ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 22, 4, 577—585, 1974
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

O ROZWIĄZANIU TYPU PAPKOWICZA-NEUBERA W ZAGADNIENIACH MECHANIKI OŚRODKÓW WIELOSKŁADNIKOWYCH

J. J. RUSZCZYCKI (KIJÓW)

W niniejszej pracy w ramach teorii Greena-Naghdiego rozważany jest problem przedstawienia rozwiązania podstawowego układu równań w postaci zaproponowanej przez Papkowicza i Neubera i wykorzystania rozwiązań typu Papkowicza-Neubera w teorii mieszanin dwóch ciał sprężystych.

1

Teoria mieszaniny wzajemnie dyfundujących materiałów oparta na nowoczesnych podstawach mechaniki ośrodka ciągłego opracowana została przez RACHMATULINA [2] i TRUESDELLA [9, 10]. Jej wariant dotyczący termodynamicznych i kinematycznych charakterystyk mieszaniny jako ośrodka niejednorodnego przedstawili GREEN i NAGHDI [3, 4]. Mieszaniny dwóch ciał niejednorodnych były rozważane w szeregu prac GREENA i STEELA [5 – 8]. Problem określenia w równaniach konstytutywnych nowych współczynników charakteryzujących wzajemne oddziaływanie składników mieszaniny został omówiony w [8]. W pracy niniejszej zaproponowane zostały proste przykłady. Przeprowadzone badania [1, 8] wykazały, że teoria Greena-Naghdiego może w zadowalający sposób opisywać zachowanie się jednorodnych mieszanin, w szczególności dwuskładnikowych stopów i określonej klasy materiałów kompozycyjnych.

W niniejszej pracy w ramach teorii Greena-Naghdiego rozważany jest problem przedstawienia rozwiązania podstawowego układu równań w postaci zaproponowanej przez PAPKOWICZA i NEUBERA i wykorzystania rozwiązań typu Papkowicza-Neubera w teorii mieszanin dwóch ciał sprężystych.

Jak wykazano w [6] podstawowy układ równań, opisujący naprężeniowo-odkształceniowy stan mieszaniny, posiada postać:

$$\tag{1.1} \begin{gathered} \sigma^{(1)}_{ki,k}+\rho_1 F^{(1)}_i-\pi_i=0, \qquad \sigma^{(2)}_{ki,k}+\rho_2 F^{(2)}_i+\pi_i=0, \\ \frac{1}{2}(\sigma^{(1)}_{ik}+\sigma^{(1)}_{ki})=-\alpha_2\delta_{ik}+\lambda_1\varepsilon^{(1)}_{nn}\delta_{ik}+2\mu_1\varepsilon^{(1)}_{ik}+\lambda_3\varepsilon^{(2)}_{nn}\delta_{ik}+2\mu_3\varepsilon^{(2)}_{ik}, \end{gathered}$$

$$\tag{1.2} \begin{gathered} \frac{1}{2}(\sigma^{(2)}_{ik}+\sigma^{(2)}_{ki})=\alpha_2\delta_{ik}+\lambda_2\varepsilon^{(2)}_{nn}\delta_{ik}+2\mu_2\varepsilon^{(2)}_{ik}+\lambda_4\varepsilon^{(1)}_{nn}\delta_{ik}+2\mu_3\varepsilon^{(1)}_{ik}, \\ \frac{1}{2}(\sigma^{(1)}_{ki}-\sigma^{(1)}_{ik})=\frac{1}{2}(\sigma^{(2)}_{ik}-\sigma^{(2)}_{ki})=\lambda_5(h_{ik}-h_{ki}) \end{gathered}$$

oraz

$$\varepsilon_{ik}^{(\alpha)}=\frac{1}{2}(u_{i,k}^{(\alpha)}+u_{k,i}^{(\alpha)}),\qquad h_{ik}=u_{k,i}^{(1)}-u_{i,k}^{(2)},\tag{1.3}$$

gdzie $\pi_i=\pi_{,i}$, $\pi=\bar{\rho}_1\alpha_2\varepsilon_{nn}^{(2)}+\bar{\rho}_2\alpha_2\varepsilon_{nn}^{(1)}$, $\bar{\rho}_\alpha=\dfrac{\rho_\alpha}{\rho}$, $\rho=\rho_1+\rho_2$ oraz gdzie $\sigma_{ik}^{(\alpha)}(x_1,x_2,x_3)$, $\varepsilon_{ik}^{(\alpha)}(x_1,x_2,x_3)$, $u_k(x_1,x_2,x_3)$ oznaczają dla każdego składnika α odpowiednio składowe tensora naprężenia, tensora odkształcenia i wektora przemieszczeń; $\alpha_2=\lambda_3-\lambda_4$ oznaczają początkowe naprężenia normalne, $F_k^{(\alpha)}$ — składowe głównego wektora sił masowych przyłożonych do jednostkowej objętości składnika α, δ_{ij} jest symbolem Kroneckera; λ_α, μ_α i ρ_α są stałymi Lamégo α-tego ośrodka, a λ_3, λ_4, λ_5, μ_3 oznaczają stałe charakteryzujące wzajemne oddziaływania składników. Tu i dalej $\alpha=1,2$; $i,k,n=1,2,3$.

W dalszych rozważaniach wygodniej będzie przedstawić równania (1.1) - (1.3) w formie wektorowej, przypominającej równania klasycznej teorii sprężystości Lamégo

$$\begin{aligned}&(\mu_1-\lambda_5)\nabla^2\mathbf{u}^{(1)}+(\mu_1+\lambda_1+\lambda_5-\alpha_2\bar{\rho}_2)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}^{(1)}+\\&\quad+(\mu_3+\lambda_5)\nabla^2\mathbf{u}^{(2)}+(\mu_3+\lambda_3-\lambda_5-\alpha_2\bar{\rho}_1)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}^{(2)}+\rho_1\mathbf{F}^{(1)}=0,\\&(\mu_2-\lambda_5)\nabla^2\mathbf{u}^{(2)}+(\mu_2+\lambda_2+\lambda_5+\alpha_2\bar{\rho}_1)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}^{(2)}+\\&\quad+(\mu_3+\lambda_5)\nabla^2\mathbf{u}^{(1)}+(\mu_3+\lambda_4-\lambda_5+\alpha_2\bar{\rho}_2)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}^{(1)}+\rho_2\mathbf{F}^{(2)}=0.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Ogólne rozwiązanie układu (1.4) poszukiwane jest w postaci:

$$\mathbf{u}^{(\alpha)}=\sum_{\beta=0}^{\beta=1}\left(A_{2\beta+\alpha}\,\mathrm{grad}\,(\varphi^{2\beta+\alpha}+\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\psi}^{2\beta+\alpha})+B_{2\beta+\alpha}\boldsymbol{\psi}^{2\beta+\alpha}\right),\tag{1.5}$$

gdzie A_l, B_l są stałymi, $\mathbf{r}$ jest wektorem wodzącym punktu, $l=1,2,3,4$. Żądając, aby funkcje (1.5) spełniały tożsamościowo równania (1.4), wyznaczamy stałe A_l, B_l oraz otrzymujemy warunki, przy których poprawne jest przedstawienie (1.5). Mamy zatem $A_l=1$

$$B_1=-\frac{2(2\mu_1+\lambda_1-\alpha_2\bar{\rho}_2)}{\mu_1+\lambda_1+\lambda_5-\alpha_2\bar{\rho}_2},\qquad B_2=-\frac{2(2\mu_2+\lambda_2+\alpha_2\bar{\rho}_1)}{\mu_2+\lambda_2+\lambda_5+\alpha_2\bar{\rho}_1},$$

$$B_3=-\frac{2(2\mu_3+\lambda_4+\alpha_2\bar{\rho}_2)}{\mu_3+\lambda_4-\lambda_5+\alpha_2\bar{\rho}_2},\qquad B_4=-\frac{2(2\mu_3+\lambda_3-\alpha_2\bar{\rho}_1)}{\mu_3+\lambda_3-\lambda_5-\alpha_2\bar{\rho}_1}.$$

Stałe powinny przy tym spełniać warunki

$$\frac{2\mu_1+\lambda_1-\alpha_2\bar{\rho}_2}{2\mu_3+\lambda_4+\alpha_2\bar{\rho}_2}=\frac{\mu_1-\lambda_5}{\mu_3+\lambda_5},\qquad \frac{2\mu_2+\lambda_2+\alpha_2\bar{\rho}_1}{2\mu_3+\lambda_3-\alpha_2\bar{\rho}_1}=\frac{\mu_2-\lambda_5}{\mu_3+\lambda_5}.\tag{1.6}$$

Funkcje $\varphi^{(l)}$, $\boldsymbol{\psi}^{(l)}$ znajdujemy z rozwiązania równań Poissona

$$B_1\nabla^2\varphi^{(1)}=\frac{\bar{\rho}_1}{\mu_1-\lambda_5}\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}^{(1)},\qquad B_2\nabla^2\varphi^{(2)}=\frac{\rho_2}{\mu_2-\lambda_5}\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}^{(2)},\tag{1.7}$$

(1.7) [c.d.]

$$B_3 \nabla^2 \varphi^{(3)} = \frac{1}{(\mu_1-\lambda_5)(\mu_2-\lambda_5)-(\mu_3+\lambda_5)^2} \times \left[\frac{(\mu_1-\lambda_5)^2}{\mu_3+\lambda_5} \rho_1 \mathbf{r}\cdot\mathbf{F}^{(1)} - (\mu_2-\lambda_5)\rho_2 \mathbf{r}\cdot\mathbf{F}^{(2)}\right],$$

$$B_4 \nabla^2 \varphi^{(4)} = \frac{1}{(\mu_1-\lambda_5)(\mu_2-\lambda_5)-(\mu_3+\lambda_5)^2} \times \left[(\mu_1-\lambda_5)\rho_1 \mathbf{r}\cdot\mathbf{F}^{(1)} - \frac{(\mu_2-\lambda_5)^2}{\mu_3+\lambda_5} \rho_2 \mathbf{r}\cdot\mathbf{F}^{(2)}\right],$$

$$B_1 \nabla^2 \boldsymbol{\psi}^{(1)} = \frac{\rho_1}{\mu_1-\lambda_5} \mathbf{F}^{(1)}, \qquad B_2 \nabla^2 \boldsymbol{\psi}^{(2)} = \frac{\rho_2}{\mu_2-\lambda_5} \mathbf{F}^{(2)},$$

oraz

(1.8)

$$B_3 \nabla^2 \boldsymbol{\psi}^{(3)} = \frac{1}{(\mu_1-\lambda_5)(\mu_2-\lambda_5)-(\mu_3+\lambda_5)^2} \times \left[\frac{(\mu_1-\lambda_5)^2}{\mu_3+\lambda_5} \rho_1 \mathbf{F}^{(1)} - (\mu_2-\lambda_5)\rho_2 \mathbf{F}^{(2)}\right],$$

$$B_4 \nabla^2 \boldsymbol{\psi}^{(4)} = \frac{1}{(\mu_1-\lambda_5)(\mu_2-\lambda_5)-(\mu_3+\lambda_5)^2} \times \left[(\mu_1-\lambda_5)\rho_1 \mathbf{F}^{(1)} - \frac{(\mu_2-\lambda_5)^2}{\mu_3+\lambda_5} \rho_2 \mathbf{F}^{(2)}\right].$$

Zatem rozwiązanie układu równań (1.4) przy spełnieniu warunków (1.6)–(1.8) jest typu Papkowicza-Neubera:

(1.9)

$$\mathbf{u}^{(1)} = \operatorname{grad}(\varphi^{(1)} + \mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\psi}^{(1)}) - \frac{2(2\mu_1+\lambda_1-\alpha_2\bar{\rho}_2)}{\mu_1+\lambda_1+\lambda_5-\alpha_2\bar{\rho}_2}\boldsymbol{\psi}^{(1)} + \operatorname{grad}(\varphi^{(3)} + \mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\psi}^{(3)}) - \frac{2(2\mu_3+\lambda_4+\alpha_2\bar{\rho}_2)}{\mu_3+\lambda_5-\lambda_5+\alpha_2\bar{\rho}_2}\boldsymbol{\psi}^{(3)},$$

$$\mathbf{u}^{(2)} = \operatorname{grad}(\varphi^{(2)} + \mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\psi}^{(2)}) - \frac{2(2\mu_2+\lambda_2+\alpha_2\bar{\rho}_1)}{\mu_2+\lambda_2+\lambda_5+\alpha_2\bar{\rho}_1}\boldsymbol{\psi}^{(2)} + \operatorname{grad}(\varphi^{(4)} + \mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\psi}^{(4)}) - \frac{2(2\mu_3+\lambda_3-\alpha_2\bar{\rho}_1)}{\mu_3+\lambda_3-\lambda_5-\alpha_2\bar{\rho}_1}\boldsymbol{\psi}^{(4)}.$$

2

Rozpatrzmy jeden prosty przypadek rozwiązania (1.9). W tym celu wprowadźmy cztery funkcje harmoniczne $\chi^l(x_1, x_2, x_3)$, przyjmijmy w równaniu (1.9)

$$\varphi^{(l)} = m_l \chi^{(l)}, \qquad \psi_i^{(l)} = \delta_{i3}\chi_{,3}^{(l)}$$

i wybierzmy stałe m_l tak, by naprężenia styczne znikały na płaszczyźnie $x_3=0$. Wzory dla przemieszczeń poszczególnych składników przyjmą zatem następującą postać:

$$
\begin{aligned}
u_1^{(1)} &= m_1\chi^{(1)}_{,1} + x_3\chi^{(1)}_{,31} + m_3\chi^{(3)}_{,1} + x_3\chi^{(3)}_{,31},\\
u_2^{(1)} &= m_1\chi^{(1)}_{,2} + x_3\chi^{(3)}_{,32} + m_3\chi^{(3)}_{,2} + x_3\chi^{(3)}_{,32},\\
u_3^{(1)} &= \frac{1}{2}B_1\chi^{(1)}_{,3} + x_3\chi^{(1)}_{,33} + \frac{1}{2}B_3\chi^{(3)}_{,3} + x_3\chi^{(3)}_{,33},\\
u_1^{(2)} &= m_2\chi^{(2)}_{,1} + x_3\chi^{(2)}_{,31} + m_4\chi^{(4)}_{,1} + x_3\chi^{(4)}_{,31},\\
u_2^{(2)} &= m_2\chi^{(2)}_{,2} + x_3\chi^{(2)}_{,32} + m_4\chi^{(4)}_{,2} + x_3\chi^{(4)}_{,32},\\
u_3^{(2)} &= \frac{1}{2}B_2\chi^{(2)}_{,3} + x_3\chi^{(2)}_{,33} + \frac{1}{2}B_4\chi^{(4)}_{,3} + x_3\chi^{(3)}_{,33}.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Z warunków (1.3) określamy tensory $\varepsilon_{ik}^{(\alpha)}$ i h_{ik}, a następnie z równań (1.2) niesymetryczne tensory naprężenia $\sigma_{ik}^{(\alpha)}$. W rezultacie otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11}^{(1)} = {}& -\alpha_2 + 2\mu_1\Bigg[x_3\chi^{(1)}_{,311} + x_3\chi^{(3)}_{,311} + \frac{\mu_1-\lambda_5}{\mu_1+\lambda_1+\lambda_5-\alpha_2\bar{\rho}_2}\left(\chi^{(1)}_{,11} - \frac{\lambda_1}{\mu_1}\chi^{(1)}_{,33}\right) + \\
& + \frac{\mu_3+\lambda_5}{\mu_3+\lambda_4-\lambda_5+\alpha_2\bar{\rho}_2}\left(\chi^{(3)}_{,11} - \frac{\lambda_1}{\mu_1}\chi^{(3)}_{,33}\right)\Bigg] + 2\mu_3\Bigg[x_3\chi^{(2)}_{,311} + x_3\chi^{(4)}_{,311} + \\
& + \frac{\mu_2-\lambda_5}{\mu_2+\lambda_2+\lambda_5+\alpha_2\bar{\rho}_1}\left(\chi^{(2)}_{,11} - \frac{\lambda_3}{\mu_3}\chi^{(2)}_{,33}\right) + \\
& + \frac{\mu_3+\lambda_5}{\mu_3+\lambda_3-\lambda_5-\alpha_2\bar{\rho}_2}\left(\chi^{(4)}_{,11} - \frac{\lambda_3}{\mu_3}\chi^{(4)}_{,33}\right)\Bigg],\\[2ex]
\sigma_{22}^{(1)} = {}& -\alpha_2 + 2\mu_1\Bigg[x_3\chi^{(1)}_{,322} + x_3\chi^{(3)}_{,322} + \frac{\mu_1-\lambda_5}{\mu_1+\lambda_1+\lambda_5-\alpha_2\bar{\rho}_2}\left(\chi^{(1)}_{,22} - \frac{\lambda_1}{\mu_1}\chi^{(1)}_{,33}\right) + \\
& + \frac{\mu_3+\lambda_5}{\mu_3+\lambda_4-\lambda_5+\alpha_2\bar{\rho}_2}\left(\chi^{(3)}_{,22} - \frac{\lambda_1}{\mu_1}\chi^{(3)}_{,33}\right)\Bigg] + 2\mu_3\Bigg[x_3\chi^{(2)}_{,322} + x_3\chi^{(4)}_{,322} + \\
& + \frac{\mu_2-\lambda_5}{\mu_2+\lambda_2+\lambda_5+\alpha_2\bar{\rho}_1}\left(\chi^{(2)}_{,22} - \frac{\lambda_3}{\mu_3}\chi^{(3)}_{,33}\right) + \\
& + \frac{\mu_3+\lambda_5}{\mu_3+\lambda_3-\lambda_5-\alpha_2\bar{\rho}_2}\left(\chi^{(4)}_{,22} - \frac{\lambda_3}{\mu_3}\chi^{(4)}_{,33}\right)\Bigg],\\[2ex]
\sigma_{33}^{(1)} = {}& -\alpha_2 + 2\mu_1\Bigg[x_3\chi^{(1)}_{,333} + x_3\chi^{(3)}_{,333} - \frac{\mu_1-\lambda_5}{\mu_1+\lambda_1+\lambda_5-\alpha_2\bar{\rho}_2}\left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)\chi^{(1)}_{,33} - \\
& - \frac{\mu_3+\lambda_5}{\mu_3+\lambda_4-\lambda_5+\alpha_2\bar{\rho}_2}\left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)\chi^{(3)}_{,33}\Bigg] + 2\mu_3\Bigg[x_3\chi^{(2)}_{,333} + x_3\chi^{(4)}_{,333} - \\
& - \frac{\mu_2-\lambda_5}{\mu_2+\lambda_2+\lambda_5+\alpha_2\bar{\rho}_1}\left(1 + \frac{\lambda_3}{\mu_3}\right)\chi^{(2)}_{,33} - \\
& - \frac{\mu_3+\lambda_5}{\mu_3+\lambda_3-\lambda_5-\alpha_2\bar{\rho}_1}\left(1 + \frac{\lambda_3}{\mu_3}\right)\chi^{(4)}_{,33}\Bigg],\\[2ex]
\sigma_{13}^{(1)} = {}& 2\mu_1\left(x_3\chi^{(1)}_{,331} + x_3\chi^{(3)}_{,331}\right) + 2\mu_3\left(x_3\chi^{(2)}_{,331} + x_3\chi^{(4)}_{,331}\right) - \lambda_5 a_l\chi^{(l)}_{,13},
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

(2.2) [c.d.]

$$\sigma_{31}^{(1)}=2\mu_1(x_3\chi_{,331}^{(1)}+x_3\chi_{,331}^{(3)})+2\mu_3(x_3\chi_{,331}^{(2)}+x_3\chi_{,331}^{(4)})+\lambda_5 a_l\chi_{,13}^{(l)},$$

$$\sigma_{23}^{(1)}=2\mu_1(x_3\chi_{,332}^{(1)}+x_3\chi_{,332}^{(3)})+2\mu_3(x_3\chi_{,332}^{(2)}+x_3\chi_{,332}^{(4)})-\lambda_5 a_l\chi_{,23}^{(l)},$$

$$\sigma_{32}^{(1)}=2\mu_1(x_3\chi_{,332}^{(1)}+x_3\chi_{,332}^{(3)})+2\mu_3(x_3\chi_{,332}^{(2)}+x_3\chi_{,332}^{(4)})+\lambda_5 a_l\chi_{,23}^{(l)},$$

$$\sigma_{12}^{(1)}=\sigma_{21}^{(1)}=2\mu_1\left(x_3\chi_{,321}^{(1)}+x_3\chi_{,321}^{(3)}+\frac{\mu_1-\lambda_5}{\mu_1+\lambda_1+\lambda_5-\alpha_2\bar{p}_2}\chi_{,21}^{(1)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\mu_3+\lambda_5}{\mu_3+\lambda_1-\lambda_5+\alpha_2\bar{p}_2}\chi_{,21}^{(3)}\right)+2\mu_3\left(x_3\chi_{,321}^{(2)}+x_3\chi_{,321}^{(4)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\mu_2-\lambda_5}{\sigma_2+\lambda_2+\lambda_5+\alpha_2\bar{p}_1}\chi_{,21}^{(2)}+\frac{\mu_3+\lambda_5}{\mu_3+\lambda_3-\lambda_5-\alpha_2\bar{p}_1}\chi_{,21}^{(4)}\right),$$

gdzie

$$a_l\chi_{,\alpha3}^{(l)}=(B_1\chi^{(1)}+B_3\chi^{(3)}-B_2\chi^{(2)}-B_4\chi^{(4)})_{,\alpha3}.$$

Został już tu wykorzystany warunek

$$\sigma_{\alpha3}^{(1)}+\sigma_{\alpha3}^{(2)}=2(\mu_1+\mu_3)(x_3\chi_{,33\alpha}^{(1)}+x_3\chi_{,33\alpha}^{(3)})+2(\mu_2+\mu_4)(x_3\chi_{,33\alpha}^{(2)}+x_3\chi_{,33\alpha}^{(4)})$$

i określone zostało m_l:

$$m_1=\frac{\mu_1-\lambda_5}{\mu_1+\lambda_1+\lambda_5-\alpha_2\bar{p}_2},\qquad m_2=\frac{\mu_2-\lambda_5}{\mu_2+\lambda_2+\lambda_5+\alpha_2\bar{p}_1},$$

$$m_3=\frac{\mu_3+\lambda_5}{\mu_3+\lambda_5-\lambda_5+\alpha_2\bar{p}_2},\qquad m_5=\frac{\mu_3+\lambda_5}{\mu_3+\lambda_3-\lambda_5-\alpha_2\bar{p}_1}.$$

Wzory na składowe tensora naprężenia $\sigma_{ik}^{(2)}$ otrzymujemy z odpowiednich równań (2.2) przez zamianę wskaźników 1, 2, 3, 4 przy μ, λ, χ na wskaźniki 2, 1, 4, 3 (zakładając $\mu_3=\mu_4$ i wykluczając wskaźniki oznaczające różniczkowanie).

Żądając, by funkcje $\chi_{,k33}^{(l)}$, $\chi_{,33}^{(l)}$ przy $x_3\to 0$ były ograniczone, otrzymujemy wspomniany wyżej warunek znikania naprężeń stycznych na płaszczyźnie $x_3=0$:

$$\sigma_{13}^{(1)}(x_1,x_2,0)+\sigma_{12}^{(2)}(x_1,x_2,0)=0,$$
$$\sigma_{23}^{(1)}(x_1,x_2,0)+\sigma_{23}^{(2)}(x_1,x_3,0)=0.$$

W tym przypadku naprężenia częściowe i przemieszczenia normalne na płaszczyźnie $x_3=0$ przyjmują postać:

$$\begin{aligned}(2.3)\quad &\sigma_{31}^{(1)}(x_1,x_2,0)=\sigma_{13}^{(2)}(x_1,x_2,0)=-\sigma_{13}^{(1)}(x_1,x_2,0)=-\sigma_{31}^{(2)}(x_1,x_2,0)=\\ &\qquad=\lambda_5(B_1\chi_{,13}^{(1)}+B_3\chi_{,13}^{(3)}-B_2\chi_{,13}^{(2)}-B_4\chi_{,13}^{(4)})_{x_3=0},\\ &\sigma_{32}^{(1)}(x_1,x_2,0)=\sigma_{23}^{(2)}(x_1,x_2,0)=-\sigma_{23}^{(1)}(x_1,x_2,0)=-\sigma_{32}^{(2)}(x_1,x_2,0)=\\ &\qquad=\lambda_5(B_1\chi_{,23}^{(1)}+B_3\chi_{,23}^{(3)}-B_2\chi_{,23}^{(2)}-B_4\chi_{,23}^{(4)})_{x_3=0},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2.4)\quad &\sigma_{33}^{(1)}(x_1,x_2,0)=-\alpha_2-2(\mu_1+\lambda_1)(m_1\chi_{,33}^{(1)}+m_3\chi_{,33}^{(3)})_{x_3=0}-\\ &\qquad-2(\mu_3+\lambda_3)(m_2\chi_{,33}^{(2)}+m_4\chi_{,33}^{(4)})_{x_3=0},\\ &\sigma_{33}^{(2)}(x_1,x_2,0)=\alpha_2-2(\mu_2+\lambda_2)(m_2\chi_{,33}^{(2)}+m_4\chi_{,33}^{(4)})_{x_3=0}-\\ &\qquad-2(\mu_3+\lambda_4)(m_1\chi_{,33}^{(1)}+m_3\chi_{,33}^{(3)})_{x_3=0},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&u_3^{(1)}(x_1, x_2, 0) = \frac{1}{2}(B_1 \chi^{(1)}_{,3} + B_3 \chi^{(3)}_{,3})_{x_3=0},\\
(2.5)\qquad &u_3^{(2)}(x_1, x_2, 0) = \frac{1}{2}(B_2 \chi^{(2)}_{,3} + B_4 \chi^{(4)}_{,3})_{x_3=0}.
\end{aligned}
$$

Zatem, jeśli na płaszczyźnie $x_3=0$ dane są naprężenia normalne i styczne $p^{(\alpha)}(x_1, x_2)$, $t_\alpha(x_1, x_2)$, to funkcje $\chi^{(l)}$ znajdujemy z rozwiązania równań Laplace'a $\nabla^2 \chi^{(l)}=0$ z czterema warunkami brzegowymi (2.3) - (2.4) lub (2.3) - (2.5).

W dalszym ciągu będą nam potrzebne niektóre wzory na przemieszczenia (2.1) i naprężenia (2.2) napisane w układzie współrzędnych walcowych (r, θ, z):

$$
\begin{aligned}
&u_r^{(1)} = z\chi^{(1)}_{,rz} + z\chi^{(3)}_{,rz} + m_1 \chi^{(1)}_{,r} + m_3 \chi^{(3)}_{,r},\\
&u_\theta^{(1)} = \frac{z}{r}\chi^{(1)}_{,\theta z} + \frac{z}{r}\chi^{(3)}_{,\theta z} + \frac{m_1}{r}\chi^{(1)}_{,\theta} + \frac{m_3}{r}\chi^{(3)}_{,\theta},\\
&u_z^{(1)} = z\chi^{(1)}_{,zz} + z\chi^{(3)}_{,zz} + \frac{1}{2}B_1\chi^{(1)}_{,z} + \frac{1}{2}B_3\chi^{(3)}_{,z},\\
(2.6)\qquad &\sigma_{rz}^{(1)} = 2\mu_1(z\chi^{(1)}_{,rzz} + z\chi^{(3)}_{,rzz}) + 2\mu_3(z\chi^{(2)}_{,rzz} + z\chi^{(4)}_{,rzz}) - \lambda_5 a_l \chi^{(l)}_{,rz},\\
&\sigma_{\theta z}^{(1)} = 2\mu_1\left(\frac{z}{r}\chi^{(1)}_{,\theta zz} + \frac{z}{r}\chi^{(3)}_{,\theta zz}\right) + 2\mu_3\left(\frac{z}{r}\chi^{(2)}_{,\theta zz} + \frac{z}{r}\chi^{(4)}_{,\theta zz}\right) - \lambda_5 a_l \chi^{(l)}_{,zz},\\
&\sigma_{zz}^{(1)} = -\alpha_2 + 2\mu_1\left[z\chi^{(1)}_{,zzz} + z\chi^{(3)}_{,zzz} - \frac{\mu_1+\lambda_5}{\mu_1+\lambda_1+\lambda_5-\alpha_2\bar{\rho}_2}\left(1+\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)\chi^{(1)}_{,zz} -\right.\\
&\qquad \left.- \frac{\mu_3+\lambda_5}{\mu_3+\lambda_4-\lambda_5+\alpha_2\bar{\rho}_2}\left(1+\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)\chi^{(3)}_{,zz}\right] + 2\mu_3\left[z\chi^{(2)}_{,zzz} + z\chi^{(4)}_{,zzz} -\right.\\
&\qquad - \frac{\mu_2-\lambda_5}{\mu_2+\lambda_2+\lambda_5+\alpha_2\bar{\rho}_1}\left(1+\frac{\lambda_3}{\mu_3}\right)\chi^{(2)}_{,zz} -\\
&\qquad \left.- \frac{\mu_3+\lambda_5}{\mu_3+\lambda_3-\lambda_5-\alpha_2\bar{\rho}_1}\left(1+\frac{\lambda_3}{\mu_3}\right)\chi^{(4)}_{,zz}\right].
\end{aligned}
$$

Analogiczne wyrażenia dla drugiego składnika otrzymujemy zamieniając we wskaźnikach liczby 1, 2, 3, 4 na 2, 1, 4, 3, a w wyrażeniach dla naprężeń stycznych znak przy λ_5 na przeciwny.

3

Niech na powierzchnię brzegu $z=0$ półnieskończonego ciała działa osiowo-symetryczne ciśnienie normalne. Przyjmijmy

$$
\begin{aligned}
&\chi^{(1)} = \frac{N_1}{4\pi(\mu_1+\lambda_1)B_1}\ln(r_*+z+a), \qquad \chi^{(2)} = \frac{N_2}{4\pi(\mu_2+\lambda_2)B_2}\ln(r_*+z+a),\\
(3.1)\qquad &\chi^{(3)} = \frac{N_1}{4\pi(\mu_1+\lambda_1)B_3}\ln(r_*+z+a), \qquad \chi^{(4)} = \frac{N_2}{4\pi(\mu_2+\lambda_2)B_4}\ln(r_*+z+a),
\end{aligned}
$$

gdzie $r_*^2 = r^2 + (z+a)^2$, a N_α należy określić w procesie rozwiązania.

Wyrażenia dla przemieszczeń otrzymujemy podstawiając (3.1) do wzorów (2.6). Wszędzie tu należy skorzystać z własności symetrii przyjmując $\chi_{,\theta}^{(l)}=0$. W rezultacie otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
u_r^{(1)} &= -\frac{N_1}{4\pi(\mu_1+\lambda_1)}\left[\frac{rz}{r_*^3}\left(\frac{1}{B_1}+\frac{1}{B_3}\right)+\frac{2m_1}{B_1}\left(\frac{1}{r}-\frac{z+a}{r\cdot r_*}\right)\right],\\
u_r^{(2)} &= -\frac{N_2}{4\pi(\mu_2+\lambda_2)}\left[\frac{rz}{r_*^3}\left(\frac{1}{B_2}+\frac{1}{B_4}\right)+\frac{2m_2}{B_2}\left(\frac{1}{r}-\frac{z+a}{r\cdot r_*}\right)\right],\\
u_z^{(1)} &= \frac{N_1}{4\pi(\mu_1+\lambda_1)}\left[\frac{z(z+a)}{r_*^3}\left(\frac{1}{B_1}+\frac{1}{B_3}\right)+\frac{2}{r_*}\right], \qquad u_\theta^{(1)}=0,\\
u_z^{(2)} &= \frac{N_2}{4\pi(\mu_2+\lambda_2)}\left[\frac{z(z+a)}{r_*^3}\left(\frac{1}{B_2}+\frac{1}{B_4}\right)+\frac{2}{r_*}\right], \qquad u_\theta^{(2)}=0.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Naprężenia na płaszczyźnie $z=\text{const}$ przyjmują następującą postać

$$
\begin{aligned}
\sigma_{zz}^{(1)} &= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\mu_1 N_1}{\mu_1+\lambda_1}\left(\frac{1}{B_1}+\frac{1}{B_3}\right)+\frac{\mu_3 N_2}{\mu_2+\lambda_2}\left(\frac{1}{B_2}+\frac{1}{B_4}\right)\right]\left(\frac{z}{r_*^3}-\frac{3(z+a)^2}{r_*^5}\right)+\\
&\quad+\left(\frac{N_1}{2\pi}\frac{m_1}{B_1}+\frac{N_2}{2\pi}\frac{m_2}{B_2}\frac{\mu_3+\lambda_3}{\mu_2+\lambda_2}\right)\frac{z+a}{r_*^3},\\
\sigma_{zz}^{(2)} &= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\mu_3 N_1}{\mu_1+\lambda_1}\left(\frac{1}{B_1}+\frac{1}{B_3}\right)+\frac{\mu_2 N_2}{\mu_2+\lambda_2}\left(\frac{1}{B_2}+\frac{1}{B_4}\right)\right]\left(\frac{z}{r_*^3}-\frac{3(z+a)^2}{r_*^5}\right)+\\
&\quad+\left(\frac{N_1}{2\pi}\frac{m_1}{B_1}\frac{\mu_3+\lambda_3}{\mu_1+\lambda_1}+\frac{N_2}{2\pi}\frac{m_2}{B_2}\right)\frac{z+a}{r_*^3},\\
&\sigma_{rz}^{(\alpha)}=0, \qquad \sigma_{\theta z}^{(\alpha)}=0.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

W ten sposób pola przemieszczeń (3.2) spełniają warunki brzegowe na powierzchni ciała $z=0$, które na podstawie (3.3) przyjmują postać:

$$
\begin{aligned}
P^{(1)}(r) &= -(\sigma_{zz}^{(1)})_{z=0}=\frac{a}{2\pi(r^2+a^2)^{3/2}}\times\\
&\quad\times\left(\frac{\mu_1-\lambda_5}{2\mu_1+\lambda_1-\alpha_2\bar{\rho}_2}N_1+\frac{\mu_3+\lambda_3}{\mu_2+\lambda_2}\,\frac{\mu_2-\lambda_5}{2\mu_2+\lambda_2+\alpha_2\bar{\rho}_1}N_2\right),\\
P^{(2)}(r) &= -(\sigma_{zz}^{(2)})_{z=0}=\frac{a}{2\pi(r^2+a^2)^{3/2}}\times\\
&\quad\times\left(\frac{\mu_3+\lambda_3}{\mu_1+\lambda_1}\,\frac{\mu_1+\lambda_5}{2\mu_1+\lambda_1-\alpha_2\bar{\rho}_2}N_1+\frac{\mu_2-\lambda_5}{2\mu_2+\lambda_2+\alpha_2\bar{\rho}_1}N_2\right).
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Oznaczmy przez S_α ogólne wielkości sił przyłożonych na części α-tego składnika mieszaniny występujące na brzegu na płaszczyźnie $z=0$:

$$
S_\alpha=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}P^{(\alpha)}(r)\,r\,dr\,d\varphi=2\pi\int_0^{\infty}P^{(\alpha)}(r)\,r\,dr<\infty.
$$

W konkretnych zadaniach wygodnie jest dawać całkowite siły sumaryczne $S = S_1 + S_2$, natomiast wielkość charakteryzującą rozkład udziału całkowitej siły na poszczególne składniki należy określić z dodatkowych rozważań fizycznych, na przykład proporcjonalnie do objętościowej zawartości składników w mieszaninie.

Z warunków (3.4) określamy stałe

$$N_1 = \frac{1}{\Delta} \frac{\mu_1 - \lambda_5}{2\mu_1 + \lambda_1 - \alpha_2 \bar{\rho}_2} \left(S_2 - \frac{\mu_3 + \lambda_3}{\mu_1 + \lambda_1} S_1 \right),$$

$$N_2 = \frac{1}{\Delta} \frac{\mu_5 - \lambda_5}{2\mu_2 + \lambda_2 + \alpha_2 \bar{\rho}_1} \left(S_1 - \frac{\mu_3 + \lambda_3}{\mu_2 + \lambda_2} S_2 \right),$$

$$\Delta = \frac{(\mu_1 - \lambda_5)(\mu_2 - \lambda_5)}{(2\mu_1 + \lambda_1 - \alpha_2 \bar{\rho}_2)(2\mu_2 + \lambda_2 + \alpha_2 \bar{\rho}_1)} \left(1 - \frac{(\mu_3 + \lambda_3)^2}{(\mu_1 + \lambda_1)(\mu_2 + \lambda_2)} \right).$$

Na tym kończy się rozwiązanie problemu.

Przy $\alpha \to 0$ otrzymujemy uogólnienie zagadnienia Boussinesqua na przypadek materiału będącego jednorodną mieszaniną dwóch materiałów sprężystych.

Analiza rozwiązań (3.2) i (3.3) wykazuje, że uwzględnienie wzajemnego wpływu składników mieszaniny w procesie odkształcenia prowadzi do złożonych zależności pola częściowych przemieszczeń i naprężeń od własności zmieszanych materiałów sprężystych, danych sił powierzchniowych i stałych fizycznych, opisujących procesy oddziaływania pól naprężeń i odkształceń składników mieszaniny.

Literatura cytowana w tekście

1. Р. И. Нигматулин, *Методы механики сплошной среды для описания многофазных смесей*, ПММ, **34**, 6, 1970.
2. Х. А. Рахматулин, *Основы газодинамики взаимнопроникающих движений сжимаемых сред*, ПММ, **20**, 2, 1956.
3. A. E. Green, P. M. Naghdi, *A dynamical theory of interacting continua*, Int. J. Eng. Sci., **3**, 4, 1965.
4. A. E. Green, P. M. Naghdi, *A theory of mixtures*, Arch. Rat. Mech. Anal., **24**, 4, 1967.
5. A. E. Green, T. R. Steel, *Constitutive equations for interacting continua*, Int. J. Eng. Sci., **4**, 4, 1966.
6. T. R. Steel, *Applications of a theory of interacting continua*, Quart. J. Mech. Appl. Math., **20**, 1, 1967.
7. T. R. Steel, *Linearised theory of plane strain of mixture of two solids*, Int. J. Eng. Sci., **5**, 10, 1967.
8. T. R. Steel, *Determination of the constitutive coefficients for a mixture of two solids*, Int. J. Sol. Struct., **4**, 12, 1968.
9. C. Truesdell, *Sulle basi della termomeccanica*, Rend. Reale Accad. Lincei, (8), **22**, 1957.
10. C. Truesdell, R. Toupin, *The classical field theories*, in Hand-buch der Physik, III/1, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1960.

Резюме

О РЕШЕНИИ ТИПА ПАПКОВИЧА-НЕЙБЕРА В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД

В работе в рамках теории Грина и Нахди изучается вопрос о представлении решения основной системы уравнений в виде, предложенном Папковичем и Нейбером, и об использовании представления типа Папковича-Нейбера в теории смеси двух упругих тел.

SUMMARY

ON THE PAPKOVICH-NEUBER TYPE SOLUTION FOR PROBLEMS OF MECHANICS OF MULTICOMPONENT MEDIA

In a frame of Green-Naghdi theory a problem of solution of governing equations by means of Papkovich-Neuber representation is examined. Application of Papkovich-Neuber solution to the theory of mixture of two elastic bodies is given.

INSTYTUT MECHANIKI
AKADEMII NAUK ZSRR

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 stycznia 1974 **r.**