

HYBRYDOWA METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W ZASTOSOWANIU DO OBLICZEŃ DRGAŃ URZĄDZEŃ OKRĘTOWYCH

EDMUND WITTBRODT (GDAŃSK)

W pracy omówiono metodę pozwalającą na zastępowanie rzeczywistych konstrukcji modelem złożonym zarówno ze sztywnych jak i odkształcalnych elementów skończonych. Ze względu na występowanie obydwu rodzajów elementów skończonych nazwano ją metodą hybrydową. Wyrowadzono równanie ruchu modelu obliczeniowego oraz zaproponowano stosowanie jego do obliczeń drgań urządzeń okrętowych sprężyscie mocowanych do odkształcalnych platform. Metodę opracowano pod kątem zastosowania elektronicznej techniki obliczeniowej.

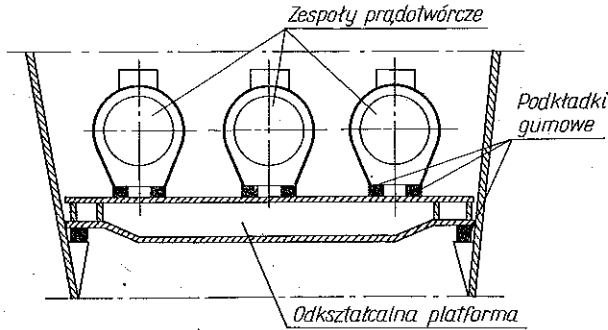
1. WSTĘP

Hybrydową metodą elementów skończonych nazwano metodę, w której model obliczeniowy składa się z mieszanych (odkształcalnych i sztywnych) elementów skończonych. Dotychczas stosowano dwie metody: metodę odkształcalnych elementów skończonych [8 i 9] oraz metodę sztywnych elementów skończonych [1, 2, 3, 4, 5 i 6]. Pierwsza jest wygodna w obliczeniach układów płytowych i powłokowych, natomiast druga — w obliczeniach układów złożonych ze sztywnych brył, jak również układów prętowych, jeżeli w tych ostatnich ma być uwzględniany wpływ sił stycznych oraz energia kinetyczna ruchu obrotowego. Rozszerzeniem możliwości wspomnianych metod jest przedstawiona w niniejszym artykule metoda hybrydowa. Metoda ta jest wygodna w obliczeniach statycznych i dynamicznych konstrukcji płytowo-bryłowych, płytowo-prętowych, powłokowo-bryłowych itp.

Zaproponowano zastosowanie jej do obliczeń drgań urządzeń ustawionych sprężyscie na odkształcalnych platformach, zwanych platformami pływającymi («floating rafts», rys. 1). Tego rodzaju rozwiązania konstrukcyjne nabierają ostatnio coraz większego znaczenia ze względu na konieczność obniżania poziomu drgań i hałasu w pomieszczeniach, w których przebywają ludzie. Zagadnienie to jest szczególnie istotne w konstrukcjach okrętowych. Drgania w pasmie częstości akustycznych (wymuszane przez zespoły prądowców, sprężarki, pompy itp.) mogą przenosić się drogą strukturalną, przez konstrukcję stalową kadłuba na cały statek.

W celu obniżenia poziomu drgań zastosowano w przemyśle okrętowym opisane powyżej rozwiązanie dla dwustopniowego odizolowywania źródeł drgań od kadłuba. Podkładki gumowe (rys. 1) umieszczone są zarówno pod ramą fundamentową poszczególnych mechanizmów jak i pod platformą. Celowość stosowania takich konstrukcji potwierdziły pomiary wykonane na statku badawczym «Profesor Siedlecki», gdzie poziom hałasów w maszynowni był znacznie niższy niż na statkach tego typu o rozwiązaniach konwencjonalnych.

Platformy pływające z urządzeniami pomocniczymi mają jednak gęste widmo częstości drgań własnych. Należy więc tak dobierać parametry konstrukcji, aby częstości te nie pokrywały się z częstościami wymuszeń, pochodzącymi od samych



Rys. 1. Platforma «pływająca» z trzema zespołami prądotwórczymi

urządzeń lub od drgań kadłuba. W tym celu należy przeprowadzić obliczenia częstości drgań własnych i odpowiadających im postaci metodami możliwie najdokładniejszymi. Dotychczas do tego celu stosowano dwie metody: 1) metodę «sib» oraz 2) metodę sztywnych elementów skończonych.

Opierając się na metodzie «sib» opracowano algorytm obliczeń drgań platformy z urządzeniami [7]. Zastosowano w nim jednak układ płaski, zastępując platformę belką o skupionych masach. Tak przyjęty model jest zbyt «grubym» przybliżeniem rzeczywistej konstrukcji.

W algorytmie opartym na metodzie sztywnych elementów skończonych wprawdzie można się posługiwać modelem przestrzennym [3 i 5], jednak ze względu na brak ciągłości odształceń na krawędziach elementów płyty należy się spodziewać znacznych błędów.

W niniejszej pracy zaproponowano obliczanie częstości drgań własnych platformy «pływającej» hybrydową metodą elementów skończonych. Platformę dzieli się na odształcalne elementy skończone, a urządzenia, mające zwykle zwartą konstrukcję, zastępuje się sztywnymi elementami skończonymi.

Tablica 1

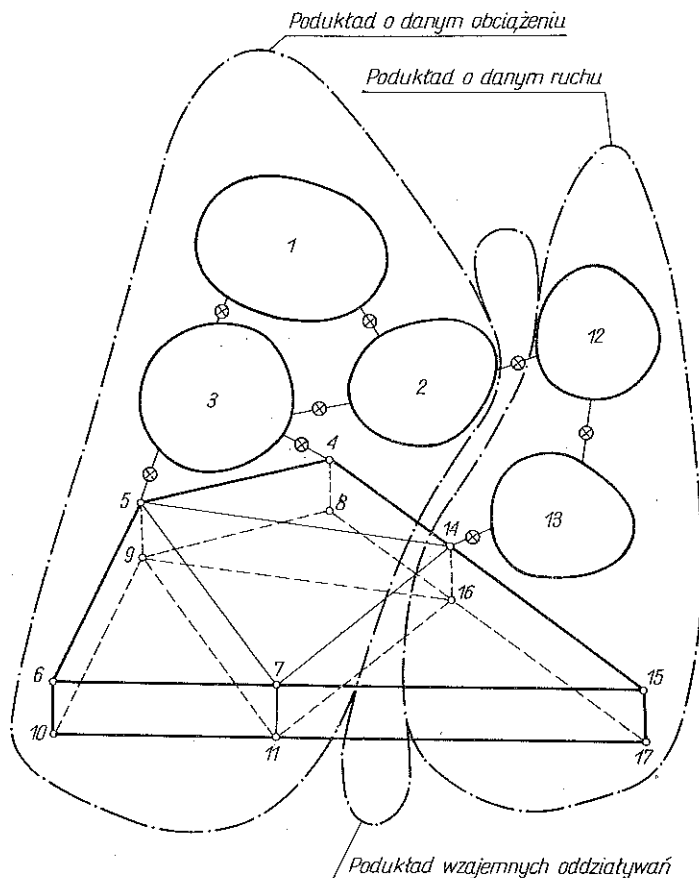
Nr częstości	Metoda ścisła [okr/S]	Metoda OES		Metoda SES	
		Częstość drgań własnych [okr/S]	Błąd [%]	Częstość drgań własnych [okr/S]	Błąd [%]
1	846	826	2,6	877	-3,7
2	3638	3728	-2,5	—	—
3	5266	5157	2,1	4830	8,3
4	11870	12055	-1,0	9300	21,5

Aproksymacja platformy elementami odształcalnymi, w stosunku do aproksymacji elementami sztywnymi, daje dokładniejsze wyniki obliczeń, co przedstawiono na przykładzie izotropowej płyty wspornikowej [9] (tablica 1). W przykładzie zastosowano kryterium jednakowej liczby stopni swobody.

W przypadku gdybyśmy każde urządzenie modelowali jednym odkształcalnym elementem skończonym o ośmiu węzłach w narożach, posiadałoby ono w układzie przestrzennym 48 stopni swobody. Sztywność elementu aproksymującego urządzenie będzie o kilka rzędów większa od sztywności pozostałych elementów układu, co ujemnie wpływa na dokładność obliczeń numerycznych. Z kolei aproksymacja rzeczywistego połączenia urządzenia z platformą «pływająca» będzie «sztuczna». Natomiast przyjęcie, że model urządzenia jest sztywnym elementem skończonym o sześciu stopniach swobody w układzie przestrzennym i jest dołączony do płyty za pomocą elementów sprężysto-tłumiących ma duże zalety: 1) model obliczeniowy układu rzeczywistego otrzymuje się w bardzo prosty sposób, 2) model obliczeniowy ma mniejszą liczbę stopni swobody.

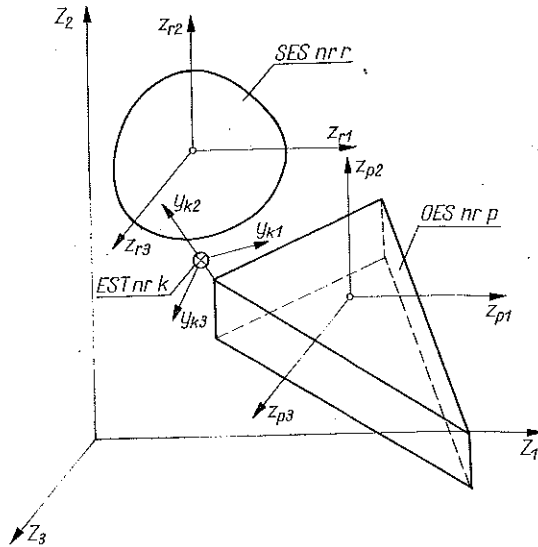
2. MODEL OBLICZENIOWY

Model obliczeniowy (rys. 2) jest układem składającym się z \tilde{u}_s sztywnych elementów skończonych, \tilde{u}_o odkształcalnych elementów skończonych, v elementów sprężysto-tłumiących i \tilde{w} węzłów. Elementy sprężysto-tłumiące łączą sztywne ele-



Rys. 2. Przykład modelu obliczeniowego układu złożonego zarówno ze sztywnych jak i odkształcalnych elementów skończonych. W modelu tym $\tilde{u}_s=5$, $u_s=3$, $u'_s=2$, $\tilde{w}=12$, $w=8$, $w'=4$

menty skończone oraz sztywne elementy skończone z odkształcalnymi elementami skończonymi. Odkształcalne elementy skończone połączone są węzłami. Założono, że rzeczywistą konstrukcję dzieli się w ten sposób, aby elementy sprężysto-tłumiące, łączące sztywne elementy skończone z odkształcalnymi, dołączone były w węzłach. Każdy sztywny element skończony ma ζ_s stopni swobody, a każdy węzeł ζ_0 stopni swobody.



Rys. 3. Osie układu globalnego (Z_1, Z_2, Z_3), układu lokalnego r -tego SES (z_{r1}, z_{r2}, z_{r3}), układu lokalnego p -tego OES (z_{p1}, z_{p2}, z_{p3}), oraz główne osie EST (y_{k2}, y_{k1}, y_{k3})

W przyjętym modelu można zastosować dowolny rodzaj odkształcalnych elementów skończonych, opisanych w pracy [9]. Położenie modelu obliczeniowego w przestrzeni podawane jest względem globalnego układu odniesienia Z_1, Z_2, Z_3 , natomiast położenie poszczególnych sztywnych i odkształcalnych elementów skończonych względem układów lokalnych z_{r1}, z_{r2}, z_{r3} (rys. 3). Są to nieruchome układy prostokątne o osiach odpowiednio równoległych do siebie.

Układ globalny jest dowolnie przyjęty w przestrzeni, natomiast początki układów lokalnych pokrywają się ze środkami mas sztywnych i odkształcalnych elementów skończonych w stanie równowagi. Osie z_{r1}, z_{r2}, z_{r3} nie muszą być, w odróżnieniu od osi układów omawianych w pracy [6], głównymi osiami bezwładności sztywnych elementów skończonych.

Takie przyjęcie układów odniesienia powoduje, że przemieszczenia uogólnione wszystkich sztywnych elementów skończonych i wszystkich węzłów są zgodne z kierunkami osi układu globalnego, co ułatwia analizę wyników. Macierz bezwładności układu nie jest jednak macierzą diagonalną.

Element sprężysto-tłumiący opisany jest w układzie y_{k1}, y_{k2}, y_{k3} (rys. 3), który w stanie równowagi modelu obliczeniowego pokrywa się z głównymi osiami elementu sprężysto-tłumiącego. W rozpatrywanym układzie wyodrębniono podukład o danym

ruchu, podukład o danym obciążeniu oraz podukład wzajemnych oddziaływań (rys. 2). Podukład o danym obciążeniu zawiera u_s sztywnych elementów skończonych i w węzłów, a podukład o danym ruchu zawiera u'_s sztywnych elementów skończonych oraz w' węzłów. Zachodzą więc następujące związki:

$$(2.1) \quad \tilde{u}_s = u_s + u'_s, \quad \tilde{w} = w + w'.$$

W modelu obliczeniowym sztywne elementy skończone oraz węzły oznaczono wskaźnikiem κ . W pierwszej kolejności numerowane są sztywne elementy skończone należące do podukładu o danym obciążeniu

$$1 \leq \kappa \leq u_s,$$

węzły tego podukładu

$$u_s < \kappa \leq u_s + w$$

sztywne elementy skończone podukładu o danym ruchu

$$u_s + w < \kappa \leq \tilde{u}_s + w$$

i wreszcie węzły należące do tego podukładu

$$\tilde{u}_s + w < \kappa \leq \tilde{u}_s + \tilde{w}.$$

Powyższy sposób oznaczeń wyjaśniono dodatkowo na przykładzie układu złożonego z pięciu sztywnych i czterech odkształcalnych elementów skończonych (rys. 2).

3. PARAMETRY MODELU OBLICZENIOWEGO

Sztywny element skończony określony jest blokiem współczynników bezwładności \mathbf{M}_r . Ponieważ osie z_{r1} , z_{r2} , z_{r3} nie są głównymi osiami bezwładności, przeto w odróżnieniu od bloku [6, wzór (2.1)] metody sztywnych elementów skończonych nie jest on blokiem diagonalnym, lecz przyjmuje postać

$$(3.1) \quad \mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} m_{r1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{r2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{r3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{rz1} & -D_{rz3} & -D_{rz2} \\ 0 & 0 & 0 & -D_{rz3} & I_{rz2} & -D_{rz1} \\ 0 & 0 & 0 & -D_{rz2} & -D_{rz1} & I_{rz3} \end{bmatrix},$$

gdzie symbole m_{r1} , m_{r2} , m_{r3} oznaczają masy biorące udział w ruchu w kierunku osi z_{r1} , z_{r2} , z_{r3} ; I_{rz1} , I_{rz2} , I_{rz3} masowe momenty bezwładności względem osi z_{r1} , z_{r2} , z_{r3} oraz D_{rz1} , D_{rz2} , D_{rz3} masowe momenty dewiacyjne względem układu z_{r1} , z_{r2} , z_{r3} .

Bloki współczynników bezwładności sztywnych elementów skończonych o liczbie stopni swobody $\zeta_s < 6$ uzyskuje się podobnie jak w pracy [6] z bloków (3.1), skreślając w nich kolumny i wiersze o numerach odpowiadających współrzędnym uogólnionym, w kierunku których pomijany jest ruch. Bloki te mają wymiar $\zeta_s \times \zeta_s$.

Odkształcalny element skończony określony jest blokiem bezwładności [9, str. 289]

$$(3.2) \quad \mathbf{M}_r = \int_V \mathbf{N}_r^T \rho \mathbf{N}_r dV,$$

blokiem sztywności [9, str. 69, 90 i 103]

$$(3.3) \quad \mathbf{K}_r = \int_V \mathbf{H}_r^T \mathbf{D}_r \mathbf{H}_r dV$$

oraz blokiem tłumienia [9, str. 292]

$$(3.4) \quad \mathbf{L}_r = \int_V \mathbf{N}_r^T \mu \mathbf{N}_r dV,$$

gdzie ρ oznacza gęstość odkształcalnego elementu skończonego, μ stałą uzależnioną od wielkości tłumienia materiałowego, uzyskaną przy założeniu, że tłumienie ma charakter wiskotyczny; \mathbf{N}_r macierz funkcji kształtu, uzależniająca wektor przemieszczeń uogólnionych w dowolnym punkcie r -tego OES od przemieszczeń uogólnionych jego węzłów; V objętość odkształcalnego elementu skończonego; \mathbf{H}_r macierz, uzależniająca wektor uogólnionych odkształceń jednostkowych w dowolnym punkcie r -tego OES od przemieszczeń uogólnionych jego węzłów oraz \mathbf{D}_r macierz własności sprężystych odkształcalnego elementu skończonego. Sposoby obliczania macierzy \mathbf{N}_r , \mathbf{H}_r i \mathbf{D}_r podano w pracach [8 i 9].

Bloki \mathbf{M}_r , \mathbf{K}_r i \mathbf{L}_r odkształcalnego elementu skończonego o numerze r są blokami stopnia $w_r \zeta_s$, gdzie w_r jest liczbą węzłów należących do tego OES.

Element sprężysto-tłumiący o numerze k określony jest za pomocą bloku współczynników sztywności \mathbf{C}_k [6, wzór (2.2)] i bloku współczynników tłumienia \mathbf{B}_k [6, wzór (2.3)].

Współrzędne zamocowania k -tego elementu sprężysto-tłumiącego do r -tego sztywnego elementu skończonego umieszczone są w blokach \mathbf{S}_{rk} [6, wzór (2.10)].

Jeżeli element sprężysto-tłumiący zamocowany jest do j -tego węzła, to ze względu na zerowe wymiary tego węzła blok \mathbf{S}_{jk} (w układzie przestrzennym $\zeta_0=6$) jest macierzą jednostkową:

$$(3.5) \quad \mathbf{S}_{jk} = \mathbf{I}.$$

Bloki współczynników kierunkowych Θ_{rk} między osiami y_{k1}, y_{k2}, y_{k3} a osiami Z_1, Z_2, Z_3 określa się podobnie jak w pracy [6, wzór (2.8)]. Ze względu na równoległość odpowiednich osi układów lokalnych z_{r1}, z_{r2}, z_{r3} zachodzą następujące związki:

$$(3.6) \quad \Theta_{rk} = \Theta_{pk} = \Theta_k \quad \text{lub} \quad \Theta_{rk} = \Theta_{jk} = \Theta_k,$$

gdzie r, p oznacza numery sztywnych elementów skończonych połączonych k -tym EST oraz r, j numer SES i numer węzła połączonych k -tym EST.

Bloki $\mathbf{C}_k, \mathbf{B}_k, \Theta_k$, podobnie jak w pracy [6], są macierzami szóstego stopnia, bloki \mathbf{S}_{rk} mają wymiar $6 \times \zeta_s$, a bloki \mathbf{S}_{jk} wymiar $6 \times \zeta_0$.

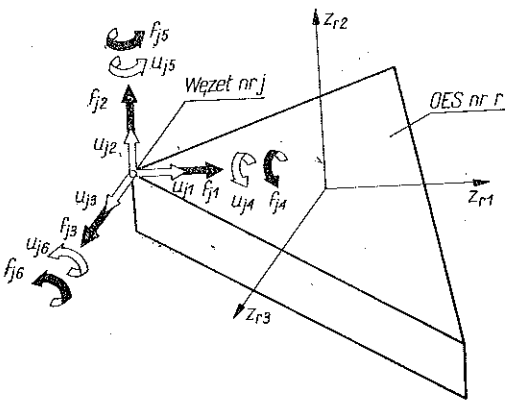
Dla $\zeta_s < 6$ lub $\zeta_0 < 6$ bloki \mathbf{S}_{rk} i \mathbf{S}_{jk} tworzy się wykreślając kolumny o numerach odpowiadających numerom współrzędnych, w kierunku których zanedbywany jest ruch.

4. WSPÓLRZĘDNE UOGÓLNIONE I SIŁY UOGÓLNIONE

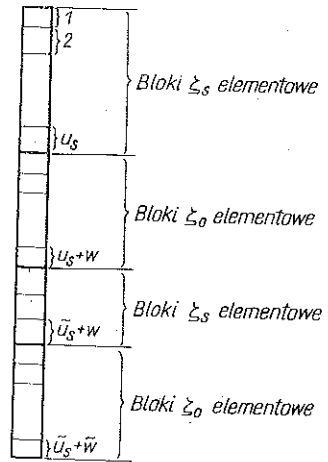
Jako współrzędne uogólnione przyjęto przemieszczenia środków mas sztywnych elementów skończonych i węzłów względem położenia równowagi w kierunku osi Z_{r1}, Z_{r2}, Z_{r3} oraz ich obroty wokół tych osi. Współrzędne te tworzą wektor przemieszczeń uogólnionych:

$$(4.1) \quad \mathbf{u} = \text{col} [\mathbf{u}_\kappa], \quad \kappa = 1, 2, \dots, \tilde{u}_s + \tilde{w},$$

gdzie numeracja bloków \mathbf{u}_κ jest zgodna z numeracją opisaną w p. 2. Bloki \mathbf{u}_κ są blokami przemieszczeń uogólnionych sztywnych elementów skończonych ([6], rys. 1) lub węzłów (rys. 4).



Rys. 4. Przemieszczenia i siły uogólnione węzła o numerze j układu przestrzennego. Siły uogólnione oznaczono strzałkami zaczernionymi



Rys. 5. Schemat blokowej postaci wektorów \mathbf{u} i \mathbf{f}

Obciążenia, działające na układ zgodnie ze współrzędnymi uogólnionymi, są siłami uogólnionymi tworzącymi wektor

$$(4.2) \quad \mathbf{f} = \text{col} [\mathbf{f}_\kappa], \quad \kappa = 1, 2, \dots, \tilde{u}_s + \tilde{w},$$

gdzie numeracja bloków \mathbf{f}_κ jest zgodna z numeracją bloków współrzędnych uogólnionych. Bloki \mathbf{f}_κ są blokami sił uogólnionych, działających na sztywne elementy skończone ([6], rys. 1) lub w węzłach (rys. 4). Postać bloków sił uogólnionych, działających na sztywne elementy skończone omówiono w pracy [6], natomiast sił uogólnionych działających w węzłach — w pracy [9].

Wektory \mathbf{u} i \mathbf{f} składają się z \tilde{u}_s bloków o ζ_s składowych, odpowiadających sztywnym elementom skończonym i \tilde{w} bloków o ζ_0 składowych, odpowiadających węzłom (rys. 5). Wektory te zawierają \tilde{n} składowych, gdzie

$$(4.3) \quad \tilde{n} = \tilde{u}_s \zeta_s + \tilde{w} \zeta_0.$$

5. RÓWNIANIA RUCHU

Równania różniczkowe ruchu układu, tak jak w modelu złożonym tylko ze sztywnych elementów skończonych [6] wyprowadzono z równań Lagrange'a drugiego rodzaju.

Energię kinetyczną układu wyznaczono ze wzoru

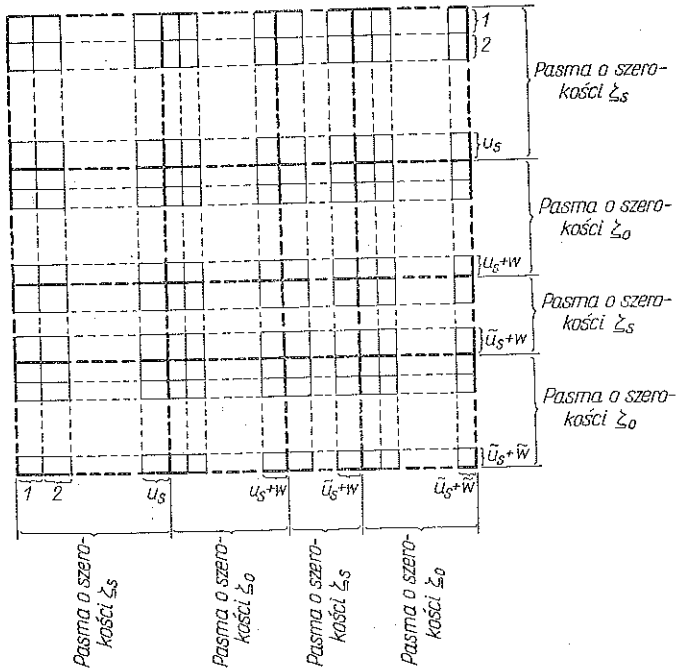
$$(5.1) \quad T = \sum_{r=1}^{\tilde{n}_s} T_r + \sum_{p=1}^{\tilde{n}_o} T_p,$$

gdzie T_r oznacza energię kinetyczną SES o numerze r oraz T_p energię kinetyczną OES o numerze p .

Energię kinetyczną SES o numerze r przedstawia się w postaci formy kwadratowej

$$(5.2) \quad T_r = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_r^T \mathbf{M}_r \dot{\mathbf{u}}_r,$$

gdzie $\dot{\mathbf{u}}_r$ oznacza blok prędkości uogólnionych sztywnego elementu skończonego o numerze r oraz \mathbf{M}_r blok współczynników bezwładności sztywnego elementu skończonego.



Rys. 6. Schemat blokowej postaci macierzy $\tilde{\mathbf{M}}_r, \tilde{\mathbf{K}}_s, \tilde{\mathbf{K}}_p, \tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{K}}$ i $\tilde{\mathbf{L}}$

Energię kinetyczną odkształcalnego elementu skończonego o numerze p przedstawia również forma kwadratowa [9]

$$(5.3) \quad T_p = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_p^T \mathbf{M}_p \dot{\mathbf{u}}_p,$$

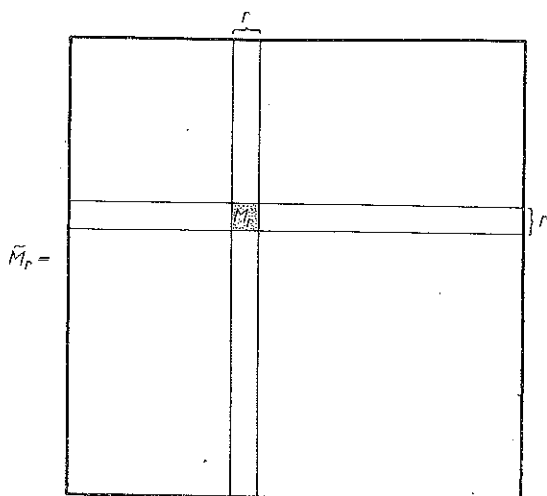
gdzie $\dot{\mathbf{u}}_p$ oznacza blok prędkości uogólnionych elementu odkształcalnego o numerze p oraz \mathbf{M}_p blok bezwładności tego elementu (3.2).

Można wykazać, że wzory (5.2) i (5.3) uzależnione od wektora prędkości uogólnionych układu mają postać

$$(5.4) \quad T_r = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{M}}_r \dot{\mathbf{u}}, \quad T_p = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{M}}_p \dot{\mathbf{u}},$$

gdzie $\tilde{\mathbf{M}}_r$ oznacza macierz bezwładności SES o numerze r , $\tilde{\mathbf{M}}_p$ macierz bezwładności OES o numerze p .

Macierze $\tilde{\mathbf{M}}_r$ i $\tilde{\mathbf{M}}_p$ mają postać blokową. Składają się one z $\tilde{u}_s + \tilde{w}$ pasm poziomych, $\tilde{u}_s + \tilde{w}$ pasm pionowych i są \tilde{n} -tego stopnia. Pasma poziome i pionowe o nu-



Rys. 7. Schemat rozkładu niezerowych bloków macierzy bezwładności $\tilde{\mathbf{M}}_r$ sztywnego elementu skończonego. Bloki niezerowe zaczerkiono

merach odpowiadających numerom sztywnych elementów skończonych zawierają ζ_s wierszy lub kolumn, a pasma o numerach odpowiadających numerom węzłów zawierają ζ_0 wierszy lub kolumn (rys. 6). Macierz bezwładności r -tego SES ($\tilde{\mathbf{M}}_r$) ma wszystkie bloki zerowe z wyjątkiem bloku leżącego na przekątnej w pasmie o numerze r . Blok ten jest blokiem współczynników bezwładności \mathbf{M}_r (rys. 7).

Macierz bezwładności p -tego OES ($\tilde{\mathbf{M}}_p$) otrzymuje się umieszczając w_p^2 podbloków bloku bezwładności \mathbf{M}_p na miejsca przecięć pasm poziomych i pionowych o numerach węzłów tego OES (w_p oznacza liczbę węzłów p -tego OES). Podbloki bloku \mathbf{M}_p mają wymiar $\zeta_0 \times \zeta_0$. Pozostałe bloki macierzy $\tilde{\mathbf{M}}_p$ są blokami zerowymi. Na przykład dla OES mającego 3 węzły o numerach j_1, j_2, j_3 macierz bezwładności \mathbf{M}_p przedstawiono na rys. 8.

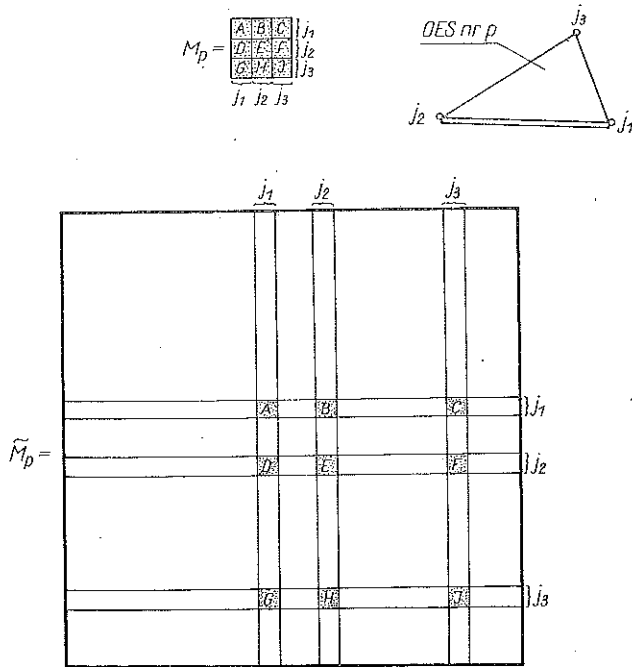
Energię kinetyczną układu obliczeniowego (5.1), wykorzystując zależności (5.4), przedstawia się w postaci formy kwadratowej

$$(5.5) \quad T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{u}},$$

gdzie

$$(5.6) \quad \tilde{\mathbf{M}} = \sum_{r=1}^{\tilde{u}_s} \tilde{\mathbf{M}}_r + \sum_{p=1}^{\tilde{u}_0} \tilde{\mathbf{M}}_p$$

jest macierzą bezwładności układu.



Rys. 8. Schemat rozkładu niezerowych bloków macierzy bezwładności $\tilde{\mathbf{M}}_p$ p -tego odkształcalnego elementu skończonego, którego węzły mają numery j_1, j_2, j_3 . Bloki niezerowe zaznaczono

Energia potencjalna układu jest sumą energii potencjalnych elementów sprężysto-tłumiących oraz odkształcalnych elementów skończonych:

$$(5.7) \quad U = \sum_{k=1}^v U_k + \sum_{p=1}^{\tilde{u}_0} U_p,$$

gdzie U_k oznacza energię potencjalną elementu sprężysto-tłumiącego o numerze k , U_p energię potencjalną odkształcalnego elementu skończonego o numerze p .

Energję potencjalną k -tego elementu sprężysto-tłumiącego, którego koniec dołączono do sztywnych elementów skończonych o numerach r i p ([6], rys. 1), przedstawia forma kwadratowa

$$(5.8) \quad U_k = \frac{1}{2} [\mathbf{u}_r^T \quad \mathbf{u}_p^T] \mathbf{F}_k^T \mathbf{C}_k \mathbf{F}_k \begin{bmatrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_p \end{bmatrix},$$

gdzie

$$(5.9) \quad \mathbf{F}_k = [\mathbf{0}_k \mathbf{S}_{rk} \quad -\mathbf{0}_k \mathbf{S}_{pk}]$$

jest prostokątnym blokiem transformacji o wymiarach $6 \times 2\zeta_s$, składającym się z niezerowych bloków macierzy N_{rk} [6, wzór (4.24)].

Energię potencjalną k -tego elementu sprężysto-tłumiącego, umieszczonego między r -tym sztywnym elementem skończonym a j -tym węzłem, przedstawia forma kwadratowa

$$(5.10) \quad U_k = \frac{1}{2} [\mathbf{u}_r^T; \mathbf{u}_j^T] \bar{\mathbf{F}}_k^T \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{F}}_k \begin{bmatrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix},$$

gdzie \mathbf{u}_j jest blokiem przemieszczeń uogólnionych j -tego węzła oraz gdzie

$$(5.11) \quad \bar{\mathbf{F}}_k = [\mathbf{0}_k \mathbf{S}_{rk}; -\mathbf{0}_k \mathbf{S}_{jk}]$$

jest prostokątnym blokiem transformacji o wymiarach $6 \times (\zeta_s + \zeta_0)$.

Równanie (5.8) przedstawimy w postaci

$$(5.12) \quad U_k = \frac{1}{2} [\mathbf{u}_r^T; \mathbf{u}_p^T] \mathbf{K}_k \begin{bmatrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_p \end{bmatrix},$$

a (5.10) w postaci

$$(5.13) \quad U_k = \frac{1}{2} [\mathbf{u}_r^T; \mathbf{u}_j^T] \bar{\mathbf{K}}_k \begin{bmatrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix},$$

gdzie

$$(5.14) \quad \mathbf{K}_k = \mathbf{F}_k^T \mathbf{C}_k \mathbf{F}_k$$

oraz

$$(5.15) \quad \bar{\mathbf{K}}_k = \bar{\mathbf{F}}_k^T \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{F}}_k$$

nazywamy blokami sztywności elementu sprężysto-tłumiącego o numerze k . Blok \mathbf{K}_k jest blokiem stopnia 2 ζ_s , a blok $\bar{\mathbf{K}}_k$ — stopnia $\zeta_s + \zeta_0$.

Energię potencjalną p -tego odkształcalnego elementu skończonego, w myśl pracy [9], przedstawia forma kwadratowa

$$(5.16) \quad U_p = \frac{1}{2} \mathbf{u}_p^T \mathbf{K}_p \mathbf{u}_p,$$

gdzie \mathbf{u}_p jest blokiem przemieszczeń uogólnionych p -tego elementu odkształcalnego oraz \mathbf{K}_p blokiem sztywności tego elementu (3.3).

Energię potencjalną określoną wzorami (5.12), (5.13) i (5.16) uzależniamy od wektora przemieszczeń uogólnionych układu

$$(5.17) \quad U_k = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \tilde{\mathbf{K}}_k \mathbf{u}, \quad U_p = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \tilde{\mathbf{K}}_p \mathbf{u},$$

gdzie $\tilde{\mathbf{K}}_k$ oznacza macierz sztywności k -tego elementu sprężysto-tłumiącego oraz $\tilde{\mathbf{K}}_p$ macierz sztywności p -tego odkształcalnego elementu skończonego.

Postać macierzy sztywności $\tilde{\mathbf{K}}_k$ i $\tilde{\mathbf{K}}_p$ jest taka sama jak macierzy $\tilde{\mathbf{M}}_r$ (rys. 6). Macierz $\tilde{\mathbf{K}}_k$ k -tego EST łączącego sztywne elementy skończone o numerach r i p otrzymuje się przez umieszczenie czterech podbloków bloku sztywności \mathbf{K}_k w miejsca, gdzie przecinają się pasma poziome z pionowymi o numerach r i p . Pozostałe bloki są zerowe (rys. 9). W przypadku, gdy k -ty EST łączy r -ty SES z j -tym węzłem, macierz sztywności $\tilde{\mathbf{K}}_k$ otrzymuje się przez umieszczenie czterech podbloków bloku sztywności \mathbf{K}_k w miejsca, gdzie przecinają się pasma o numerach r i j . Pozostałe bloki są zerowe (rys. 10).

Macierz sztywności p -tego OES $\tilde{\mathbf{K}}_p$ otrzymuje się z bloku sztywności \mathbf{K}_p podobnie jak macierz bezwładności $\tilde{\mathbf{M}}_p$ (rys. 8).

Energia potencjalna układu (5.7), po uwzględnieniu (5.17), ma postać

$$(5.18) \quad U = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{u},$$

gdzie

$$(5.19) \quad \tilde{\mathbf{K}} = \sum_{k=1}^v \tilde{\mathbf{K}}_k + \sum_{p=1}^{\tilde{n}_0} \tilde{\mathbf{K}}_p$$

nazywamy macierzą sztywności układu.

Funkcja dysypacji układu jest sumą funkcji dysypacji elementów sprężysto-tłumiących i odkształcalnych elementów skończonych. Ponieważ wyprowadza się ją analogicznie do energii potencjalnej, przytoczono tylko końcowe zależności. Funkcję dysypacji układu przedstawia forma kwadratowa

$$(5.20) \quad R = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{L}} \dot{\mathbf{u}},$$

gdzie $\dot{\mathbf{u}}$ oznacza wektor prędkości uogólnionych układu oraz $\tilde{\mathbf{L}}$ macierz tłumienia układu.

Macierz $\tilde{\mathbf{L}}$ określona jest wzorem

$$(5.21) \quad \tilde{\mathbf{L}} = \sum_{k=1}^v \tilde{\mathbf{L}}_k + \sum_{p=1}^{\tilde{n}_0} \tilde{\mathbf{L}}_p,$$

gdzie $\tilde{\mathbf{L}}_k$ jest macierzą tłumienia stopnia \tilde{n} k -tego elementu sprężysto-tłumiącego, oraz $\tilde{\mathbf{L}}_p$ macierzą tłumienia stopnia \tilde{n} p -tego odkształcalnego elementu skończonego.

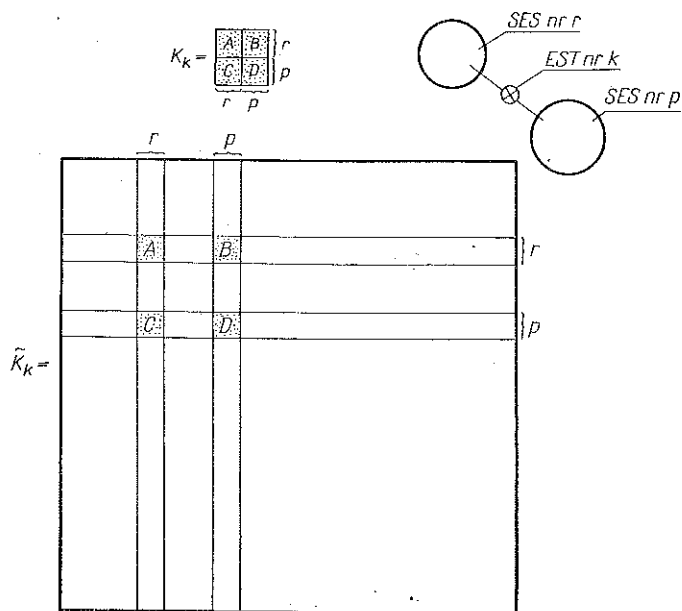
Macierz $\tilde{\mathbf{L}}_k$ otrzymuje się z bloków:

$$(5.22) \quad \mathbf{L}_k = \mathbf{F}_k^T \mathbf{B}_k \mathbf{F}_k,$$

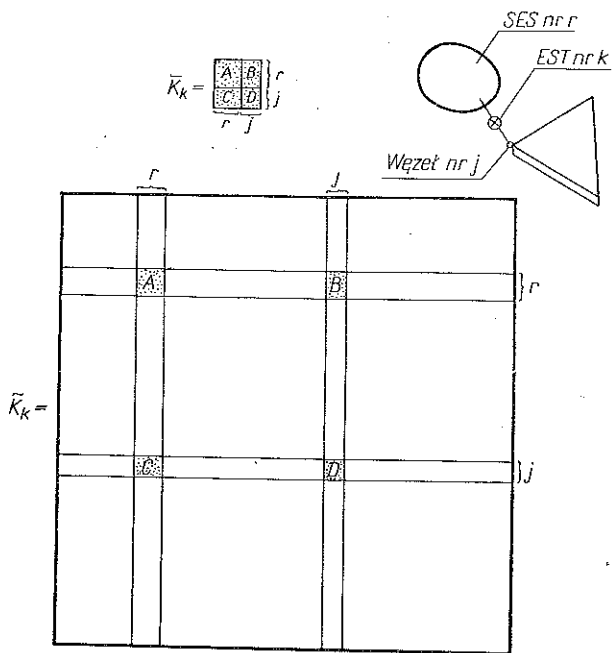
gdy k -ty EST łączy sztywne elementy skończone lub

$$(5.23) \quad \bar{\mathbf{L}}_k = \bar{\mathbf{F}}_k^T \bar{\mathbf{B}}_k \bar{\mathbf{F}}_k,$$

gdy k -ty EST łączy sztywny element skończony z węzłem, a macierz $\tilde{\mathbf{L}}_p$ z bloków tłumienia odkształcalnych elementów skończonych (3.4). Podbloki powyższych bloków wpisuje się do macierzy układu (rys. 6) analogicznie jak w przypadku tworzenia macierzy sztywności.



Rys. 9. Schemat rozkładu niezerowych bloków macierzy sztywności \tilde{K}_k elementu sprężysto-tłumiącego, łączącego sztywne elementy skończone. Bloki niezerowe zaznaczono



Rys. 10. Schemat rozkładu niezerowych bloków macierzy sztywności \tilde{K}_k elementu sprężysto-tłumiącego, łączącego sztywne element skończony z węzłem. Bloki niezerowe zaznaczono

Podstawiając wyrażenia (5.5), (5.18) i (5.20) do równania Lagrange'a drugiego rodzaju, otrzymuje się równanie różniczkowe ruchu układu:

$$(5.24) \quad \tilde{M}\ddot{u} + \tilde{L}\dot{u} + \tilde{K}u = f.$$

Dzieląc (podobnie jak w [6, rozdz. 4]) macierze \tilde{M} , \tilde{L} , \tilde{K} oraz wektory u i f na podmacierze, otrzymujemy

$$(5.25) \quad \begin{bmatrix} M & M' \\ M''^T & M' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L & L' \\ L''^T & L' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & K' \\ K''^T & K' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix},$$

gdzie M, L, K oznacza macierze bezwładności, tłumienia i sztywności podukładu o danym obciążeniu, M', L', K' macierze bezwładności, tłumienia i sztywności podukładu o danym ruchu, M'', L'', K'' macierze bezwładności, tłumienia i sztywności połączeń podukładu o danym ruchu z podukładem o danym obciążeniu, q wektor nieznanych przemieszczeń uogólnionych, z wektor danych przemieszczeń uogólnionych, p wektor danych sił uogólnionych oraz r wektor nieznanych reakcji.

Równanie (5.25) przekształcamy tak samo jak równanie [6, wzór (4.41)].

Dalsze obliczenia statyczne i dynamiczne rozpatrywanego modelu obliczeniowego są analogiczne do przypadku modelu złożonego tylko ze sztywnych elementów skończonych [6]. Należy przy tym pamiętać, że macierze M i M' nie są macierzami diagonalnymi, a macierz M'' nie jest macierzą zerową.

6. DRGANIA SWOBODNE I WYMUSZONE

Drgania swobodne modelu złożonego zarówno ze sztywnych jak i odkształcalnych elementów skończonych oblicza się podobnie jak w pracy [1], rozwiązując równanie

$$(6.1) \quad M\ddot{q} + Kq = 0.$$

Ze względu na to, że macierz bezwładności (M) nie jest macierzą diagonalną, częstości drgań własnych i odpowiadające im postacie drgań oblicza się metodą opisaną w pracy [9].

W celu określenia drgań układu od wymuszeń okresowych należy rozwiązać następujące równanie różniczkowe:

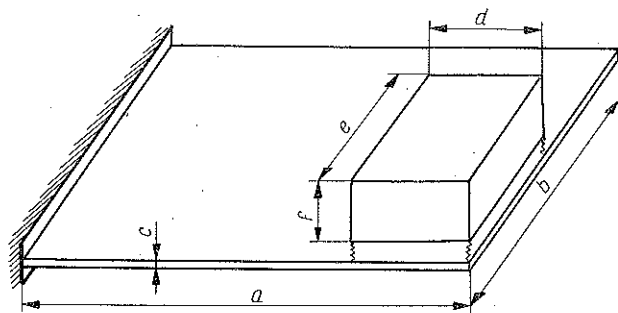
$$(6.2) \quad M\ddot{q} + L\dot{q} + Kq = p - K''z - L''\dot{z} - M''\ddot{z}.$$

Sposób rozwiązania równania (6.2) przedstawiono w pracy [1].

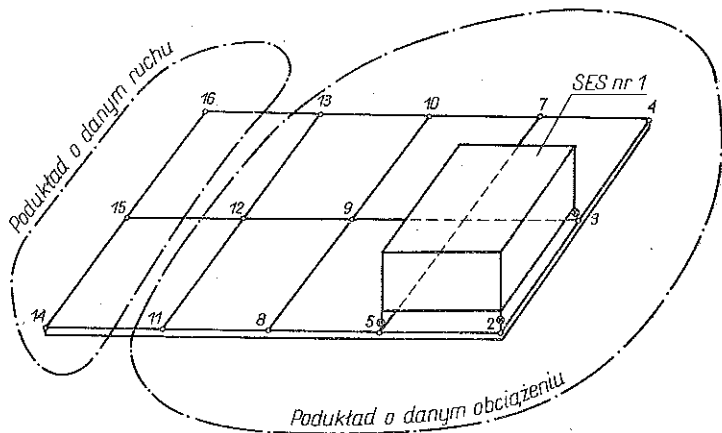
7. PRZYKŁAD LICZBOWY

W celu zilustrowania proponowanej metody przedstawiono przykład obliczeń częstości drgań własnych i odpowiadających im postaci drgań układu, złożonego z izotropowej płyty z ustawioną na niej maszyną (rys. 11). Model obliczeniowy tej konstrukcji składa się z ośmiu odkształcalnych elementów skończonych i z jednego sztywnego elementu skończonego. Odkształcalne elementy skończone połączone są ze sobą w piętnastu węzłach, a sztywny element skończony — czterema elementami

sprężysto-tłumiącymi z węzłami odkształcalnych elementów skończonych. Trzy węzły o numerach 14, 15 i 16 mają przemieszczenia zerowe i zaliczamy je do podukładu o danym ruchu (rys. 12). Masę płyty skupiono w węzłach, co znacznie upraszcza stronę numeryczną obliczeń, ponieważ macierz bezwładności pozostaje



Rys. 11. Izotropowa płyta z ustawioną na niej maszyną



Rys. 12. Podział konstrukcji (rys. 11) na elementy skończone

macierzą diagonalną. Dokładność obliczeń jest jednak mniejsza, niż przy uwzględnieniu ciągłego rozkładu masy.

Dane liczbowe:

wymiary płyty: $a \times b \times c = 400 \text{ cm} \times 400 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$,

wymiary maszyny: $d \times e \times f = 100 \text{ cm} \times 200 \text{ cm} \times 200 \text{ cm}$,

ciężar płyty: $Q = 624 \text{ kG}$,

ciężar maszyny: $G = 100 \text{ kG}$,

moduł Younga materiału płyty: $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kGcm}^{-2}$,

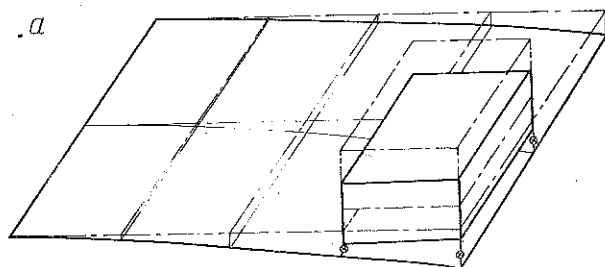
liczba Poissona materiału płyty: $\nu = 0,3$,

szttywność podkładki sprężystej na ściskanie: $k_1 = 273,44 \text{ kGcm}^{-1}$,

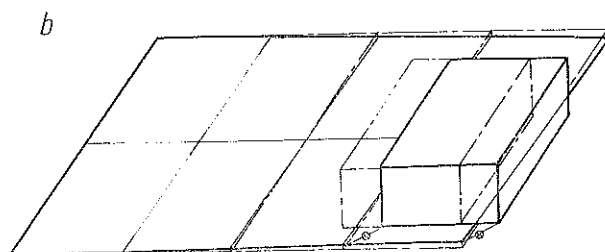
szttywność podkładki sprężystej na ścinanie: $k_2 = k_3 = 273,44 \text{ kGcm}^{-1}$.

Szttywność podkładki w pozostałych kierunkach pominięto.

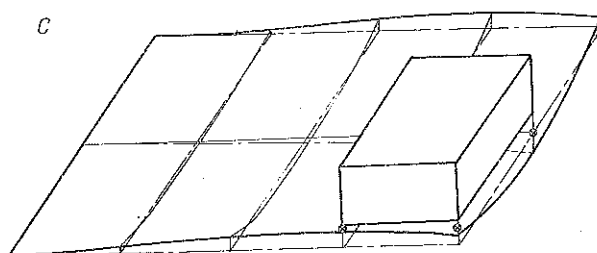
Dla tak przyjętych danych przeprowadzono obliczenia na komputerze ICL typu IV. Wyznaczono sześć pierwszych częstości drgań własnych oraz odpowiadające im postacie drgań. Dla przykładu przedstawiono trzy postacie drgań własnych: pierwszą (rys. 13a), drugą (rys. 13b) oraz piątą (rys. 13c).



Częstość $f_1 = 433,6$ okr/min



Częstość $f_2 = 946,3$ okr/min



Częstość $f_5 = 2003,8$ okr/min

Rys. 13. Postacie drgań własnych płyty ze sprężycie podpartą masą: a) postać pierwsza, b) postać druga, c) postać piąta

8. WNIOSKI

1) Metoda nadaje się do obliczeń drgań platform pływających z ustawionymi na nich sprężycie podpartymi maszynami.

2) Model obliczeniowy, przyjęty w przedstawionej metodzie, lepiej zastępuje rzeczywistą konstrukcję niż model złożony tylko ze sztywnych lub tylko z odkształcalnych elementów skończonych.

3) Macierzowa postać równań ruchu, podobna jak w dotychczas stosowanych metodach elementów skończonych, umożliwi przeprowadzanie obliczeń na komputerze posługując się w większości istniejącymi już podprogramami.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. GAWROŃSKI, J. KRUSZEWSKI, *Analiza drgań wymuszonych złożonych układów liniowych metodą sztywnych elementów skończonych*, Arch. Bud. Maszyn, **9**, 4, 1972.
2. W. GAWROŃSKI, J. KRUSZEWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych w zastosowaniu do analizy drgań złożonych układów liniowych*, Rozpr. Inż., **4**, 1972.
3. J. KRUSZEWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych w zastosowaniu do obliczeń częstości drgań własnych ustrojów okrętowych*, Mech. Teoret. Stos., **9**, 4, 1971.
4. J. KRUSZEWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych w zastosowaniu do obliczeń drgań własnych złożonych układów liniowych*, Zesz. Nauk. Polif. Gdańskiej, Mechanika, Nr 12, 1971.
5. J. KRUSZEWSKI, *Zastosowanie metody sztywnych elementów skończonych do obliczeń drgań własnych platform «plywających» z urządzeniami okrętowymi*, VII Polsko-Czechosłowacka Konferencja Dynamiki Maszyn, Zbiór referatów, **1**, 1971.
6. J. KRUSZEWSKI, W. GAWROŃSKI, E. WITBRODT, *Metoda sztywnych elementów skończonych w obliczeniach konstrukcji okrętowych*, Rozpr. Inż., **22**, 3, 1974.
7. J. KRUSZEWSKI, J. STANKIEWICZ, *Metoda «sił» w obliczeniach drgań nowoczesnych rozwiązań napędów okrętowych*, Zbiór prac WSMW, Nr 25, Gdynia 1969.
8. J. SZMELTER, M. DAČKO, S. DOBROCIŃSKI, M. WIECZOREK, *Programy metody elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1973.
9. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.

Резюме

ГИБРИДНЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПРИМЕНЕНИИ ДЛЯ РАСЧЕТОВ КОЛЕБАНИЙ СУДОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В работе обсужден метод позволяющий на замену реальных конструкций моделью состоящей так из жестких, как и деформируемых конечных элементов. Из-за выступления обоих типов конечных элементов этот метод назвали гибридным. Выведены уравнения движения для рассчитываемой модели и предложено ее применение для расчетов колебаний судовых конструкций упруго прикрепленных и недеформируемым платформам. Метод разработан под углом применения электронной вычислительной техники.

SUMMARY

A HYBRID METHOD OF FINITE ELEMENTS APPLIED TO THE CALCULATION OF VIBRATIONS OF NAVAL STRUCTURES

The method presented consists in replacing real naval structures with models consisting of rigid and deformable finite elements. The method is called hybrid owing to the both types of elements occurring in the model. Equations of motion of the model are derived, and the method of application of the method is outlined in the case of naval structures elastically clamped in deformable platforms. The method is suitable for electronic computer technique.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 marca 1974 r.