

ZAGADNIENIA TERMOSPŁĘŻYSTOŚCI W TARCZACH MIKROPOLARNYCH

KRYSTYNA MAJORKOWSKA - KNAP (PŁOCK)

W pracy rozważa się zagadnienie naprężeń termicznych w tarczy prostokątnej poddanej działaniu pola temperatury na brzegach. Zagadnienie rozwiązuje się w naprężeniach przy użyciu funkcji Airy'ego-Mindlina, wykorzystując zastosowanie pojedynczych i podwójnych szeregów Fouriera.

1. WPROWADZENIE

W niniejszej pracy rozważać będziemy liniowy, termosprężysty ośrodek mikropolarny poddany działaniu temperatury.

Za podstawowe równania przyjmuje się:

1. Równania równowagi, które przy pominięciu sił i momentów masowych, mają postać [1]

$$(1.1) \quad \sigma_{ji, j} = 0, \quad \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji, j} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

gdzie symbol ϵ_{ijk} oznacza alternator Leviego-Civita.

2. Równania konstytutywne

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{ji} &= (\mu + \alpha) \gamma_{ji} + (\mu - \alpha) \gamma_{ij} + (\lambda \gamma_{kk} - \bar{\nu} \theta) \delta_{ij}, \\ \mu_{ji} &= (\gamma + \epsilon) \kappa_{ji} + (\gamma - \epsilon) \kappa_{ij} + \beta \kappa_{kk} \delta_{ij}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(1.3) \quad \gamma_{ji} = u_{i, j} - \epsilon_{kji} \varphi_k, \quad \kappa_{ji} = \varphi_{i, j}.$$

Symbol δ_{ij} oznacza deltę Kroneckera, wielkości $\mu, \lambda, \alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ są stałymi materiałowymi mechanicznymi, a wielkość $\bar{\nu} = \alpha_t (3\lambda + 2\mu)$ jest stałą zależną od własności mechanicznych i termicznych, α_t oznacza współczynnik liniowej rozszerzalności cieplnej. Zmiana temperatury $\theta = T - T_0$.

3. Uogólnione zlinearyzowane równanie przewodnictwa cieplnego, które w przypadku stacjonarnego przepływu ciepła przyjmuje postać

$$(1.4) \quad \nabla^2 \theta = -\frac{W}{k},$$

gdzie W oznacza ilość ciepła wydzielaną przez umieszczone w ciele źródło ciepła, odniesiona do jednostki objętości oraz k współczynnik przewodnictwa cieplnego.

Eliminując z równań (1.1) naprężenia σ_{ji} i μ_{ji} przy wykorzystaniu związków (1.2) i (1.3) otrzymamy układ równań różniczkowych [1]

$$(1.5) \quad \begin{aligned} (\mu + \alpha) \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu - \alpha) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\alpha \operatorname{rot} \varphi &= \bar{v} \operatorname{grad} \theta, \\ (\gamma + \varepsilon) \nabla^2 \boldsymbol{\varphi} - 4\alpha \boldsymbol{\varphi} + (\beta + \gamma - \varepsilon) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} + 2\alpha \operatorname{rot} \mathbf{u} &= 0. \end{aligned}$$

Mamy układ siedmiu równań (1.5) i (1.4) z siedmioma niewiadomymi: trzema składowymi przemieszczenia \mathbf{u} , trzema składowymi obrotu $\boldsymbol{\varphi}$ i temperaturą θ .

Warunki brzegowe związane z równaniami (1.5) i (1.4) przyjmujemy w postaci

$$(1.6) \quad p_i = \sigma_{ji} n_j = 0, \quad m_i = \mu_{ji} n_j = 0, \quad \theta = \gamma(x), \quad x \in A,$$

gdzie A oznacza powierzchnię brzegu.

2. UOGÓLNIONY PŁASKI STAN NAPRĘŻENIA

W tarczy o grubości $2\hat{h}$ uogólniony płaski stan naprężenia będzie wywołany temperaturą $\theta(x_1, x_2, x_3)$ o rozkładzie symetrycznym względem płaszczyzny środkowej. Stan przemieszczenia i obrotów będzie scharakteryzowany przez średnie wartości wektorów:

$$(2.1) \quad \mathbf{u}^* \equiv (u_1^*, u_2^*, 0), \quad \boldsymbol{\varphi}^* \equiv (0, 0, \varphi_3^*).$$

Stan odkształcenia określają tensory $\boldsymbol{\gamma}^*$ i $\boldsymbol{\kappa}^*$ o składowych

$$(2.2) \quad \gamma_{ij}^* \equiv (\gamma_{\alpha\beta}^*, \gamma_{33}^*), \quad \kappa_{ji}^* \equiv \kappa_{\alpha 3}^*, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Stan naprężenia określają tensory $\boldsymbol{\sigma}^*$ i $\boldsymbol{\mu}^*$ o składowych

$$(2.3) \quad \sigma_{ji}^* \equiv \sigma_{\alpha\beta}^*, \quad \mu_{ji}^* \equiv (\mu_{\alpha 3}^*, \mu_{3\alpha}^*), \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

które spełniają równania równowagi

$$(2.4) \quad \sigma_{\alpha\beta, \alpha}^* = 0, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}^* + \mu_{\alpha 3, \alpha}^* = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2;$$

symbol $\varepsilon_{\alpha\beta}$ oznacza symbol Ricciego.

Równania konstytutywne przyjmują postać

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \sigma_{ji}^* &= (\mu + \alpha) \gamma_{ji}^* + (\mu - \alpha) \gamma_{ij}^* + (\lambda \gamma_{kk}^* - \bar{v} \theta^*) \delta_{ji}, \\ \mu_{ji}^* &= (\gamma + \varepsilon) \kappa_{ji}^* + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{ij}^* + \beta \kappa_{kk}^* \delta_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

gdzie

$$\theta^*(x_1, x_2) = \frac{1}{2\hat{h}} \int_{-\hat{h}}^{\hat{h}} \theta(x_1, x_2, x_3) dx_3$$

oraz

$$\sigma_{33}^* = \sigma_{13}^* = \sigma_{31}^* = \sigma_{32}^* = \sigma_{23}^* = \mu_{11}^* = \mu_{12}^* = \mu_{21}^* = \mu_{22}^* = \mu_{33}^* = 0.$$

Równania geometrycznej zgodności mają postać

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \gamma_{21,1}^* - \gamma_{11,2}^* - \kappa_{13}^* &= 0, \\ \kappa_{22,1}^* - \gamma_{12,2}^* - \kappa_{23}^* &= 0, \\ \kappa_{23,1}^* - \kappa_{13,2}^* &= 0. \end{aligned}$$

Równania (2.6) można przekształcić do postaci

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \gamma_{22,11}^* + \gamma_{11,22}^* &= (\gamma_{12}^* + \gamma_{21}^*)_{,12}, \\ \gamma_{12,22}^* - \gamma_{21,11}^* &= (\gamma_{22}^* - \gamma_{11}^*)_{,12} - (\kappa_{13,1} + \kappa_{23,2}), \\ \kappa_{23,1}^* - \kappa_{13,2}^* &= 0. \end{aligned}$$

Wyrażając równania (2.7) przez tensory σ_{ji}^* , μ_{ji}^* przy pomocy równań (2.5), otrzymujemy warunki geometrycznej zgodności wyrażone w naprężeniach. Te ostatnie w połączeniu z równaniami (2.4) oraz z równaniem przewodnictwa cieplnego (2.8)

$$(2.8) \quad \nabla_1^2 \theta^* = -\frac{W^*}{k}$$

i z warunkami brzegowymi (1.6) stanowią naprężeniowe sformułowanie problemu mikropolarnej termosprężystości.

Wprowadzając funkcje naprężeń F, ψ [1],

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}^* &= \partial_2^2 F - \partial_1 \partial_2 \psi, & \sigma_{22}^* &= \partial_1^2 F + \partial_1 \partial_2 \psi, \\ \sigma_{12}^* &= -\partial_1 \partial_2 F - \partial_2^2 \psi, & \sigma_{21}^* &= -\partial_1 \partial_2 F + \partial_1^2 \psi, \\ \mu_{13}^* &= \partial_1 \psi, & \mu_{23}^* &= \partial_2 \psi, \end{aligned}$$

rozwiązanie problemu w naprężeniach sprowadza się do rozwiązania równań

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \nabla_1^2 \nabla_1^2 F + 2\mu\bar{m}\nabla_1^2 \theta^* &= 0, \\ \nabla_1^2 (1 - I^2 \nabla_1^2) \psi &= 0, \end{aligned}$$

gdzie θ^* spełnia (2.8) oraz spełnia warunki brzegowe (1.6). Mamy tutaj

$$\bar{m} = \frac{\bar{v}}{2(\lambda + \mu)}, \quad I^2 = \frac{(\gamma + \varepsilon)(\mu + \alpha)}{4\mu\alpha}, \quad \nabla_1^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2.$$

Ponadto funkcje F i ψ oraz θ^* związane są zależnościami

$$(2.11) \quad \begin{aligned} -\partial_1 (1 - I^2 \nabla_1^2) \psi &= A \partial_2 \nabla_1^2 F + B \partial_2 \theta^*, \\ \partial_2 (1 - I^2 \nabla_1^2) \psi &= A \partial_1 \nabla_1^2 F + B \partial_1 \theta^*, \end{aligned}$$

gdzie

$$A = \frac{(\lambda + \mu)(\gamma + \varepsilon)}{\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad B = \frac{\bar{v}(\gamma + \varepsilon)}{3\lambda + 2\mu}.$$

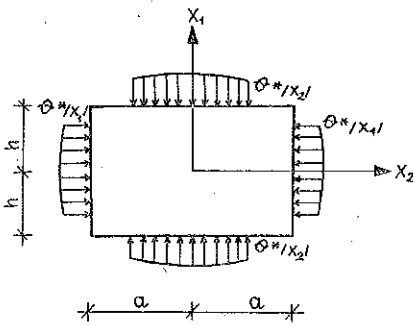
3. ZAGADNIENIE TARCZY PROSTOKĄTNEJ

Rozpatrzmy zagadnienie tarczy prostokątnej znajdującej się pod działaniem pola temperatury $\theta^*(x_2)$ na brzegach $x_1 = \pm h$ oraz pola temperatury $\theta^*(x_1)$ na brzegach $x_2 = \pm a$ zgodnie z rys. 1. Pierwszą część zadania, dotyczącą wyznaczenia składowych naprężeń $\sigma_{ij}^{*'} = \sigma_{ji}^{*'}$ rozwiążemy superponując składowy stan naprężenia odpowiadający działaniu pola temperatury $\theta^*(x_2)$ oraz składowy stan naprężenia odpowiadający działaniu pola temperatur $\theta^*(x_1)$.

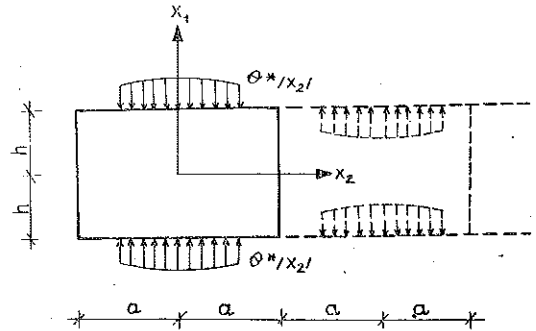
Rozpatrzmy zatem w pierwszej kolejności działanie pola temperatury na brzegach tarczy $x_1 = \pm h$ zgodnie z rys. 2.

Wyobrażając sobie, że działanie pola temperatury ciągnie się dalej poza długością brzegu, przedstawiamy je za pomocą szeregu Fouriera:

$$(3.1) \quad \theta^*(x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos \alpha_n x_2, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{2a}, \quad n=1, 3, 5, \dots$$



Rys. 1



Rys. 2

Na brzegach $x_1 = \pm h$, $x_2 = \pm a$ mamy warunki

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}^*(\pm h, x_2) &= 0, & \sigma_{12}^*(\pm h, x_2) &= 0, & \mu_{13}^*(\pm h, x_2) &= 0, \\ \sigma_{22}^*(x_1, \pm a) &= 0, & \sigma_{21}^*(x_1, \pm a) &= 0, & \mu_{23}^*(x_1, \pm a) &= 0. \end{aligned}$$

Z równania przewodnictwa cieplnego (równanie Laplace'a dla omawianego zagadnienia)

$$(3.3) \quad \nabla_1^2 \theta^* = 0$$

z warunkiem brzegowym

$$\theta^*(\pm h, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos \alpha_n x_2$$

przy zastosowaniu pojedynczych szeregów Fouriera wyznaczamy funkcję $\theta^*(x_1, x_2)$:

$$(3.4) \quad \theta^*(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \frac{\operatorname{ch} \alpha_n x_1}{\operatorname{ch} \alpha_n h} \cos \alpha_n x_2.$$

Dla wyznaczenia stanu naprężenia wprowadzamy funkcje F i ψ [1], które powinny spełniać równania (2.10) i (2.11). Rozwiązanie układu równań (2.10), (2.11) przedstawimy w postaci sumy dwu funkcji

$$(3.5) \quad F = F' + F'', \quad \psi = \psi' + \psi'',$$

gdzie F' , ψ' są całkami szczególnymi układu równań (2.10) i (2.11). Zakładamy, że $\psi' = 0$, a funkcja F' spełnia równanie

$$(3.6) \quad \nabla_1^2 F' + 2\mu\bar{m}\theta^* = 0$$

z warunkiem brzegowym $F' = 0$ dla $x_1 = \pm h$. W równaniu (3.6) funkcja θ^* określona jest wzorem (3.4).

Rozwiązanie równania różniczkowego cząstkowego niejednorodnego (3.6) otrzymujemy w postaci

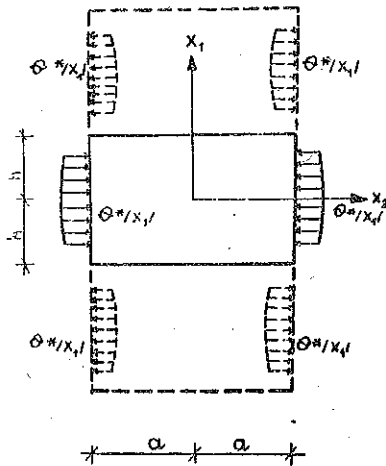
$$(3.7) \quad F'(x_1, x_2) = \mu \bar{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n}{\alpha_n \operatorname{ch} \alpha_n h} (h \operatorname{th} \alpha_n h \operatorname{ch} \alpha_n x_1 - x_1 \operatorname{sh} \alpha_n x_1) \cos \alpha_n x_2.$$

Ze wzorów

$$\sigma_{ij}^{*'} = \sigma_{ji}^{*'} = -\partial_i \partial_j F' + \delta_{ij} \nabla_1^2 F', \quad \mu_{ji}^{*'} = 0$$

wyznamy związane z funkcją F' naprężenia:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}^{*'} &= -\mu \bar{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \theta_n}{\operatorname{ch} \alpha_n h} (h \operatorname{th} \alpha_n h \operatorname{ch} \alpha_n x_1 - x_1 \operatorname{sh} \alpha_n x_1) \cos \alpha_n x_2, \\ \sigma_{22}^{*'} &= \mu \bar{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n}{\operatorname{ch} \alpha_n h} [(\alpha_n h \operatorname{th} \alpha_n h - 2) \operatorname{ch} \alpha_n x_1 - \alpha_n x_1 \operatorname{sh} \alpha_n x_1] \cos \alpha_n x_2, \\ \sigma_{12}^{*'} = \sigma_{21}^{*'} &= \mu \bar{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n}{\operatorname{ch} \alpha_n h} [(\alpha_n h \operatorname{th} \alpha_n h - 1) \operatorname{sh} \alpha_n x_1 - \alpha_n x_1 \operatorname{ch} \alpha_n x_1] \sin \alpha_n x_2, \\ \mu_{13}^{*'} = \mu_{23}^{*'} &= 0. \end{aligned}$$



Rys. 3

Następnie rozpatrzmy działanie pola temperatury $\theta^*(x_1)$ na brzegach tarczy $x_2 = \pm a$ zgodnie z rys. 3, które przedstawiamy szeregiem Fouriera:

$$(3.9) \quad \theta^*(x_1) = \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m \cos \beta_m x_1, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{2h}, \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

Warunki na brzegach $x_1 = \pm h$, $x_2 = \pm a$ kształtują się następująco:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}^*(\pm h, x_2) &= 0, & \sigma_{12}^*(\pm h, x_2) &= 0, & \mu_{13}^*(\pm h, x_2) &= 0, \\ \sigma_{22}^*(x_1, \pm a) &= 0, & \sigma_{21}^*(x_1, \pm a) &= 0, & \mu_{23}^*(x_1, \pm a) &= 0. \end{aligned}$$

Z równania Laplace'a (3.3) z warunkiem brzegowym

$$\theta^*(x_1, \pm a) = \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m \cos \beta_m x_1$$

wyznamy funkcję $\theta^*(x_1, x_2)$:

$$(3.11) \quad \theta^*(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m \frac{\operatorname{ch} \beta_m x_2}{\operatorname{ch} \beta_m a} \cos \beta_m x_1.$$

Następnie z rozwiązania równania (3.6) z warunkiem brzegowym $F' = 0$ dla $x_2 = \pm a$ otrzymujemy następującą postać funkcji $F'(x_1, x_2)$:

$$(3.12) \quad F'(x_1, x_2) = \mu \bar{m} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_m}{\beta_m \operatorname{ch} \beta_m a} (a \operatorname{th} \beta_m a \operatorname{ch} \beta_m x_2 - x_2 \operatorname{sh} \beta_m x_2) \cos \beta_m x_1.$$

Naprężenia związane z funkcją F' będą następujące:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}^{*'} &= \mu \bar{m} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_m}{\operatorname{ch} \beta_m a} [(\beta_m a \operatorname{th} \beta_m a - 2) \operatorname{ch} \beta_m x_2 - \beta_m x_2 \operatorname{sh} \beta_m x_2] \cos \beta_m x_1, \\ \sigma_{22}^{*'} &= -\mu m \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m \theta_m}{\operatorname{ch} \beta_m a} (a \operatorname{th} \beta_m a \operatorname{ch} \beta_m x_2 - x_2 \operatorname{sh} \beta_m x_2) \cos \beta_m x_1, \\ \sigma_{12}^{*'} &= \sigma_{21}^{*'} = \mu \bar{m} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_m}{\operatorname{ch} \beta_m a} \times \\ &\quad \times [(\beta_m a \operatorname{th} \beta_m a - 1) \operatorname{sh} \beta_m x_2 - \beta_m x_2 \operatorname{ch} \beta_m x_2] \sin \beta_m x_1, \\ \mu_{13}^{*'} &= \mu_{23}^{*'} = 0. \end{aligned}$$

Naprężenia $\sigma_{ij}^{*'} = \sigma_{ji}^{*'}$ odpowiadające działaniu pola temperatury $\theta^*(x_2)$ i $\theta^*(x_1)$ zgodnie z rys. 1 otrzymamy superponując naprężenia $\sigma_{ij}^{*''}$ wyrażone wzorami (3.8) na naprężenia $\sigma_{ij}^{*'}$ wyrażone wzorami (3.13).

Drugą część zadania stanowi wyznaczenie naprężeń $\sigma_{ij}^{*''}$, $\mu_{ij}^{*''}$ związanych z funkcjami F'' , ψ'' . Funkcje F'' , ψ'' powinny spełniać równania

$$(3.14) \quad \nabla_1^2 \nabla_1^2 F'' = 0, \quad \nabla_1^2 (1 - l^2 \nabla_1^2) \psi'' = 0$$

z warunkami brzegowymi

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}^{*''} + \sigma_{11}^{*'''} &= 0, & \sigma_{12}^{*''} + \sigma_{12}^{*'''} &= 0, & \mu_{13}^{*''} &= 0 & \text{dla } x_1 = \pm h, \\ \sigma_{22}^{*''} + \sigma_{22}^{*'''} &= 0, & \sigma_{21}^{*''} + \sigma_{21}^{*'''} &= 0, & \mu_{23}^{*''} &= 0 & \text{dla } x_2 = \pm a. \end{aligned}$$

Jednocześnie powinny być spełnione równania

$$(3.16) \quad \begin{aligned} -\partial_1(1-l^2\nabla_1^2)\psi'' &= A\partial_2\nabla_1^2 F'', \\ \partial_2(1-l^2\nabla_1^2)\psi'' &= A\partial_1\nabla_1^2 F''. \end{aligned}$$

Przy przyjęciu $\psi' = 0$ i spełnieniu równań (3.16) spełniamy jednocześnie związki (2.11) zachodzące pomiędzy funkcjami F i ψ .

Ze względu na dwuosiową symetrię stanu naprężenia przyjmujemy funkcje naprężeń F'' i ψ'' w postaci

$$(3.17) \quad \begin{aligned} F'' &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{ch} \alpha_n x_1 + \alpha_n x_1 B_n \operatorname{sh} \alpha_n x_1) \cos \alpha_n x_2 + \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} (K_m \operatorname{ch} \beta_m x_2 + \beta_m x_2 M_m \operatorname{sh} \beta_m x_2) \cos \beta_m x_1, \\ \psi'' &= \sum_{n=1}^{\infty} (F_n \operatorname{sh} \alpha_n x_1 + H_n \operatorname{sh} \rho_n x_1) \sin \alpha_n x_2 + \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} (P_m \operatorname{sh} \beta_m x_2 + R_m \operatorname{sh} \gamma_m x_2) \sin \beta_m x_1, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{n\pi}{2a}, & \rho_n &= \left(\alpha_n^2 + \frac{1}{l^2} \right)^{1/2}, & n &= 1, 3, 5, \dots, \\ \beta_m &= \frac{m\pi}{2h}, & \gamma_m &= \left(\beta_m^2 + \frac{1}{l^2} \right)^{1/2}, & m &= 1, 3, 5, \dots; \end{aligned}$$

stałe $A_n, B_n, K_m, M_m, F_n, H_n, P_m, R_m$ występujące w wyrażeniach (3.17) wyznaczymy z warunków brzegowych (3.15) i równań (3.16). Ponieważ obrane funkcje naprężeń odpowiadają przyjętym warunkom symetrii, przeto wystarczy uwzględnić tylko warunki brzegowe dla brzegów $x_2 = a, x_1 = h$. Jeżeli będą one spełnione, to będą również spełnione podobne warunki dla brzegów $x_2 = -a, x_1 = -h$.

Spełnimy najpierw cztery warunki brzegowe

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{*'} + \sigma_{11}^{*''} &= 0, & \mu_{13}^{*'} &= 0 & \text{dla } x_1 &= h, \\ \sigma_{22}^{*'} + \sigma_{22}^{*''} &= 0, & \mu_{23}^{*'} &= 0 & \text{dla } x_2 &= a \end{aligned}$$

oraz zależności (3.16). Z warunku brzegowego $\mu_{13}^{*''} = [\partial_1 \psi'']_{x_1=h} = 0$ mamy

$$(3.18) \quad \alpha_n F_n \operatorname{ch} \alpha_n h + \rho_n H_n \operatorname{ch} \rho_n h = 0.$$

Z warunku brzegowego $\mu_{23}^{*''} = [\partial_2 \psi'']_{x_2=a} = 0$ mamy

$$(3.19) \quad \beta_m P_m \operatorname{ch} \beta_m a + \gamma_m R_m \operatorname{ch} \gamma_m a = 0.$$

Warunek brzegowy $\sigma_{11}^{*'} + \sigma_{11}^{*''} = [\sigma_{11}' + \partial_2^2 F'' - \partial_1 \partial_2 \psi'']_{x_1=h} = 0$ prowadzi do równania

$$(3.20) \quad A_n \operatorname{ch} \alpha_n h + \alpha_n h B_n \operatorname{sh} \alpha_n h = 0.$$

Z warunku $\sigma_{22}^{*'} + \sigma_{22}^{*''} = [\sigma'_{22} + \partial_1^2 F'' + \partial_1 \partial_2 \psi'']_{x_2=a} = 0$ otrzymujemy

$$(3.21) \quad K_m \operatorname{ch} \beta_m a + \beta_m a M_m \operatorname{sh} \beta_m a = 0.$$

Z równań (3.16) po uwzględnieniu (3.17) mamy

$$(3.22) \quad F_n = 2A\alpha_n^2 B_n, \quad P_m = -2A\beta_m^2 M_m.$$

Z równań (3.18)–(3.22) wyznaczmy stałe całkowania w postaci $A_n = f(B_n)$, $H_n = f(B_n)$, $K_m = f(M_m)$, $R_m = f(M_m)$:

$$(3.23) \quad \begin{aligned} A_n &= -\alpha_n h \operatorname{th} \alpha_n h B_n, & K_m &= -\beta_m a \operatorname{th} \beta_m a M_m, \\ H_n &= -\frac{2A\alpha_n^3}{\rho_n} \frac{\operatorname{ch} \alpha_n h}{\operatorname{ch} \rho_n h} B_n, & R_m &= -\frac{2A\beta_m^2}{\gamma_m} \frac{\operatorname{ch} \beta_m a}{\operatorname{ch} \gamma_m a} M_m. \end{aligned}$$

Uwzględniając (3.23) obliczymy składowe naprężenia $\sigma_{12}^{*''} + \sigma_{21}^{*''}$:

$$(3.24) \quad \begin{aligned} \sigma_{12}^{*''} &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \left[(-\alpha_n h \operatorname{th} \alpha_n h + 1) B_n \operatorname{sh} \alpha_n x_1 + \alpha_n x_1 B_n \operatorname{ch} \alpha_n x_1 + \right. \\ &\quad \left. + 2A\alpha_n^2 B_n \left(\operatorname{sh} \alpha_n x_1 - \frac{\alpha_n}{\rho_n} \frac{\operatorname{ch} \alpha_n h}{\operatorname{ch} \rho_n h} \operatorname{sh} \rho_n x_1 \right) \right] \sin \alpha_n x_2 + \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m^2 \left[-2A\beta_m^2 M_m \left(\operatorname{sh} \beta_m x_2 + \frac{\beta_m}{\gamma_m} \frac{\operatorname{ch} \beta_m a}{\operatorname{ch} \gamma_m a} \operatorname{sh} \gamma_m x_2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + (-\beta_m a \operatorname{th} \beta_m a + 1) M_m \operatorname{sh} \beta_m x_2 + \beta_m x_2 M_m \operatorname{ch} \beta_m x_2 \right] \sin \beta_m x_1, \\ \sigma_{21}^{*''} &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \left[(-\alpha_n h B_n \operatorname{th} \alpha_n h + B_n) \operatorname{sh} \alpha_n x_1 + \alpha_n x_1 B_n \operatorname{ch} \alpha_n x_1 - \right. \\ &\quad \left. - 2A\alpha_n^2 B_n \left(\operatorname{sh} \alpha_n x_1 - \frac{\alpha_n}{\rho_n} \frac{\operatorname{ch} \alpha_n h}{\operatorname{ch} \rho_n h} \operatorname{sh} \rho_n x_1 \right) \right] \sin \alpha_n x_2 + \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m^2 \left[(-\beta_m a \operatorname{th} \beta_m a + 1) M_m \operatorname{sh} \beta_m x_2 + \beta_m x_2 M_m \operatorname{ch} \beta_m x_2 + \right. \\ &\quad \left. + 2A\beta_m^2 M_m \left(\operatorname{sh} \beta_m x_2 + \frac{\beta_m}{\gamma_m} \frac{\operatorname{ch} \beta_m a}{\operatorname{ch} \gamma_m a} \operatorname{sh} \gamma_m x_2 \right) \right] \sin \beta_m x_1. \end{aligned}$$

Powinny być spełnione również dwa pozostałe warunki brzegowe:

$$\sigma_{12}^{*'} + \sigma_{12}^{*''} = 0 \quad \text{dla } x_1 = \pm h,$$

$$\sigma_{21}^{*'} + \sigma_{21}^{*''} = 0 \quad \text{dla } x_2 = \pm a.$$

Wykorzystując (3.8), (3.13) oraz (3.24) otrzymujemy układ równań

$$(3.25) \quad \mu \bar{n} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n [(\alpha_n h \operatorname{th} \alpha_n h - 1) \operatorname{th} \alpha_n h - \alpha_n h] \sin \alpha_n x_2 + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_m}{\operatorname{ch} \beta_m a} [(\beta_m a \operatorname{th} \beta_m a - 1) \operatorname{sh} \beta_m x_2 - \beta_m x_2 \operatorname{ch} \beta_m x_2] \sin \frac{m\pi}{2} \right\} +$$

$$\begin{aligned}
 (3.25) \quad & + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \left[(-\alpha_n h \operatorname{th} \alpha_n h + 1) B_n \operatorname{sh} \alpha_n h + \alpha_n h B_n \operatorname{ch} \alpha_n h + \right. \\
 & \left. + 2A \alpha_n^2 B_n \left(\operatorname{sh} \alpha_n h - \frac{\alpha_n}{\rho_n} \operatorname{ch} \alpha_n h \operatorname{th} \rho_n h \right) \right] \sin \alpha_n x_2 + \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m^2 \left[(-\beta_m a \operatorname{th} \beta_m a + 1) M_m \operatorname{sh} \beta_m x_2 + \beta_m x_2 M_m \operatorname{ch} \beta_m x_2 - \right. \\
 & \left. - 2A \beta_m^2 M_m \left(\operatorname{sh} \beta_m x_2 + \frac{\beta_m}{\gamma_m} \frac{\operatorname{ch} \beta_m a}{\operatorname{ch} \gamma_m a} \operatorname{sh} \gamma_m x_2 \right) \right] \sin \frac{m\pi}{2} = 0, \\
 \mu \bar{n} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n}{\operatorname{ch} \alpha_n h} [(\alpha_n \operatorname{th} \alpha_n h - 1) \operatorname{sh} \alpha_n x_1 - \alpha_n x_1 \operatorname{ch} \alpha_n x_1] \sin \frac{n\pi}{2} + \right. \\
 & \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m [(\beta_m a \operatorname{th} \beta_m a - 1) \operatorname{th} \beta_m a - \beta_m a] \sin \beta_m x_1 \right\} + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \left[(-\alpha_n h \operatorname{th} \alpha_n h + 1) B_n \operatorname{sh} \alpha_n x_1 + \alpha_n x_1 B_n \operatorname{ch} \alpha_n x_1 - \right. \\
 & \left. - 2A \alpha_n^2 B_n \left(\operatorname{sh} \alpha_n x_1 - \frac{\alpha_n}{\rho_n} \frac{\operatorname{ch} \alpha_n h}{\operatorname{ch} \rho_n h} \operatorname{sh} \rho_n x_1 \right) \right] \sin \frac{n\pi}{2} + \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m^2 \left[(-\beta_m a \operatorname{th} \beta_m a + 1) M_m \operatorname{sh} \beta_m a + \beta_m a M_m \operatorname{ch} \beta_m a + \right. \\
 & \left. + 2A \beta_m^2 M_m \left(\operatorname{sh} \beta_m a + \frac{\beta_m}{\gamma_m} \operatorname{ch} \beta_m a \operatorname{th} \gamma_m a \right) \right] \sin \beta_m x_1 = 0.
 \end{aligned}$$

Po przedstawieniu funkcji $\operatorname{sh} \alpha_n x_1$, $x_1 \operatorname{ch} \alpha_n x_1$, $\operatorname{sh} \beta_m x_2$ itp. za pomocą szeregów Fouriera oraz po wprowadzeniu oznaczeń

$$\begin{aligned}
 (3.26) \quad & B_{nm} = B_n \operatorname{ch} \alpha_n h \sin \frac{m\pi}{2}, \\
 & M_{mn} = M_m \operatorname{ch} \beta_m a \sin \frac{n\pi}{2},
 \end{aligned}$$

równania (3.25) redukujemy do równań algebraicznych

$$\begin{aligned}
 (3.27) \quad & \mu \bar{n} \theta_n [(\alpha_n h \operatorname{th} \alpha_n h - 1) \operatorname{th} \alpha_n h - \alpha_n h] \sin \frac{m\pi}{2} - \\
 & - \mu \bar{n} \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m \frac{2\beta_m}{a} \frac{2\alpha_n^2}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2} \sin \frac{n\pi}{2} + \alpha_n^2 \left[(-\alpha_n h \operatorname{th} \alpha_n h + 1) \operatorname{th} \alpha_n h + \right. \\
 & \left. + \alpha_n h + 2A \alpha_n^2 \left(\operatorname{th} \alpha_n h - \frac{\alpha_n}{\rho_n} \operatorname{th} \rho_n h \right) \right] B_{nm} + \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m^2 \frac{2\beta_m}{a} \left[\frac{2\alpha_n^2}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2} - 2A \beta_m^2 \frac{2\alpha_n^2 + \beta_m^2 + \gamma_m^2}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)(\alpha_n^2 + \gamma_m^2)} \right] M_{mn} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.27) \quad & \mu \bar{n} \theta_m [(\beta_m a \operatorname{th} \beta_m a - 1) \operatorname{th} \beta_m a - \beta_m a] \sin \frac{n\pi}{2} - \\
 \text{[c.d.]} \quad & - \mu \bar{n} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \frac{2\alpha_n}{h} \frac{2\beta_m^2}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2} \sin \frac{n\pi}{2} + \beta_m^2 \left[(-\beta_m a \operatorname{th} \beta_m a + 1) \operatorname{th} \beta_m a + \right. \\
 & \left. + \beta_m a + 2A \beta_m^2 \left(\operatorname{th} \beta_m a + \frac{\beta_m}{\gamma_m} \operatorname{th} \gamma_m a \right) \right] M_{mn} + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \frac{2\alpha_n}{h} \left[\frac{2\beta_m^2}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2} - 2A \alpha_n^2 \frac{\rho_n^2 - \alpha_n^2}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)(\rho_n^2 + \beta_m^2)} \right] B_{nm} = 0.
 \end{aligned}$$

Z nieskończonego układu równań (3.27) można określić poszukiwane stałe B_n i M_m . Znaczne uproszczenia otrzymamy w przypadku tarczy kwadratowej dla $a=h$.

LITERATURA

1. W. NOWACKI, *Theory of non-symmetric elasticity* [in Polish], PWN, 1971.
2. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, 1960.
3. W. NOWACKI, *Plane problems of micropolar elasticity*, Arch. Mech., 23, 5, 1971.
4. K. MAJORKOWSKA-KNAP, *Płaskie zagadnienia mikropolarnej sprężystości*. Praca doktorska złożona w Bibliotece Politechniki Warszawskiej, 1972.

Резюме

ПРОБЛЕМЫ ТЕРМОУПРУГОСТИ В МИКРОПОЛЯРНЫХ ДИСКАХ

В работе обсуждается проблема термических напряжений в прямоугольном диске подвергнутом действию поля температур на границах. Проблема решена в напряжениях при использовании функций Эйри — Миндлина, применяя однократные и двойные ряды Фурье.

SUMMARY

PROBLEMS OF THERMOELASTICITY IN MICROPOLAR PLATES

A rectangular plate is subject to the plane state of thermoelastic stress under the action of temperature fields applied to the edges. The plate is made of a micropolar material with unconstrained rotations. The problem is solved in terms of stresses by means of the Airy-Mindlin stress functions, single and double Fourier series being used.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INSTYTUT MECHANIKI KONSTRUKCJI INŻYNIERSKICH

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 lutego 1974 r.