnienia sprowadzają się więc do jednoczesnego opisu stanów naprężeń i odkształceń dla sprzężonych z sobą obszarów sprężystych, plastycznych i odciążanych. Rozważane zadanie traktuje się jako quasi-stacjonarne; czas odgrywa w opisie rolę parametru.

OZNACZENIA

- r promień rury [mm],
- t czas [s],
- C, C_1, C_2 promienie stref plastycznych [mm],
- R, R_1, R_2 promienie stref odciążanych [mm],
- $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \varphi_1, \varphi_2$ charakterystyczne powierzchnie obszarów sprężystego, plastycznego odciążanego,
- α współczynnik rozszerzalności liniowej [$1/^\circ\text{K}$],
- λ współczynnik przewodzenia ciepła [$\text{W}/\text{m}^\circ\text{K}$],
- T temperatura [$^\circ\text{C}, ^\circ\text{K}$],
- q strumień ciepła [$\text{J}/\text{m}^2\text{s}$],
- $T - T^* \Big|_{t=5s} = \Delta T^-(r)$ obciążenie cieplne (rozkład temperatury) w obszarze odciążanym,
- $T - T^* \Big|_{t=30s} = \Delta T^+(r)$ obciążenie cieplne (rozkład temperatury) w obszarze odciążanym,
- ν współczynnik Poissona [—],
- E moduł sprężystości Younga [kG/mm^2],
- σ_{pl} granica plastyczności [kG/mm^2],
- $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$ naprężenia promieniowe, obwodowe, wzdłużne [kG/mm^2],
- u przemieszczenie promieniowe [mm],
- e_r, e_φ, e_z odkształcenia promieniowe, obwodowe, wzdłużne [—],
- \mathcal{E} intensywność odkształceń [—],
- E, P, O oznaczenia strefy sprężystej, plastycznej, odciążanej,
- μ czynnik skalarny w równaniach plastycznego płynięcia.
- a, b promień powierzchni wewnętrznej, zewnętrznej rury [mm].

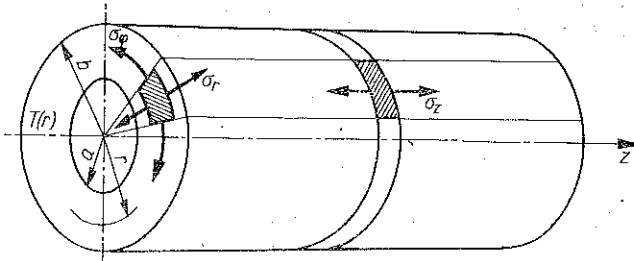
1. OPIS FIZYCZNEJ STRONY ZJAWISK

Przedstawione zagadnienie obejmuje analizę naprężeń termicznych (sprężysto-plastycznych) zachodzących w czasie, przy czym zmiany temperatury stanowiące obciążenie rury są na tyle powolne, że można rozważane stany naprężeń traktować jako quasi-stacjonarne (czas odgrywa rolę parametru).

Analizę zjawisk wytrzymałościowych przeprowadzono przy następujących założeniach: 1) materiał rury jest izotropowy; 2) rozkład temperatury w rurze jest osiowo-symetryczny i jest funkcją promienia r , nie zależy natomiast od współrzędnej z ; 3) odkształcenie wzdłużne $\varepsilon_z = 0$ (rozważane zagadnienie opisuje się w płaskim stanie odkształcenia); 4) moduł Younga E i współczynnik Poissona ν materiału rury nie zależą od temperatury, natomiast zależy od niej granica plastyczności σ_{pl} , współczynnik rozszerzalności liniowej α :

$$\sigma_{pl} = \sigma_0 + \sigma_1 T^2, \quad \alpha = \alpha_0 + \alpha_1 T.$$

Tak postawione zagadnienie sprowadza się w rezultacie do określenia w rurze σ_r , σ_φ , σ_z (rys. 1) składowych stanu naprężenia oraz składowych ε_r , ε_φ , podczas gdy przemieszczenie osiowe oraz naprężenia styczne i odkształcenia postaciowe są tożsamościowo równe zeru.

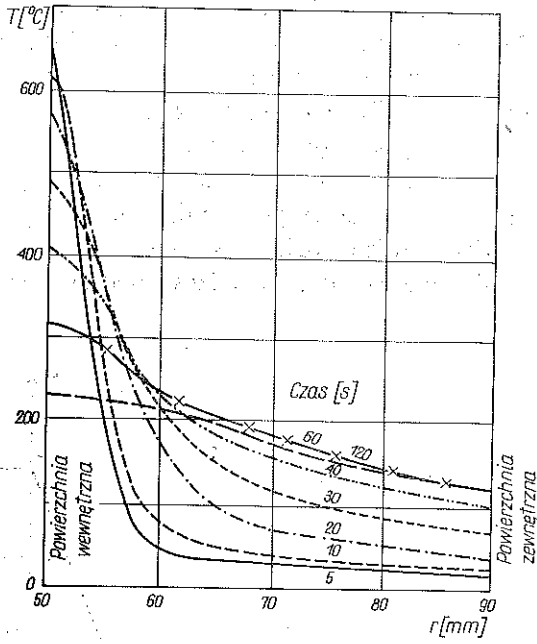


Rys. 1. Kierunki głównych naprężeń

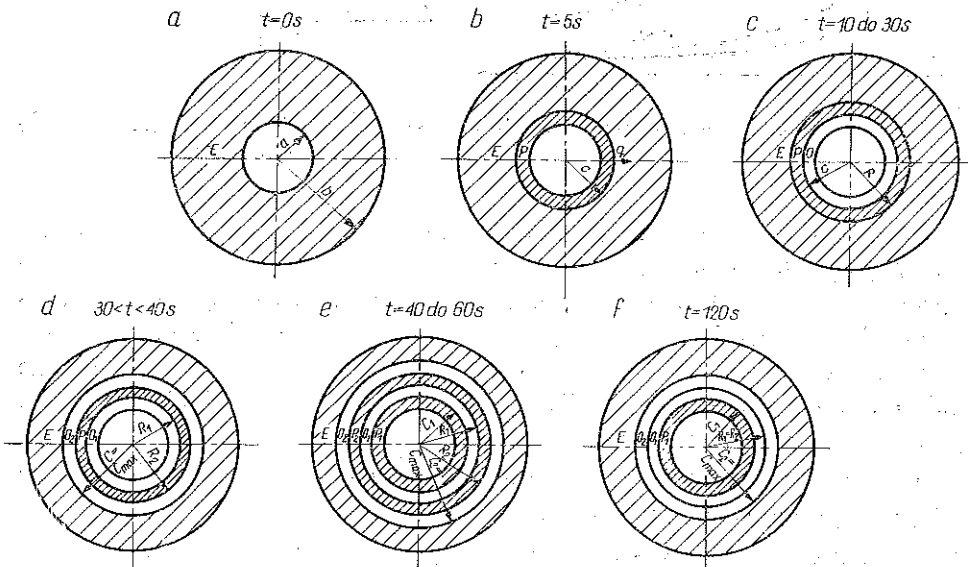
Przyjmijmy do opisu wytrzymałościowego rury obciążenie cieplne w postaci rozkładów temperatury przedstawionych na rys. 2. Rozkłady te odpowiadają technicznemu przypadkowi obciążeń wlewnic stalowych (grubościennej rury) w procesie odśrodkowego odlewania rur żeliwnych [1 i 2].

Dla czasu $t=0$, odpowiadającego warunkowi początkowemu, rura jest ustrojem idealnie sprężystym (rys. 3a), nie mającym żadnych naprężeń własnych. Od momentu zalania wlewnicy (rury) ciekłym żelazem obserwujemy rozkład temperatury odpowiadający chwili $t=5$ s: temperatura na powierzchni wewnętrznej ($a=50$ mm) osiąga wartość ekstremalną (~ 635 °C) i jednocześnie występują duże gradienty temperatury. Powoduje to pojawienie się dużych naprężeń ściskających w warstwie wewnętrznej oraz strefy o trwałych odkształceniach plastycznych. Model opisujący przypadek rury plastyczno-sprężystej został przedstawiony na rys. 3b.

Z upływem czasu temperatura ścianki wewnętrznej maleje, strumień ciepła ($q = -\lambda dT/dr$) wnika w kierunku powierzchni zewnętrznej. Następstwem jest ogrzewanie się dalej położonych warstw ścianki rury oraz przemieszczanie się powierzchni plastyczności $r=C$ (granicznej między strefą plastyczną P a sprężystą E). Skutkiem jednoczesnego ochładzania się i nagrzewania jest nowy stan obciążeń odpowiadający czasom $t=10, 20, 30$ s. Przy ściance wewnętrznej rury pojawia się obszar O , w którym następuje proces odciążania termicznego (rys. 3c). Obciążenie oraz wynikły stan

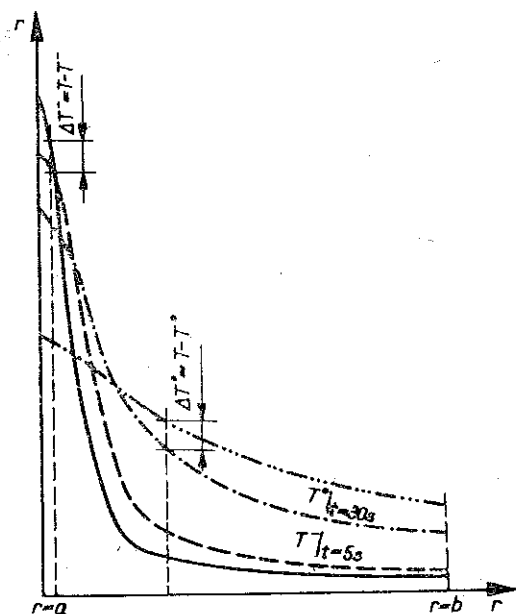


Rys. 2. Rozkłady temperatury (obciążenie cieplne rury)

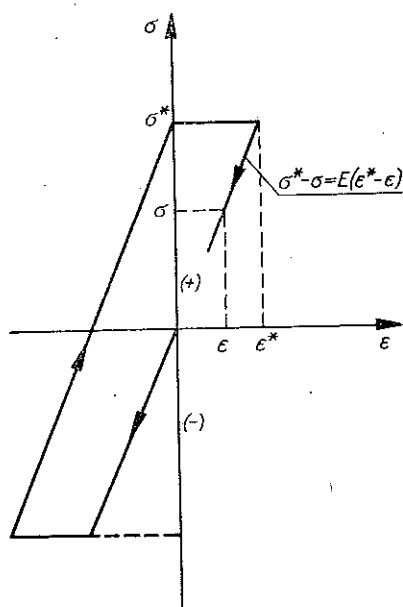


Rys. 3. Modele fizyczno-matematyczne do opisu stanów naprężeń w rurze

naprężeń w tym obszarze określony jest przez rozkład temperatury $\Delta T^- = T - T^-$, gdzie T^- odpowiada temperaturze dla $t=5$ s. Zjawisko jednoczesnego ruchu powierzchni odciążanej R oraz uplastycznienia C trwa do czasu $t=30$ s, po czym obserwuje się zahamowanie zjawiska związanego z przemieszczaniem się powierzchni uplastycznienia. Strefa plastyczna (nazwijmy dalej «rodzima») wycofuje się ze swego maksymalnego zasięgu C_{max} , powodując powstanie drugiego obszaru odciążanego $O2$. Stan naprężeń w obszarze tym wynika z nowego obciążenia cieplnego, tj. $\Delta T^+ = T - T^+$, gdzie T^+ odpowiada rozkładowi temperatury w czasie $t=30$ s (rys. 4). Model opisujący przebieg zjawiska dla $5 < t \leq 30$ s przedstawiony został na rys. 3d.



Rys. 4. Obciążenie cieplne w obszarach odciążanych



Rys. 5. Obciążenie i odciążenie termiczne na wykresie Hooke'a

Proces ciągłego oziębiania się strefy odciążanej, ograniczonej powierzchniami $a \leq r \leq R_1$, wywołuje w niej zmianę charakteru naprężeń. Zmiana ta powoduje, że w przedziale $30 < t < 40$ s kończy się odciążanie obszaru $O1$ i następuje jego obciążenie (zmiana znaku naprężeń odciążających). Rysunek 5 przedstawia poglądowo opisaną zmianę naprężeń na wykresie Hooke'a. Narastające odciążanie-obciążenie strefy $O1$ może następować tak długo aż opisany stan naprężeń nie spowoduje jej powtórnego uplastycznienia.

Model z dwiema strefami plastycznymi oraz odciążanymi poprawny dla czasów $t=40, 60$ s przedstawiono na rys. 3e.

Dalsza analiza procesu wskazuje, że postępująca strefa $O1$ oraz cofająca $O2$ są przyczyną zanikania rodzimej strefy plastycznej $P2$, natomiast powierzchnia ograniczająca obszar $P1$ przemieszcza się w kierunku ścianki zewnętrznej rury. Model

ujmujący ostatnią fazę procesu pokazano na rys. 3f; odpowiada on stanom naprężeń wynikającym z końcowego rozkładu temperatury dla $t=120$ s.

Przedstawiony przebieg zjawisk naprężeniowych w czasie wynika z odpowiedniej analizy rozkładów temperatury oraz równań opisujących charakterystyczne obszary O , P , E . Uzasadnienie tego przebiegu podano w dalszej części opracowania.

2. RÓWNANIA PODSTAWOWE

Modele fizyczne (rys. 3) sprowadzają zagadnienie do analizy stanów naprężeń w obszarach: sprężystych E , plastycznych P , odciążonych O .

W celu uzyskania rozwiązania zagadnienia każdy ze wspomnianych obszarów potraktowany będzie jako ośrodek kontinuum i opisany podstawowym układem równań. Uzyskane ogólne rozwiązania umożliwią następnie szczegółowy opis dowolnego modelu przedstawionego na rys. 3.

Stan naprężeń w obszarze sprężystym

Zależności między naprężeniami a odkształceniami termicznymi są określone przez uogólnione wzory Hooke'a:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r - \alpha T &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\varphi + \sigma_z)], \\ \varepsilon_\varphi - \alpha T &= \frac{1}{E} [\sigma_\varphi - \nu(\sigma_r + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z - \alpha T &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi)]. \end{aligned}$$

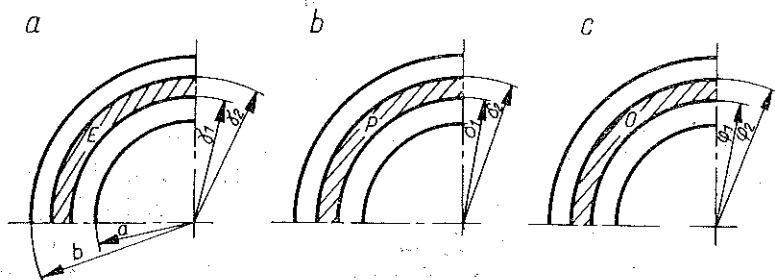
Dołączając równanie różniczkowe równowagi

$$(2.2) \quad r \frac{d\sigma_r}{dr} + (\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0$$

oraz dodatkowe związki na odkształcenia

$$(2.3) \quad \varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r},$$

otrzymujemy podstawowy układ równań, opisujący obszar sprężysty E (rys. 6a).



Rys. 6. Modele rury ze strefami O , P i E

Uwzględniając założenia, przemieszczenie u oraz składowe stanu naprężenia wynikające z rozwiązania równań (2.1), (2.2) i (2.3) można przedstawić w następującej postaci:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} u^e &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r} \int_{r_1}^r (\alpha_0 + \alpha_1 T) T r dr + r X_1^e - \frac{1}{r} X_2^e, \\ \sigma_r^e &= -\frac{E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r (\alpha_0 + \alpha_1 T) T r dr + \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{X_1^e}{1-2\nu} - \frac{X_2^e}{r^2} \right), \\ \sigma_\phi^e &= \frac{E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r (\alpha_0 + \alpha_1 T) T r dr - \frac{E}{1-\nu} (\alpha_0 + \alpha_1 T) T + \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{X_1^e}{1-2\nu} + \frac{X_2^e}{r^2} \right) \end{aligned}$$

oraz

$$(2.5) \quad \sigma_z^e = -\frac{E(\alpha_0 + \alpha_1 T)T}{1-\nu} + \frac{2\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} X_1^e + \sigma_{sr},$$

gdzie X_1^e i X_2^e oznaczają stałe całkowania w rozważanym obszarze sprężystym oraz σ_{sr} poprawkę ze względu na swobodne końce rury [por. wzór (2.19)].

Wzory (2.4) i (2.5) są znanymi zależnościami w teorii sprężystości [3], opisującymi rozkłady przemieszczeń i naprężeń cieplnych w rurach grubościennych poddanych nierównomiernemu ich ogrzaniu.

Stan naprężeń w obszarze plastycznym

Ze względu na to, że opisywany stan naprężeń odnosi się do ośrodka plastycznego, znajdującego się pod działaniem bardzo wysokiej temperatury, należy w analizie zagadnienia uwzględnić brak umocnienia, tj. tendencję nagłego przejścia krzywej w kierunku równoległym do osi ϵ .

W celu spełnienia powyższego warunku zjawiska odkształcenia plastycznego opisane zostaną na gruncie teorii Levy'ego-Misesa-Saint Venanta [4], która prowadzi do dwóch równań tensorowych:

$$(2.6) \quad S' = 2\mu \dot{E}' = 2\mu \frac{dE'}{dt}$$

oraz

$$(2.7) \quad E'' = 0 \quad (\text{tzn. że } \dot{E}'' = 0).$$

Równania Levy'ego-Misesa-Saint Venanta opisują obszar plastyczny: 1) według teorii plastycznego płynięcia, 2) w procesie obciążania, 3) z pominięciem małych odkształceń sprężystych, tj. gdy zakłada się, że materiał jest idealnie plastyczny oraz 4) bez uwzględnienia wzmocnienia.

Pierwsze równanie wyraża proporcjonalność między dewiatorem tensora naprężenia S' a dewiatorem tensora prędkości odkształcenia \dot{E}' . Drugie równanie hipotezy

Levy'ego-Misesa-Saint Venanta przedstawia kulisty tensor odkształcenia, który jest faktycznie równaniem skalarowym, wyrażającym nieściśliwość materiału w zakresie odkształceń plastycznych. Równanie (2.6) można napisać w postaci związku obu tensorów odniesionych do osi głównych, które następnie odpowiednio przekształcając sprowadza się po uzupełnieniu wyrazami «termicznymi» do równania określającego zależność między naprężeniami a przyrostem odkształceń:

$$(2.8) \quad \frac{2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_z}{2\sigma_z - \sigma_\varphi - \sigma_r} = \frac{d\varepsilon_r - \alpha dT}{d\varepsilon_z - \alpha dT}, \quad \frac{2\sigma_\varphi - \sigma_r - \sigma_z}{2\sigma_z - \sigma_\varphi - \sigma_r} = \frac{d\varepsilon_\varphi - \alpha dT}{d\varepsilon_z - \alpha dT}.$$

Natomiast równanie (2.7), wyrażające niezmiennność objętości materiału odkształconego plastycznie, ma postać

$$(2.9) \quad d\varepsilon_r + d\varepsilon_\varphi + d\varepsilon_z - 3\alpha dT = 0.$$

Ponadto w całym rozważanym obszarze plastycznym (rys. 6b) spełnione jest równanie równowagi, przedstawione zależnością (2.2) oraz geometryczne związki między odkształceniami i przemieszczeniami (2.3). W obszarze plastycznym musi być spełniony także warunek plastyczności. Przyjęte prawo plastycznego płynięcia jest stowarzyszone z nieliniowym warunkiem granicznej wartości intensywności naprężeń stycznych Hubera-Misesa, który przy płaskim stanie odkształcenia przyjmuje postać

$$(2.10) \quad \left| \frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{2} \right| = k(T), \quad k(T) = \sigma_{pl}(T)/\sqrt{3}.$$

Warunek ten przy $\varepsilon_z = 0$ ma postać identyczną z liniowym warunkiem maksymalnych naprężeń stycznych Treski, dla którego $k = \sigma_{pl}/2$.

Rozwiązanie różniczkowego układu równań (2.2), (2.3) oraz (2.8) daje w wyniku składowe przemieszczeń i naprężeń w obszarze plastycznym P :

$$(2.11) \quad u^p = \frac{3}{r} \int_{\delta_1}^r \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} T \right) Tr dr + \frac{1}{r} X_2^p,$$

$$(2.12) \quad \sigma_r^p = \mp \int_{\delta_1}^r \frac{\sigma_{pl}(T)}{r} dr + X_1^p, \quad \sigma_\varphi^p = \mp \sigma_{pl}(T) + \sigma_r^p, \quad \sigma_z^p = \frac{\sigma_r^p + \sigma_\varphi^p}{2},$$

gdzie X_1^p i X_2^p oznaczają stałe całkowania, które można określić z warunków brzegowych. Naprężenia σ_z^p nie zawierają poprawki σ_{sr} ze względu na niespełnienie zasady superpozycji naprężeń w obszarze P opisanym nieliniową teorią płynięcia.

Stan naprężeń w obszarze odciążanym

W teorii odkształceń plastycznych rozróżnia się procesy obciążania i odciążania w zależności od tego, czy intensywność odkształceń postaciowych \mathcal{E} w czasie trwania procesu wzrasta czy maleje [5]. Gdy $d\mathcal{E}/dt = \dot{\mathcal{E}} > 0$, to występujący stan naprężeń w obszarze plastycznym wywołuje proces obciążania, $\dot{\mathcal{E}} = \text{const}$ opisuje stan obojętny oraz nierówność $\dot{\mathcal{E}} < 0$ odpowiada procesowi odciążania.

Intensywność odkształceń dla przyjętego układu współrzędnych walcowych ma postać

$$(2.13) \quad \mathcal{E}^p = \{1/6 [(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r)^2]\}^{1/2}.$$

W naszym przypadku, uwzględniając (2.2) oraz wzory na przemieszczenia w obszarze plastycznym (2.11), funkcję \mathcal{E}^p można przedstawić przy założonym stanie odkształcenia $\varepsilon_z = 0$ w następującej postaci:

$$(2.14) \quad \mathcal{E}^p = \left\{ 3 \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} T \right) T - \frac{1}{r^4} \left[3 \int_{\delta_1}^r \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} T \right) T r dr + 3 \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} T \right) T r^2 - X_2^p \right] \left[3 \int_{\delta_1}^r \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} T \right) T r dr + X_2^p \right] \right\}^{1/2}.$$

Dla procesu odciążania (uwarunkowanego zmniejszaniem się \mathcal{E}^p) sformułowano hipotezy [6], z których wynika, że prawo Hooke'a ma przy odciążaniu normalną postać, jednak odkształcenia mierzy się od nowego stanu (rys. 5). W ciągu całego procesu odciążania zachodzi liniowa zależność między naprężeniami i odkształceniami. Oznaczamy przez σ , ε funkcje naprężeń i odkształceń w procesie odciążania, przez σ^* , ε^* początkowe wartości naprężeń i odkształceń w procesie odciążania oraz przez $T - T^* = \Delta T^*$ — obciążenie termiczne w procesie odciążania. Uogólnione wzory Hooke'a w procesie odciążania można przedstawić w postaci

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r - \varepsilon_r^* &= \frac{1}{E} \{ (\sigma_r - \sigma_r^*) - \nu [(\sigma_\varphi - \sigma_\varphi^*) + (\sigma_z - \sigma_z^*)] \} + \alpha \Delta T^*, \\ \varepsilon_\varphi - \varepsilon_\varphi^* &= \frac{1}{E} \{ (\sigma_\varphi - \sigma_\varphi^*) - \nu [(\sigma_r - \sigma_r^*) + (\sigma_z - \sigma_z^*)] \} + \alpha \Delta T^*, \\ \varepsilon_z - \varepsilon_z^* &= \frac{1}{E} \{ (\sigma_z - \sigma_z^*) - \nu [(\sigma_\varphi - \sigma_\varphi^*) + (\sigma_r - \sigma_r^*)] \} + \alpha \Delta T^*. \end{aligned}$$

Równanie równowagi wewnętrznej dowolnego elementu w obszarze odciążanym pozostaje w niezmięnionej postaci (2.2), ponadto poprawne są też związki geometryczne między odkształceniami a przemieszczeniami:

$$(2.16) \quad \varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_r^* = \frac{du^*}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_\varphi^* = \frac{u^*}{r}.$$

W celu określenia składowych stanu naprężenia w obranym obszarze odciążanym (rys. 6c) należy rozwiązać układ równań (2.15) z uwzględnieniem związków (2.16) oraz równania równowagi (2.2). Po wykonaniu koniecznych operacji przemieszczenia i naprężenia wyrazimy następującymi wzorami:

$$(2.17) \quad \begin{aligned} u^0 &= u^* + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r} \int_{\varphi_1}^r (\alpha_0 + \alpha_1 \Delta T^*) \Delta T r dr + r X_1^0 + \frac{1}{r} X_2^0, \\ \sigma_r^0 &= \sigma_r^* - \frac{E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_{\varphi_1}^r (\alpha_0 + \alpha_1 \Delta T^*) \Delta T^* r dr + \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{X_1^0}{1-2\nu} - \frac{X_2^0}{r^2} \right), \end{aligned}$$

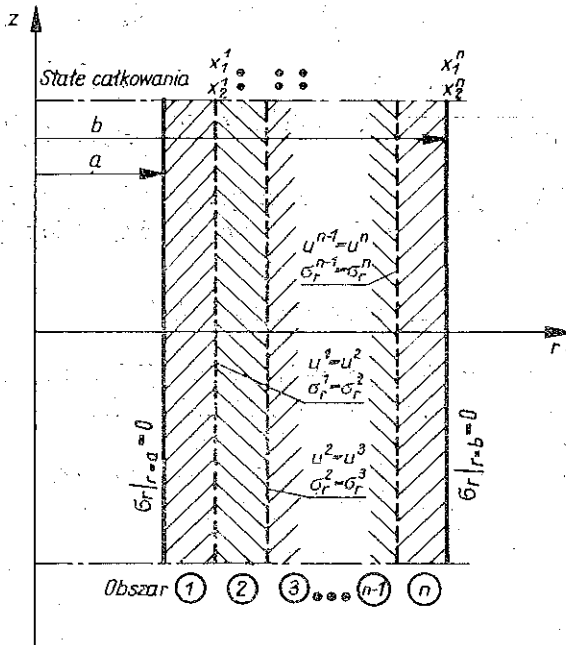
oraz

$$\begin{aligned}
 \sigma_\varphi^0 &= \sigma_\varphi^* + \frac{E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_{\varphi_1}^r (\alpha_0 + \alpha_1 \Delta T^*) \Delta T^* r dr + \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{X_1^0}{1-2\nu} + \frac{X_2^0}{r^2} \right) - \\
 (2.18) \quad & - \frac{E}{1-\nu} (\alpha_0 + \alpha_1 \Delta T^*) \Delta T^*, \\
 \sigma_z^0 &= \sigma_z^* - \frac{E(\alpha_0 + \alpha_1 \Delta T^*) \Delta T^*}{1-\nu} + \frac{2\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} X_1^0 + \sigma_{sr}.
 \end{aligned}$$

Warunki brzegowe

W celu otrzymania poprawnego i jednoznacznego rozwiązania zagadnienia należy do otrzymanych równań w obszarze sprężystym (2.4), (2.5), w obszarze plastycznym (2.11), (2.12) oraz w obszarze odciążonym (2.17), (2.18) dołączyć odpowiednie warunki brzegowe.

Z otrzymanych wyników opisujących stany naprężeń widać, że zależą one od dwóch stałych całkowania X_1, X_2 , dlatego też konieczne i dostateczne jest podanie dwóch warunków w każdym z opisanych obszarów. Z założenia, że rozważane ciało stałe (rura) jest ośrodkiem ciągłym w stanie równowagi, wymagamy spełnienia



Rys. 7. Warunki brzegowe

ciągłości przemieszczeń u i naprężeń promieniowych σ_r , na pograniczych obszarów, natomiast z faktu, że powierzchnie zewnętrzne pozostają wolne od obciążeń, wynika zerowanie się naprężeń promieniowych. Przykładowe przedstawienie warunków brzegowych dla n charakterystycznych obszarów pokazano na rys. 7.

Uzupełniając opis zadania należy dodać, że równania charakterystycznych powierzchni C i R wynikają z warunku plastyczności (2.10), gdy obszarem granicznym jest obszar plastyczny, bądź z wykresu jako funkcji czasu intensywności odkształceń (2.14), gdy obszarem granicznym jest obszar odciążony.

Zagadnienia modeli fizycznych rury rozwiązuje się przy warunku, że przemieszczenie wzdłużne $w=0$. Założenie płaskiego stanu odkształcenia upraszcza znacznie matematyczną stronę, lecz wymaga wprowadzenia poprawki do otrzymanych stanów naprężeń i przemieszczeń. Z uwagi na to, że rura jest konstrukcją swobodną, należy na otrzymane rozkłady σ_z nałożyć równomierne naprężenia σ_{sr} tak, aby wypadkowa siła wzdłużna na jej końcach była równa zero. Dla dowolnego modelu zawierającego kilka charakterystycznych obszarów powyższy warunek ma postać

$$(2.19) \quad 2\pi \left\{ \sum_{i=1}^k \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\sigma_z^0)_i r dr + \sum_{i=1}^l \int_{\delta_1}^{\delta_2} (\sigma_z^p)_i r dr + \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} (\sigma_z^e)_i r dr \right\} + \pi(b^2 - a^2) \sigma_{sr} = 0,$$

gdzie k, l, m oznacza liczbę charakterystycznych obszarów odciążanych, plastycznych i sprężystych. Wprowadzając określone z równania (2.19) naprężenia σ_{sr} do znanych wzorów na stany, uzyskujemy samozrównoważony układ obciążeń.

Jeżeli w całym przekroju rury występuje tylko obszar sprężysty (brak plastycznego i odciążanego), to $\gamma_1 = a, \gamma_2 = b, \varphi_1 = \varphi_2 = 0, \delta_1 = \delta_2 = 0$. Po uwzględnieniu trzeciej zależności z (2.5) (bez wyrazu σ_{sr}) do (2.19) otrzymuje się podobną jak w [3] wartość σ_{sr} :

$$(2.20) \quad \sigma_{sr} = \frac{2}{b^2 - a^2} \frac{E}{1 - \nu} \int_a^b (\alpha_0 + \alpha_1 T) T r dr + \frac{2\nu EX_1^e}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}.$$

Ponieważ modele rury przedstawione na rys. 3 zawierają po kilka różnych obszarów, poprawkę dla każdego z nich należy określać zgodnie z (2.19).

3. ROZKŁADY NAPRĘŻEŃ

Do dalszych obliczeń przyjęto następujące dane wyjściowe: 1) wielkości dotyczące własności materiałowych: moduł Younga $E = 2,1 \cdot 10^4$ kG/mm²; liczba Poissona $\nu = 0,3$; współczynnik rozszerzalności liniowej $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 T$, $\alpha_0 = 11,7 \cdot 10^{-6}$ 1/°K, $\alpha_1 = 0,01025 \cdot 10^{-6}$ 1/°K²; granica plastyczności $\sigma_{p1} = \sigma_0 + \sigma_1 T^2$, $\sigma_0 = 52,025$ kG/mm², $\sigma_1 = 0,616 \cdot 10^{-6}$ kG/m²°K²; 2) rozkłady temperatury $T(r)$ dla czasów $t = 5, 10, 20, 30, 40, 60, 120$ s — zgodnie z rys. 2.

Rura sprężysta (model E)

Szczegółowe rozwiązania rozpoczyna się od przedstawienia wstępnej analizy naprężeń dla rury sprężystej. Z przebiegu zjawisk cieplnych wynika, że do czasu $t = 5$ s w całym obszarze ścianki funkcja temperatury w czasie jest rosnąca.

Rozważany model sprężysty scharakteryzowany jest przez stan naprężeń, wynikający z równań (2.4) i (2.5) oraz warunków brzegowych (rys. 8). Granice obszaru

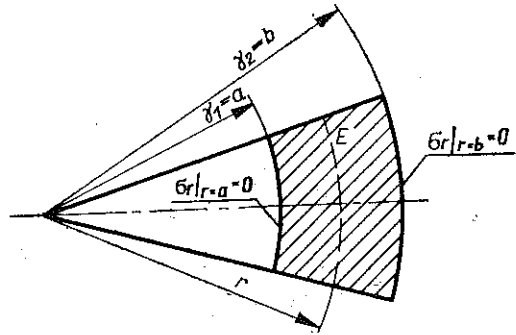
γ_1 i γ_2 (rys. 6) odpowiadają powierzchnią wewnętrzną a i zewnętrzną b , natomiast całka $\int_{\gamma_1}^r \equiv \int_a^r$.

Wykorzystanie warunków przedstawionych na rys. 8 daje możliwość określenia stałych całkowania X_1^e , X_2^e .

$$(3.1) \quad X_2^e = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{a^2}{b^2+a^2} \int_a^b (\alpha_0 + \alpha_1 T) T r dr \text{ [mm}^2\text{]}, \quad X_1^e = \frac{1-2\nu}{a^2} X_2^e \text{ [-]}.$$

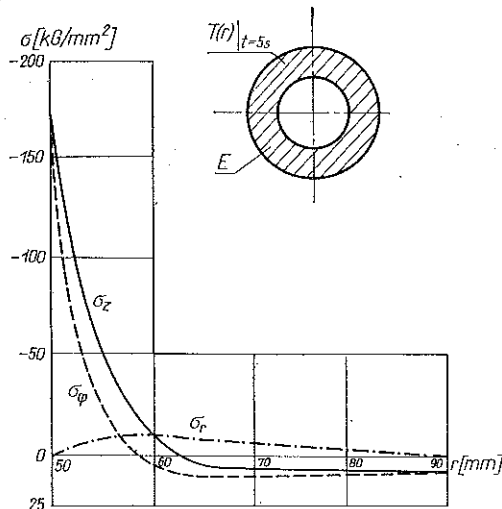
Przeprowadzenie obliczeń liczbowych dla rozważanego modelu nie przedstawia praktycznie żadnych trudności. Jednakże w dalszych rozwiązaniach odnoszących się do modeli złożonych (odciążanych, plastycznych i sprężystych) konieczne było dla uzyskania konkretnych wyników prowadzenie obliczeń na komputerze.

Podstawiając więc do (3.1) określone wcześniej wymiary geometryczne, własności materiałowe oraz rozkłady temperatury otrzymujemy liczbowe wartości na stałe X_1^e i X_2^e . Znajomość powyższa umożliwia z równania (2.4) oraz (2.5) określić jednoznacznie przebiegi przemieszczeń oraz naprężeń promieniowych, obwodowych i wzdłużnych (rys. 9). Z rys. 9



Rys. 8. Model rury sprężystej E

widać, że wykres naprężeń obwodowych i wzdłużnych wynika z charakteru rozkładu temperatury (krzywe rozkładu naprężeń i temperatury są podobne). Powierzchnia zewnętrzna rury przenosi w zasadzie małe naprężenia rozciągające, podczas gdy



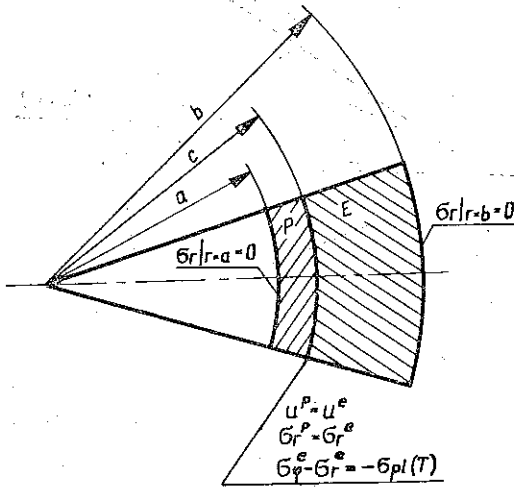
Rys. 9. Rozkład naprężeń w rurze sprężystej E

wartość obwodowych i wzdłużnych naprężeń na powierzchni wewnętrznej jest olbrzymia ($\sim -170 \text{ kG/mm}^2$) i przekracza znacznie granicę plastyczności.

Kończąc opis przedstawionego modelu wnioskować można, że powstałe obciążenie wywołuje obszar plastyczny przy powierzchni wewnętrznej. Rzeczywisty więc rozkład naprężeń można określić rozwiązując zadanie dla sprzężonych ze sobą stref: plastycznej i sprężystej.

Rura ze strefami plastyczną oraz sprężystą (model P-E)

Rozważmy z kolei rurę plastyczno-sprężystą pozostającą nadal pod obciążeniem cieplnym $[T(r)]_{t=ss}$. Rozwiązanie takiego przypadku sprowadza się do analizy modelu z warunkami brzegowymi przedstawionymi na rys. 10. Stan przemieszczeń



Rys. 10. Model rury plastyczno-sprężystej P-E

oraz naprężeń dla obszaru P określają wzory (2.11) oraz (2.12); w obszarze E (2.4) i (2.5). Na pograniczu obszarów poza warunkami ciągłości u i σ_r , spełniony jest warunek plastyczności (2.10). Ze względu na to, że różnica $\sigma_\phi - \sigma_r$ w warunku tym jest ujemna (wynika to z opisu rury sprężystej) warunek plastyczności sprowadza się do postaci

$$(3.2) \quad \sigma_\phi - \sigma_r = -\sigma_{pl}(T).$$

Uzupełnienie warunków brzegowych równaniem (3.2) daje liniowy układ pięciu równań względem nieznanych stałych $X_1^p, X_2^p, X_1^e, X_2^e, C$. Zmienna r dla obszaru P oraz E zawiera się

$$X_1^e = \frac{1+\nu}{E} \frac{C^2}{2} \left[\frac{E}{1-\nu} (\alpha_0 + \alpha_1 T) T \Big|_{r=c} - \sigma_{pl}(T) \Big|_{r=c} \right] [\text{mm}^2];$$

$$(3.3) \quad X_1^e = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{1}{b^2} \int_c^b (\alpha_0 + \alpha_1 T) T r dr + \frac{1-2\nu}{b^2} X_2^e [-];$$

$$X_1^p = 0 [\text{kG/mm}^2];$$

$$X_2^p = C^2 X_1^e + X_2^e - 3 \int_a^c \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} T \right) T r dr [\text{mm}^2]$$

oraz promień uplastycznienia C :

$$(3.4) \quad \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{X_1^e}{1-2\nu} - \frac{X_2^e}{C^2} \right) + \int_a^c \frac{\sigma_{pl}(T)}{r} dr - X_1^p = 0 = \sigma(C).$$

Szczegółowe rozwiązanie zadania rozpoczyna się od określenia promienia plastyczności z równania (3.4). Z uwagi na złożoną postać równania skutecznym sposobem otrzymania pierwiastka jest graficzna interpolacja. Znajomość promienia uplastycznienia daje możliwość kolejnego określenia stałych całkowania X_1^e, X_2^e, X_2^p , a następnie przemieszczeń i naprężeń w odpowiednich obszarach.

Na rys. 11a przedstawiono krzywe obrazujące przemieszczenia promieniowe u oraz odkształcenie obwodowe $\varepsilon_\phi = u/r$. Oba wykresy w charakterze swym są zbliżone i wykazują ciągłość przy przechodzeniu z obszaru P do E (podobnie jak i naprężenie σ_r na rys. 11b).

Naprężenia σ_r zgodnie z warunkami brzegowymi zerują się na powierzchniach wewnętrznej i zewnętrznej. Najciekawszymi w interpretacji zjawisk wytrzymałościowych są jednak naprężenia obwodowe σ_ϕ . Z ich wykresów w obszarze P (tam gdzie występują wysokie temperatury) widać silne opadanie krzywej σ_ϕ w kierunku powierzchni wewnętrznej, przy jednoczesnym minimalnym spadku naprężeń σ_r . Zjawisko to tłumaczy się intensywnym maleniem granicy plastyczności. Przy przejściu z obszaru P do E naprężenia nie wykazują ciągłości. Niemniej jednak na pograniczu spełnione jest równanie równowagi elementu (2.2). Analizując charakter wykresu tych naprężeń w całym przekroju ścianki widać, że spełniony jest też warunek równowagi energetycznej układu (pole zawarte pod ujemnymi naprężeniami równe jest w przybliżeniu polu pod naprężeniami dodatnimi).

Dla dokładniejszego zrozumienia kinematyki procesu przeprowadźmy obliczenia w obszarze plastycznym funkcji intensywności odkształceń (2.14). Przyjmując dane z obszaru plastycznego rozważanego modelu $P-E$ można określić $\mathcal{E}^p(r)$ w przedziale $\delta_1 = a \leq r \leq C$. Tablica 1 przedstawia wyniki tych obliczeń. Podaje się w niej też wartości A i B dwóch charakterystycznych wyrażeń podpierwiastkowych równania (2.14),

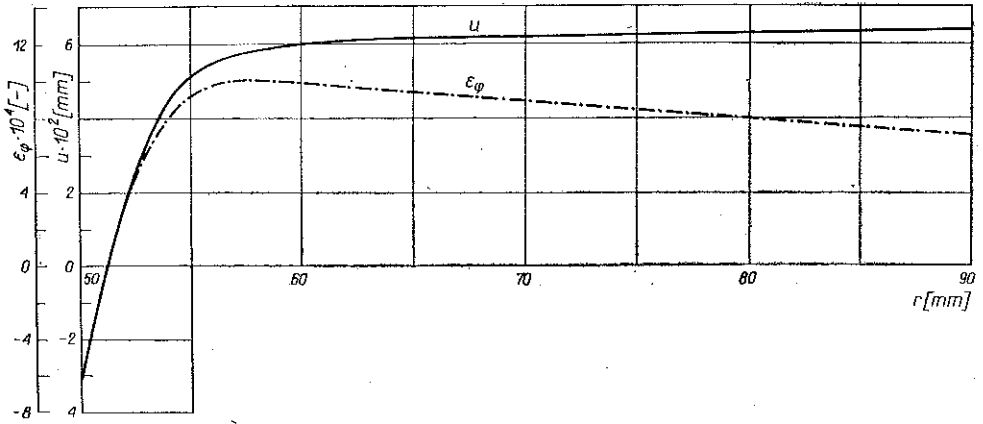
Tablica 1

r [mm]	$r=a=50$	51	52	53	54	55	$r=C=$ $=55, 25$	
$10^2 \cdot A[-]$	2,877	2,517	1,933	1,388	1,012	0,699	0,632	
$10^{-5} \cdot B[-]$	-7,243	-4,600	-2,504	-1,274	-0,659	-0,326	-0,272	
model $P-E$	$10^2 \cdot \mathcal{E}^p/t=5s$	16,984	15,882	13,912	11,790	11,790	8,363	7,957

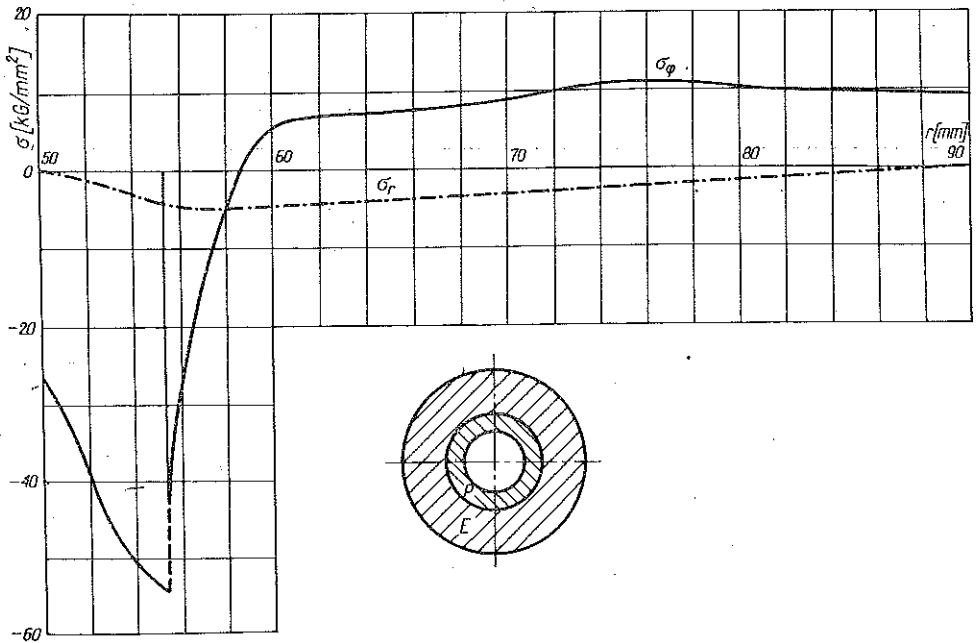
gdzie

$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad A &= 3 \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} T \right) T, \\
 B &= \frac{1}{r^4} \left[3 \int_a^r \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} T \right) r dr + 3 \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} T \right) Tr^2 - X_2 \right] \times \\
 &\quad \times \left[3 \int_a^r \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} T \right) Tr dr + X_2^p \right].
 \end{aligned}$$

Zauważyć można, że druga z wielkości (3.5) jest tutaj pomijalnie mała i nie ma zasadniczego wpływu na przebieg $\mathcal{E}^p(r)$. Wniosek stąd, że intensywność odkształceń zależy głównie od wielkości A , tj. przebiegu temperatury, a co więcej odciążanie się obszaru plastycznego uwarunkowane jest w dużej mierze zmianami funkcji $T(r)$.



Rys. 11a. Rozkład przemieszczeń w rurze $P-E$; $t=5$ s



Rys. 11b. Rozkład naprężeń w rurze $P-E$; $t=5$ s

Rura ze strefami odciążoną-plastyczną oraz sprężystą (model O-P-E)

Następstwem ochładzania się i zmniejszania odkształceń termicznych powierzchni wewnętrznej rury jest narastanie temperatury i odkształceń w warstwach sąsiednich. Skutkiem takiego przebiegu procesu jest wzajemna reakcja materiału rury. Rozważane obecnie obciążenie cieplne odpowiadające rozkładowi temperatury $[T(r)]_{t=10s}$ wywołuje przy powierzchni wewnętrznej obszar odciążony. Z wykresu krzywych $[T(r)]_{t=5s}$ oraz $[T(r)]_{t=10s}$ (rys. 2), które można w przybliżeniu interpretować jako intensywność odkształceń, widać, że przecinają się one przy współrzędnej $r=R=51$ mm, wyznaczając orientacyjnie granice nowo powstałego obszaru O ($\varphi_1 = a \leq r \leq \varphi_2 = R$). Obciążenie termiczne w tym obszarze określone jest jako $[AT^-(r)]_{t=10s} = [T(r)]_{t=10s} - [T^-(r)]_{t=5s}$. Podobnie można określić promienie R dla rozkładów temperatury $[T(r)]_{t=20s}$ i $[T(r)]_{t=30s}$ itd.

Tablica 2

R [mm]	51	52	53	53,5	54	55
t [s]	10	20	30	40	60	120

Uwaga: Przedstawiona metoda określania promieni R okazała się dość dokładna; wielkości przedstawione w tablicy 2 potwierdzone zostały też przez wyniki otrzymane z dokładniejszych obliczeń funkcji \mathcal{E}^p .

Model z obszarem odciążonym oraz warunkami brzegowymi zadania przedstawiony jest na rys. 12, natomiast stan przemieszczeń i naprężeń określony jest w obszarze : 1) odciążonym — równaniami (2.17) i (2.18); 2) plastycznym — równaniami (2.11) i (2.12) z warunkiem plastyczności $\sigma_\theta - \sigma_r = -\sigma_{pl}$; 3) sprężystym — równaniami (2.4) i (2.5).

$$\begin{aligned}
 X_2^e &= \frac{C^2}{2} \frac{1+\nu}{E} \left[-\sigma_{pl}(T)|_{r=c} + \frac{E}{1+\nu} (\alpha_0 + \alpha_1 T) T|_{r=c} \right] \quad [\text{mm}]^2, \\
 X_1^e &= \frac{1-2\nu}{b^2} \left[X_2^e + \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_c^b (\alpha_0 + \alpha_1 T) T r dr \right] \quad [-], \\
 (3.6) \quad X_1^p &= \int_R^c \frac{\sigma_{pl}(T)}{r} dr + \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{X_1^e}{1-2\nu} - \frac{X_2^e}{C^2} \right] \quad [\text{kG/mm}^2], \\
 X_2^p &= C^2 X_1^e + X_2^e - 3 \int_R^c \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} T \right) T r dr \quad [\text{mm}^2], \\
 \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} X_1^0 &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left[-\sigma_r^-|_{r=R} - \frac{E}{1+\nu} \frac{u^-|_{r=R}}{R} + X_1^p + \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{R^2} X_2^p \right],
 \end{aligned}$$

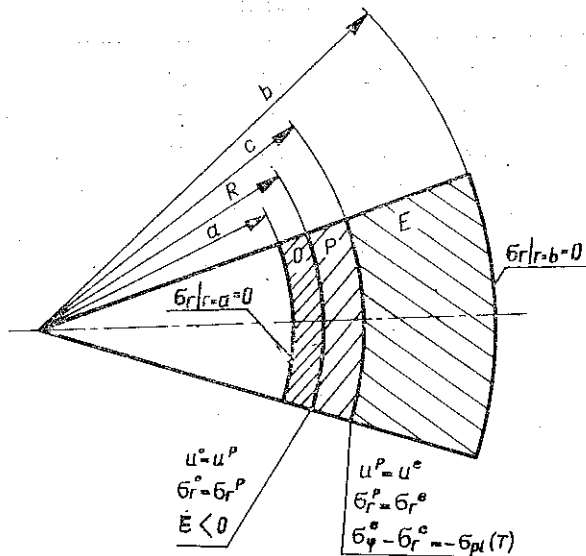
$$(3.6) \quad \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{a^2} X_2^0 = \left[\sigma_r^- |_{r=R} \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} - \frac{u^- |_{r=R}}{R} - \frac{2(1+\nu)}{R^2} \times \right. \\ \left. \times \int_a^R (\alpha_0 + \alpha_1 \Delta T^-) \Delta T^- r dr - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} X_1^0 + \frac{1}{R^2} X_2^0 \right] \frac{R^2}{a};$$

$$X_1^0 [-], \quad X_2^0 [\text{mm}^2],$$

oraz promień uplastycznienia C

$$(3.7) \quad \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} X_1^0 - \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{a^2} X_2^0 = 0 = \sigma(C),$$

określono po rozwiązaniu układu siedmiu równań liniowych na warunki brzegowe.



Rys. 12. Model rury odciążanej — plastycznej — sprężystej $O-P-E$

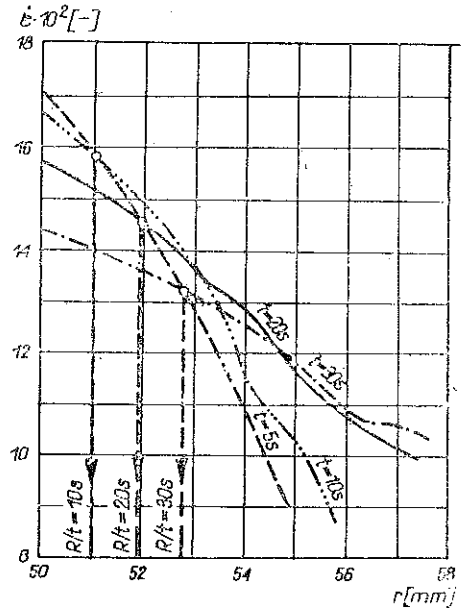
Obliczenie szczegółowe rozpoczyna się od określenia promienia obszaru odciążanego z warunku $\epsilon^p < 0$, co umożliwia następnie obliczenie stałych X_1 i X_2 jako funkcji promienia uplastycznienia. Promień C można natomiast określić przez rozwiązanie równania (3.7). Znajomość promienia uplastycznienia kończy praktycznie trudności występujące przy rozwiązaniu zadania.

Szczegółowe rozwiązanie nastęca mimo prostego ujęcia duże trudności ze względu na złożoną formę równań wyjściowych oraz uwikłaną postać wyrażenia ϵ^p . Intensywność odkształceń zależy bowiem od stałej całkowania X_2^0 , a sama stała jest funkcją promienia uplastycznienia. Iteracyjne obliczenia, mające na celu określenie R oraz C , są bardzo żmudne.

Duże uproszczenie w przedstawionej metodzie stanowił fakt, że zmiana promienia odciązanego R ma znikomy wpływ na wielkość promienia uplastycznienia C . Przykładowo dla danej temperatury, np. $[T(r)]_{t=10s}$, obliczono C z (3.7) przy różnych R zbliżonych do podanych w tabelicy 2 (wartości te uznane zostały w przybliżeniu za poprawne). I tak podstawiając $R=50, 51, 52$ mm otrzymano $C=55,50; 55,75; 55,75$ mm, tzn. $C=const$. Dla innych temperatur promienie uplastycznienia również nieznacznie odbiegały od przyjętych w tabelicy 3.

Obliczone zatem wcześniej promienie C przy danych wyjściowych R z tabelicy 2 są dostatecznie dokładne. Znajomość promienia C określa stałą X_2^p , a ta z kolei funkcję intensywności odkształceń \mathcal{E}^p wg (2.14).

Graficzna interpretacja $[\mathcal{E}^p(r)]_{t=const}$ przedstawiona jest na rys. 13, gdzie znajdują się łącznie wszystkie wykresy odpowiadające obciążeniom $t=5, 10, 20, 30, 40, 60, 120$ s (krzywa dla $t=5$ s opisana jest według modelu $P+E$). Współrzędne punktów przecięcia się odpowiednich krzywych \mathcal{E}^p dla $t=10, 20, 30, \dots$ s z krzywą $t=5$ s wyznaczają promienie obszaru odciązania, które z dostateczną dokładnością pokrywają się z przyjętymi w tabelicy 2. Znajomość ich, jak wiadomo, była punktem wyjścia do szczegółowych obliczeń zadania.



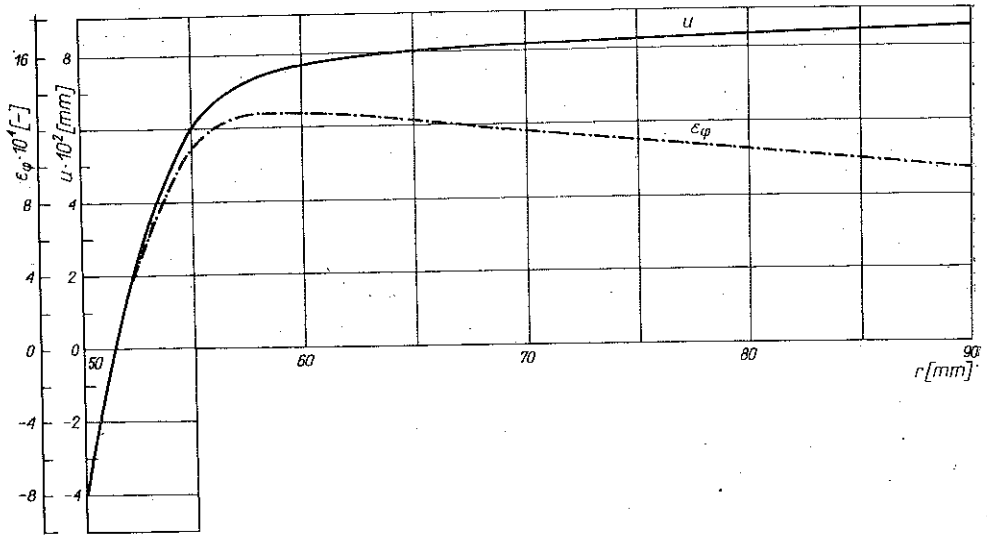
Rys. 13. Zmiany intensywności odkształceń

Tablica 3

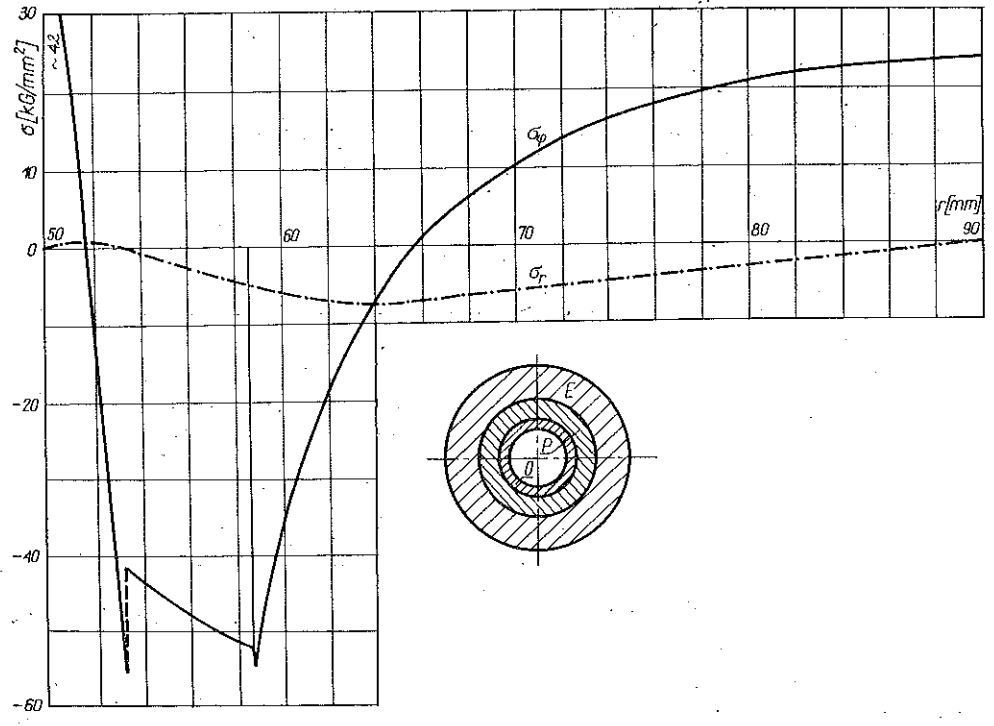
						Uwagi
$[T(r)]_{t=10s}$	R	mm	50,00	51,00	53,00	~const
	C		55,25	55,25	55,00	
$[T(r)]_{t=20s}$	R		50,00	52,00	53,00	~const
	C		57,50	57,75	57,75	
$[T(r)]_{t=30s}$	R		50,00	53,00	55,00	~const
	C		58,25	58,50	58,50	

Końcowe wyniki obliczeń numerycznych, dotyczące rozkładów przemieszczeń i naprężeń, można prześledzić na rys. 14, 15, 16.

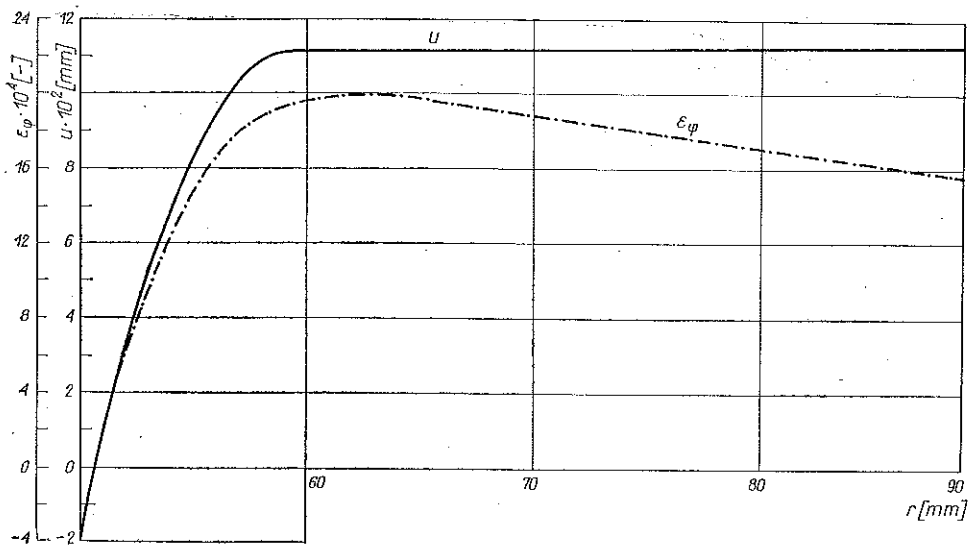
Dla lepszego zrozumienia niestacjonarności przebiegu naprężeń przedstawiono na rys. 17 zmianę promienia uplastycznienia C w czasie. Z wykresu widać, że wartość C rośnie i z upływem czasu $t=30$ s osiąga swoją maksymalną wartość. Obliczono



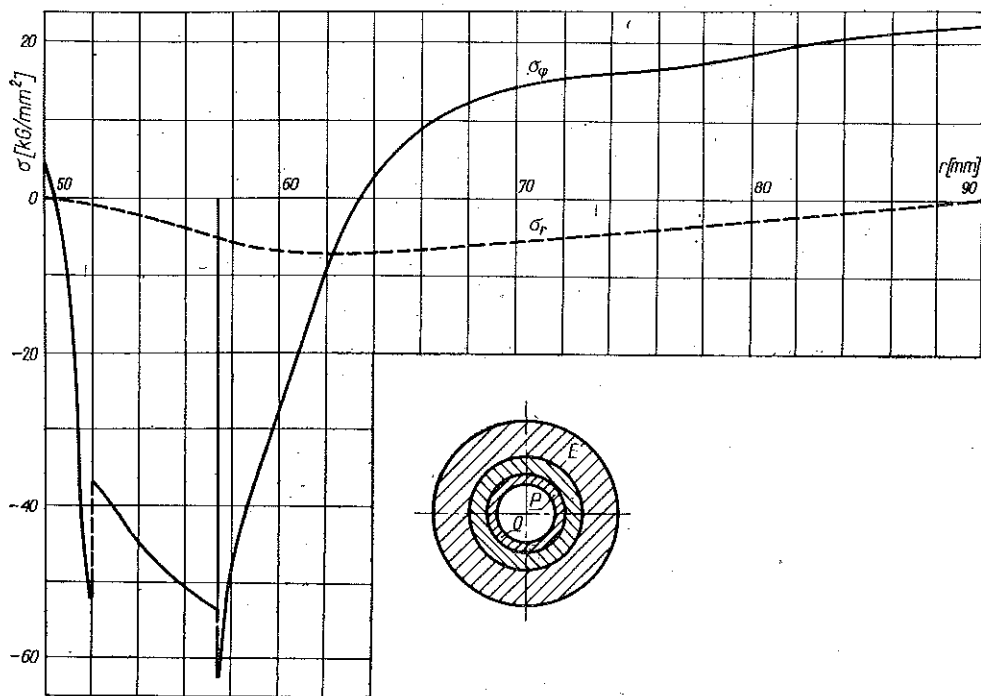
Rys. 14a. Rozkład przemieszczeń w rurze O-P-E; $t=10$ s



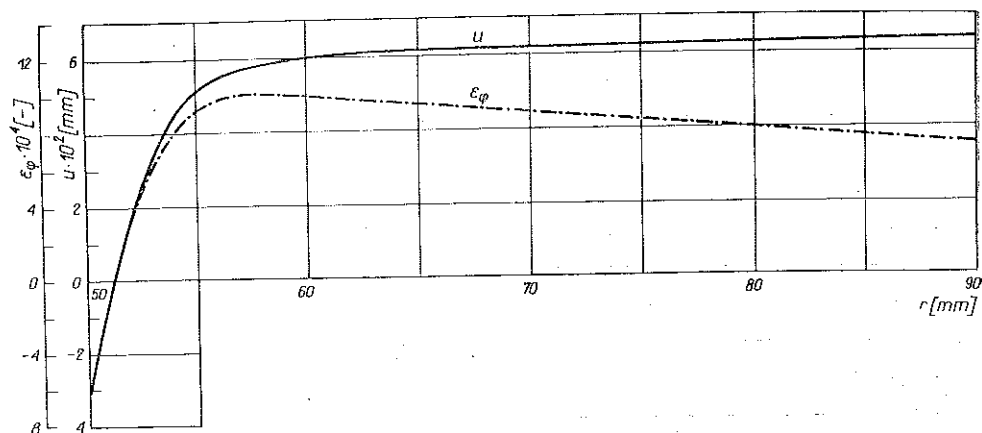
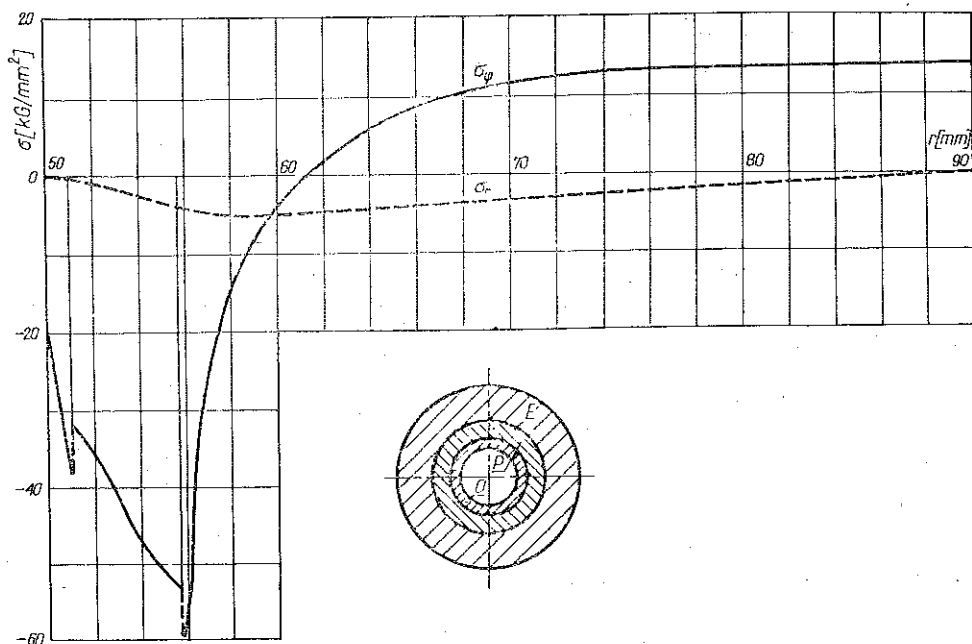
Rys. 14b. Rozkład naprężeń w rurze O-P-E; $t=10$ s



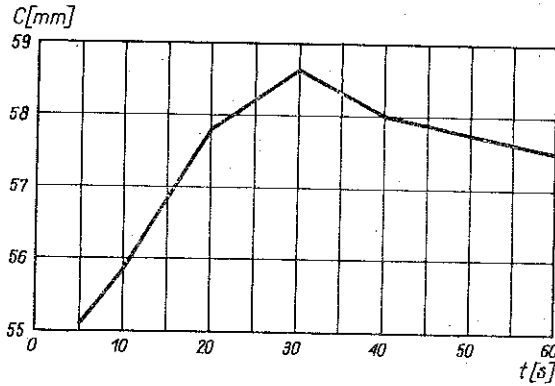
Rys. 15a. Rozkład przemieszczeń w rurze O-P-E; $t=20$ s



Rys. 15b. Rozkład naprężeń w rurze O-P-E; $t=20$ s

Rys. 16a. Rozkład przemieszczeń w rurze O-P-E; $t=30$ sRys. 16b. Rozkład naprężeń w rurze O-P-E; $t=30$ s

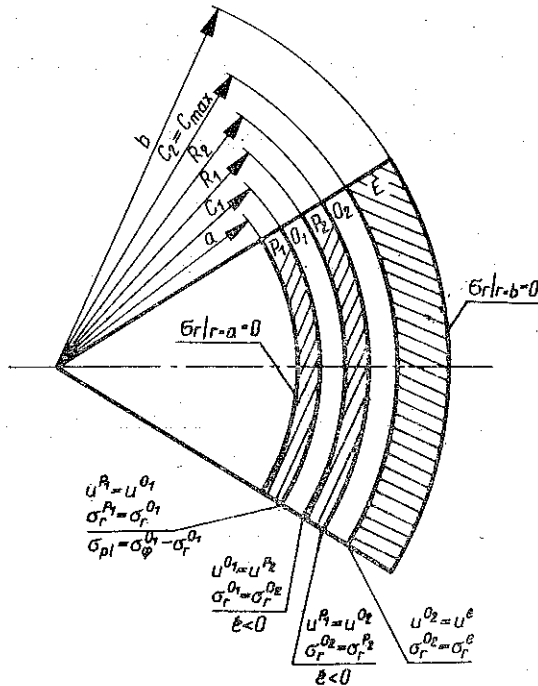
także promień uplastycznienia C wg modelu O-P-E dla obciążeń odpowiadających następnym czasom $t=40, 60, 120$ s, co uwidoczniło także na wspomnianym rysunku. Z dalszego wykresu widać, że dla $t=40, 60$ s promień uplastycznienia maleją, strefa plastyczna «wycofuje» się. Dla czasu $t=120$ s nie znaleziono już granicy plastyczności: nastąpił prawdopodobnie całkowity zanik obszaru plastycznego. Spostrzeżenie to potwierdza tablica 2, z której wynika, że zjawisku zmniejszania się granicy plastyczności w czasie towarzyszy systematyczne powiększanie się obszaru odciążania (tj. wzrost R).



Rys. 17. Zmiana promienia uplastycznienia w czasie

Rura ze strefami plastycznymi odciążanymi i sprężystą (model P1-O1-P2-O2-E)

Z kinematyki procesu wynika, że obciążenie cieplne odpowiadające czasom $t > 30$ s wywołuje w przekroju rury zjawisko polegające na zmniejszaniu się tzw. rodzimego obszaru plastycznego, w następstwie czego tworzy się druga strefa odciążana. Rozpoczęcie tego zjawiska w obszarze P warunkuje malenie z upływem



Rys. 18. Model rury plastycznej — odciążanej — plastycznej — odciążanej — sprężystej P1-O1-P2-O2-E

czasu funkcji intensywności odkształceń. Nowo powstała strefa odciążana ograniczona jest z jednej strony (rys. 3d) powierzchnią plastyczności o maksymalnym promieniu ($C_2 = [C_{\max}]_{t=30 \text{ s}}$), z drugiej natomiast powierzchnią odciążaną R_2 . Wraz z tym zjawiskiem obserwuje się w obszarze odciążanym (położonym przy powierzchni wewnętrznej rury) stopniowe zwiększanie się z upływem czasu dodatnich naprężeń obwodowych (rys. 15 i 16). W chwili działania obciążenia cieplnego, odpowiadającego czasowi $t=40 \text{ s}$, naprężenia są tak duże, że następuje ponownie częściowe uplastycznienie tego obszaru. Uplastycznienie wynika ze spełnienia w tym obszarze oraz na jego pograniczu warunku plastyczności $+\sigma_{pl}$. Tak więc obciążeniu cieplnemu odpowiadającemu kolejnym rozkładom $t=40, 60 \text{ s}$ towarzyszy jednocześnie powstawanie nowych obszarów: plastycznego oraz odciążanego. W wyniku takich zmian w rozpatrywanym modelu (rys. 18) występują poza strefą sprężystą dwie strefy plastyczne oraz odciążane. W przedstawionym modelu obszar $O1$ pozostaje pod obciążeniem $\Delta T^-(r)$, a $O2$ — pod obciążeniem $\Delta T^+(r)$. W obszarach $P1$ i $P2$ warunki plastyczności mają postać:

$$(3.8) \quad \sigma_{\phi}^{p1} - \sigma_r^{p1} = +\sigma_{pl}(T), \quad \sigma_{\phi}^{p2} - \sigma_r^{p2} = -\sigma_{pl}(T).$$

Równania (2.11) i (2.12) oraz (3.8) opisują wraz (2.17), (2.18), (2.4), (2.5) stan naprężeń i przemieszczeń w obszarach plastycznych odciążanych i sprężystym modelu $P1-O1-P2-O2-E$.

Promienie uplastycznienia $C1$ oraz stałe X_1 i X_2 można określić z warunków przedstawionych na rys. 18.

Ciągłość przemieszczeń i naprężeń na pograniczu obszarów oraz spełnienie warunku zerowania się naprężeń promieniowych na swobodnych powierzchniach wraz z warunkiem plastyczności w obszarze plastycznym $P1$ — dają układ jedenastu równań, z których można obliczyć powyższe stałe:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} X_1^{p1} &= 0 \quad [\text{kG/mm}^2], \\ X_2^{o1} &= \frac{C_1^2(1+\nu)}{2E} \left[\sigma_{pl}(T)|_{r=c_1} + \frac{E}{1-\nu} (\alpha_0 + \alpha_1 \Delta T^-) \Delta T^-|_{r=c_1} - \right. \\ &\quad \left. - (\sigma_{\phi}^- - \sigma_r^-)|_{c_1} \right] \quad [\text{mm}^2], \\ X_1^{o1} &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \left[-\sigma_r^-|_{r=c_1} + \int_a^{c_1} \frac{\sigma_{pl}(T)}{r} dr + \frac{E}{1+\nu} \frac{X_2^{o1}}{C_1^2} \right] \quad [-], \\ X_2^{p1} &= C_1^2 X_1^{o1} + X_2^{o1} - 3 \int_a^{c_1} \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} \Delta T^- \right) \Delta T^- r dr \quad [\text{mm}^2], \\ X_1^{p2} &= \sigma_r^-|_{R_1} - \frac{E}{1-\nu} \frac{1}{R_1^2} \int_{c_1}^{R_1} (\alpha_0 + \alpha_1 \Delta T^-) \Delta T^- r dr + \\ &\quad + \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{X_1^{o1}}{1-2\nu} - \frac{X_2^{o1}}{R_1^2} \right) \quad [\text{kG/mm}^2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad X_2^{P2} &= R_1 u^- / R_1 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_{C_1}^{R_1} (\alpha_0 + \alpha_1 \Delta T^-) \Delta T^- r dr + R_1^2 X_1^{O1} + X_2^{O1} \quad [\text{mm}^2], \\
 \text{[c.d.]} \\
 X_1^{O2} &= \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \left[\frac{1+\nu}{E} X_1^{P2} + \frac{X_2^{P2}}{C_2^2} - \frac{1+\nu}{E} \sigma_r^* / C_2 - \frac{u^- / C_2}{C_2} - \frac{1+\nu}{E} \times \right. \\
 &\quad \times \int_{R_1}^{C_2} \frac{\sigma_{pl}(T)}{r} dr + \frac{3}{C_2^2} \int_{R_1}^{C_2} \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} T \right) T r dr \quad [-], \\
 X_2^{O2} &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu) C_2^2}{2(1-\nu)E} \sigma_r^* / C_2 - \frac{C_2 u^- / C_2}{2(1-\nu)} + \frac{C_2^2 (1+\nu)(1-2\nu)}{2(1-\nu)E} \times \\
 &\quad \times \int_{R_1}^{C_2} \frac{\sigma_{pl}(T)}{r} dr + \frac{3}{2(1-\nu)} \int_{R_1}^{C_2} \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} T \right) T r dr - \\
 &\quad - \frac{(1+\nu)(1-2\nu) C_2^2}{2(1-\nu)E} X_1^{P2} + \frac{X_2^{P2}}{2(1-\nu)} \quad [\text{mm}^2], \\
 X_1^e &= \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \left[\frac{1+\nu}{E} \sigma_r^* / R_2 + \frac{u^- / R_2}{R_2} + \frac{2(1-\nu)}{1-2} X_1^{O2} \right] \quad [-], \\
 X_2^e &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu) R_2^2}{2(1-\nu)} \left[- \frac{\sigma_r^* / R_2}{E} + \frac{u^- / R_2}{(1+\nu)(1-2\nu) R_2} + \frac{2}{(1-2\nu) R_2^2} \times \right. \\
 &\quad \times \int_{C_2}^{R_2} (\alpha_0 + \alpha_1 \Delta T^+) \Delta T^+ r dr + \frac{2(1-\nu) X_2^{O2}}{(1+\nu)(1-2\nu) R_2^2} \quad [\text{mm}^2];
 \end{aligned}$$

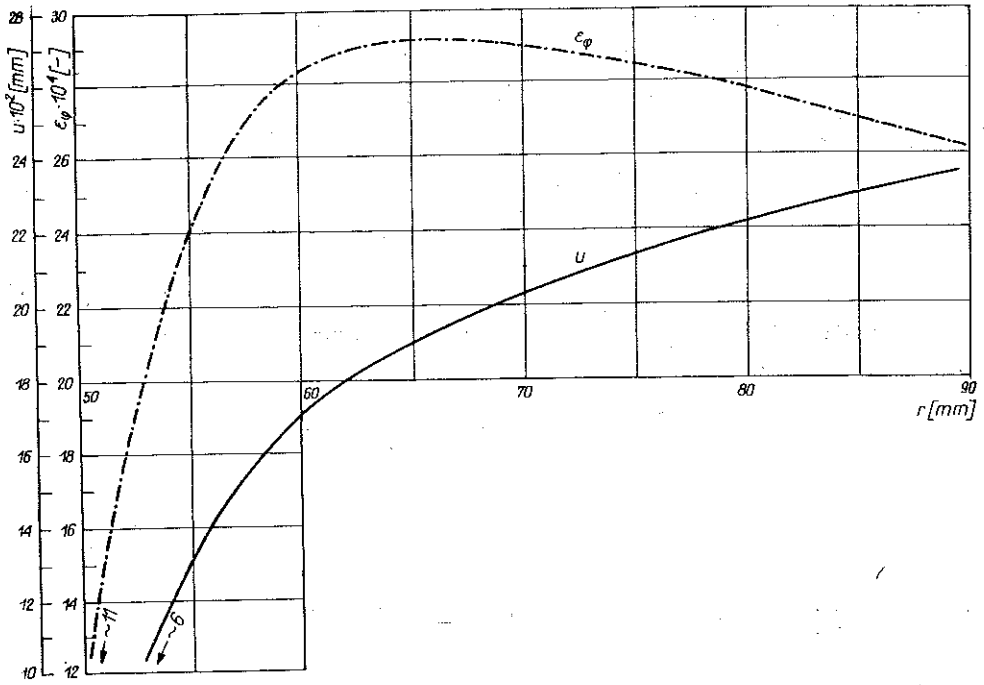
$$(3.10) \quad \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{b^2} \int_{R_2}^b (\alpha_0 + \alpha_1 T) T r dr - \frac{X_1^e}{1-2} + \frac{X_2^e}{b^2} = \sigma(C_1) = 0.$$

Powierzchnie odciążane R_1, R_2 określa funkcja intensywności odkształceń w obszarze P2. (Wartości R_1 pokrywają się z wartościami przedstawionymi w tabelicy 2, a R_2 odpowiada w przybliżeniu «cofniętym» promieniom uplastycznienia C z rys. 17).

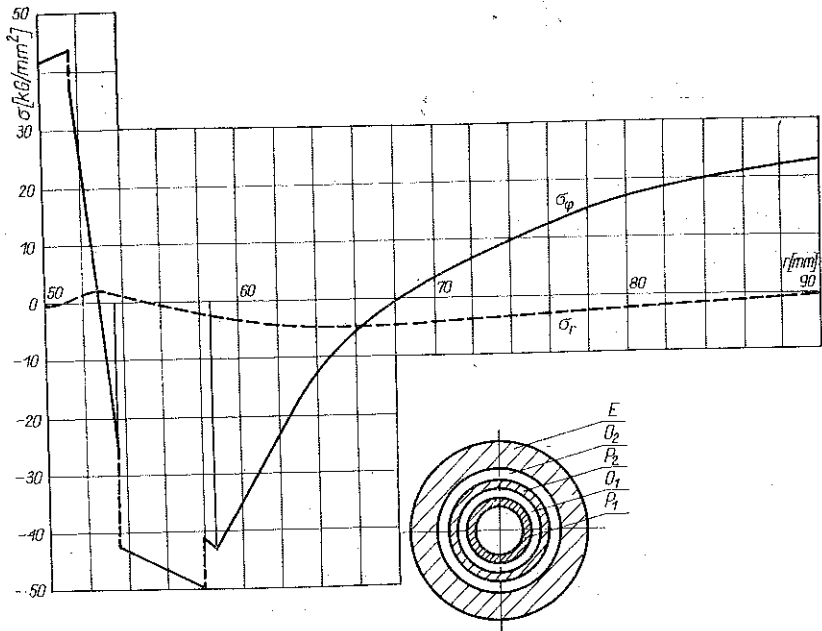
Po określeniu R_1, R_2, C_1, X_1 i X_2 przeprowadzono obliczenia rozkładów naprężeń i przemieszczeń, których wykresy przedstawiono na rys. 19 i 20.

Rura ze strefami plastyczną, odciążanymi oraz sprężystą (model P—O1—O2—E)

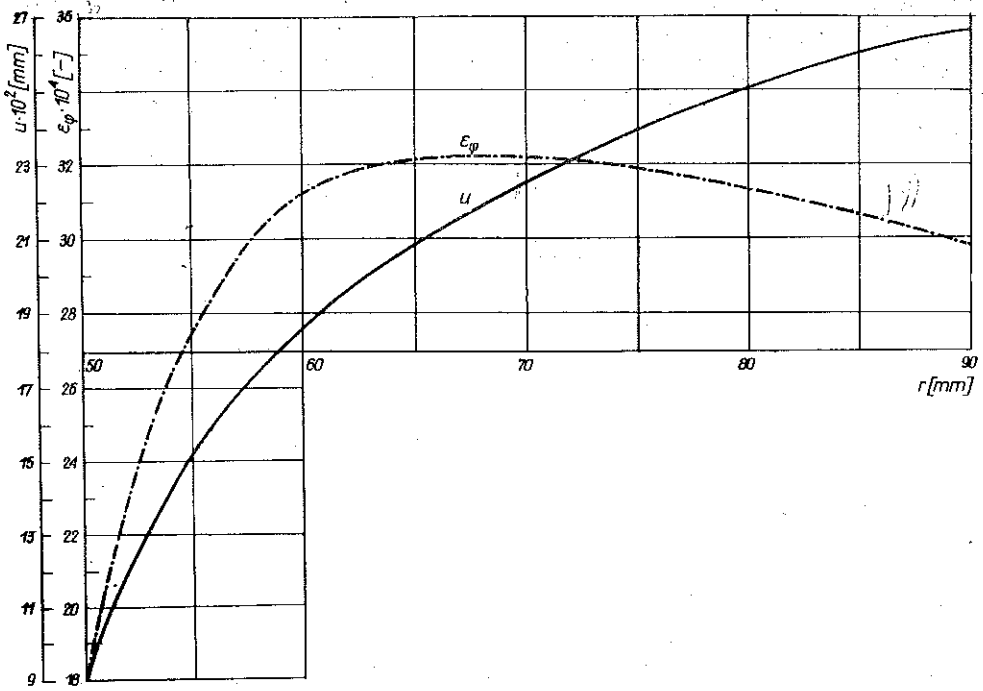
Końcowym etapem w analizie naprężeń jest rura, której model zawiera dwie strefy odciążane O1 i O2, ograniczone obszarem plastycznym i sprężystym. Obciążenia odpowiadające $t=120$ s powoduje, że w następstwie systematycznego przemieszczenia się strefy odciążanej O1 oraz cofania się strefy O2 znajdujący się między nimi rodzimy obszar plastyczny P2 zanika (promienie odciążane $R_1=R_2$). Taką historię zjawiska sugerowały już obliczenia według modelu O—P—E. Potwierdziła



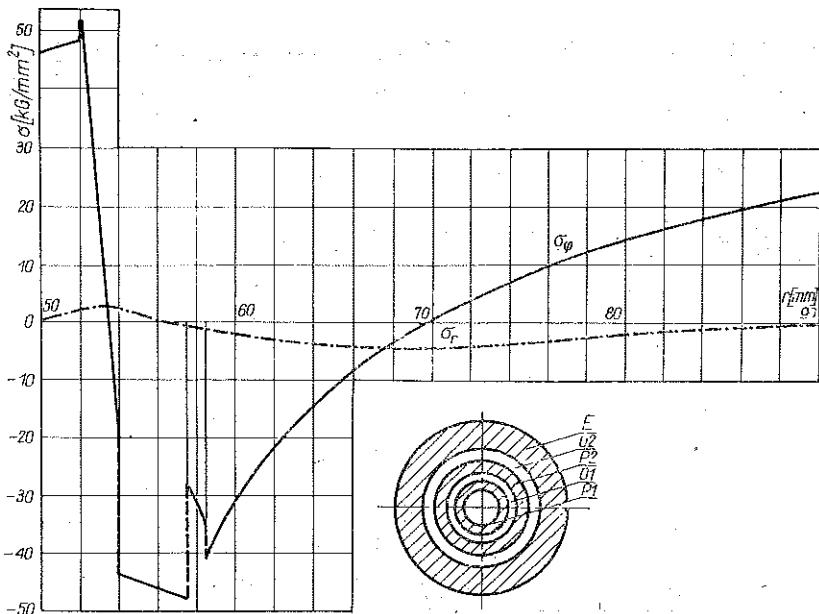
Rys. 19a. Rozkład przemieszczeń w rurze P1—O1—P2—O2—E; $t=40$ s



Rys. 19b. Rozkład naprężeń w rurze P1—O1—P2—O2—E; $t=40$ s



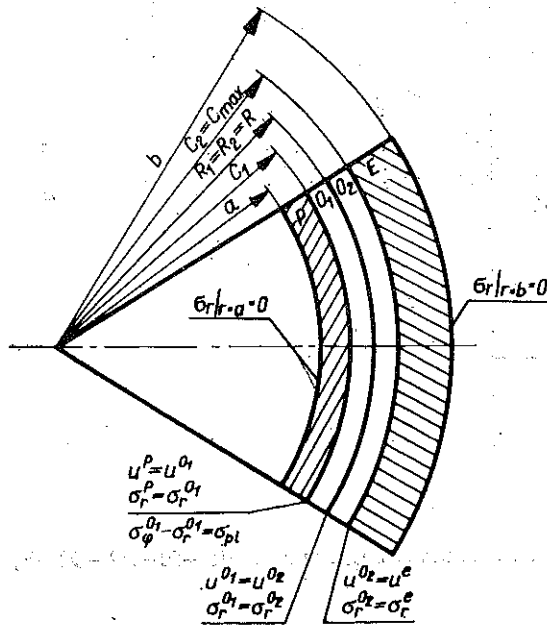
Rys. 20a. Rozkład przemieszczeń w rurze P1—O1—P2—O2—E; t = 50 s



Rys. 20b. Rozkład naprężeń w rurze P1—O1—P2—O2—E; t = 60 s

je też analiza wykresu funkcji \mathcal{E}^p dla modelu $P1-O1-P2-O2-E$. Ruchowi obszaru $O1$ towarzyszy powiększanie się sąsiadującej strefy plastycznej $P1$.

Ogólne równania (2.4), (2.5), (2.11), (2.12), (2.17) i (2.18), określające naprężenia i przemieszczenia w odpowiednich obszarach sprężystym, plastycznym i odciążonym są nadal poprawne.



Rys. 21. Model rury plastycznej — odciążanej — odciążanej — sprężystej $P1-O1-O2-E$

Rysunek 21, przedstawiający model rury $P-O1-O2-E$, uzupełnia całość opisu warunkami brzegowymi, na podstawie których określono stałe X_1 i X_2 oraz promień uplastycznienia:

$$\begin{aligned}
 X_1^p &= 0 \quad [\text{kG/mm}^2], \\
 X_2^{O1} &= \frac{(1+\nu) C_1^2}{2E} \left[\{\sigma_{p1}(T) - (\sigma_\phi^- + \sigma_r^-)\}_{r=c_1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{E}{1-\nu} (\alpha_0 + \alpha_1 \Delta T^-) \Delta T^- \Big|_{r=c_1} \right] \quad [\text{mm}^2], \\
 (3.11) \quad X_1^{O1} &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \left[-\sigma_r^- \Big|_{r=c_1} + \int_a^{c_1} \frac{\sigma_{p1}(T)}{r} dr + \frac{EX_2^{O1}}{(1+\nu)C_1^2} \right] \quad [-], \\
 X_2^p &= (C_1^2 X_1^{O1} + X_2^{O1}) - 3 \int_a^{c_1} \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} \Delta T^- \right) \Delta T^- r dr \quad [\text{mm}^2], \\
 X_1^{O2} &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \left[\frac{\sigma_r^- - \sigma_r^+}{E} \Big/ R + \frac{(u^- - u^+)/R}{(1+\nu)R} + \frac{X_1^{O1} 2(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right] \quad [-],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.11) \quad X_2^{02} &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)R^2}{2(1-\nu)} \left[\frac{(\sigma_r^* - \sigma_r^-)}{E} / R - \frac{(u^* - u^-)/R}{(1-2\nu)(1+\nu)R} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{(1-2\nu)R^2} \int_c^R (\alpha_0 + \alpha_1 AT^-) AT^- r dr + \frac{X_2^{01} 2(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)R^2} \right] \quad [\text{mm}^2], \\
 X_1^e &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \left[\frac{\sigma_r^*}{E} / C_2 + \frac{u^*/C_2}{(1+\nu)C_2} + \frac{X_1^{02} 2(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right] \quad [-], \\
 X_2^e &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)C_2^2}{2(1-\nu)} \left[-\frac{\sigma_r^*}{E} / C_2 + \frac{u^*/C_2}{(1+\nu)(1-2\nu)C_2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{(1-2\nu)C_2^2} \int_R^{c_2} (\alpha_0 + \alpha_1 AT^*) AT^* r dr + \frac{2(1-\nu)}{(1+\nu)(1-\nu)C_2^2} \right] \quad [\text{mm}^2]; \\
 (3.12) \quad &-\frac{1}{(1-\nu)b^2} \int_{c_2}^b (\alpha_0 + \alpha_1 T) T r dr + \frac{1}{1+\nu} \left[\frac{X_1^e}{1-2\nu} - \frac{X_2^e}{b^2} \right] = \sigma(C) = 0.
 \end{aligned}$$

Znajomość $R=R_1=R_2$, jak wiadomo, umożliwia rozwiązanie równania (3.12), z którego wyznacza się promień uplastycznienia. Po przeprowadzeniu obliczeń stałych X_1 i X_2 , można określić końcowy stan przemieszczeń i naprężeń (rys. 22),

4. UWAGI KOŃCOWE

1. Otrzymane rozkłady naprężeń obwodowych σ_φ charakteryzują się pewną nieciągłością na granicach obszarów sprężystych, plastycznych i odciążanych. Z matematycznego punktu widzenia powyższe nieciągłości są następstwem braku dostatecznej ilości stałych całkowania, w stosunku do których można by sformułować warunki brzegowe. Zaznaczyć należy, że warunki równowagi statyczne dla ciała są tutaj spełnione. Występowanie nieciągłości nie znajduje interpretacji fizycznej, jednakże zauważyć można, że różnice naprężeń występują w wąskich strefach leżących w pobliżu charakterystycznych granic i wiążą się też z pewną niedokładnością wyznaczenia ich położenia.

2. Przedstawiona quasi-stacjonarna analiza umożliwia prześledzenie zjawisk naprężeniowych w czasie z jednoczesnym uwzględnieniem stanów obciążeń poprzedzających stan chwilowy. Interpretacja taka pozwala ponadto na wyciągnięcie jakościowych wniosków co do powstawania obszarów plastycznych, odciążanych, sprężystych.

3. Metoda rozwiązania może być uogólniona na przypadki bardziej złożonych (np. kumulowanych) obciążeń termicznych. Wymaga jedynie odpowiedniej interpretacji zjawisk w charakterystycznych obszarach w oparciu o równania podstawowe, kryterium plastyczności i odciążania.

LITERATURA

1. A. KÖNIGER, W. LIEBMAN, *Untersuchungen über die Haltbarkeit von Schleudergusskokillen aus Stahl*, Stahl und Eisen, 23 Nov. 1959.
2. K. SKALSKI, *Zagadnienia cieplne i naprężeniowe wlewinc do odśrodkowego odlewania rur*, Praca doktorska, Politechnika Warszawska, 1973.
3. S. TIMOSHENKO, I. GOODIER, *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa 1962.
4. O. HOFFMAN, G. SACHS, *Wprowadzenie do teorii plastyczności*, PWT, Warszawa 1959.
5. J. N. SEWCENKO, *Pribliżenne metody resenija zadac termoplastičnosti pri powtornom nagruzenii*, Procnost i plasticnost, Izd. Nauka, Moskva 1971.
6. W. SOKOŁOWSKI, *Teorija plasticnosti*. Moskva 1950.

Резюме

КВАЗИ-СТАЦИОНАРНОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ
В ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЕ

Работа посвящена определению состояний термических напряжений, вызванных осесимметрическим распределением температур изменяющимся во времени. Интенсивная тепловая нагрузка вызывает вначале частичное пластическое течение трубы, а с течением времени ее разгрузку.

Физико-математические модели проблемы сводятся таким образом к одновременному описанию состояний напряжений и деформаций для сопряженных с собой упругих, пластических областей и областей разгрузки. Рассматриваемая задача трактуется как квази-стационарная; время играет в описании роль параметра.

SUMMARY

QUASI-STATIONARY STATE OF THERMAL STRESSES IN A THICK WALLED TUBE

The aim of this paper is determination of thermal stress states caused by axisymmetric time-dependent temperature distribution. Due to intense thermal load first the partial yielding of a tube occurs and then with time its unloading has place.

The physico-mathematical models for this problem are reduced then to the simultaneous description of the state of stress and strain in coupled elastic plastic and unloading regions. The problem considered is quasi-stationary where time plays a role of parameter.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INSTYTUT TECHNOLOGII MECHANICZNEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 lutego 1974 r.