

ZGINANIE MASZTÓW WZMOCNIONYCH OLINOWANIEM

WITOLD K U R S K I (GDAŃSK)

W artykule podano równania odkształceń masztów okrętowych współpracujących z odciągami. Do opisu działania odciągów zastosowano przekształcenie liniowe wiążące przemieszczenia węzła z reakcjami zespołu odciągów. Taki opis uwzględni nie tylko ugięcia lecz i przemieszczenia osiowe masztu. Wykazano także, że uproszczenia przyjmowane w obliczeniach technicznych sprowadzają się do zmiany współrzędnych macierzy przekształcenia.

WSTĘP

Konstrukcje w postaci masztów wzmocnionych olinowaniem znane są w budownictwie okrętowym od bardzo dawna jako zasadniczy element wyposażenia statków żaglowych. Wprawdzie obecnie dużych statków żaglowych jest niewiele, jednakże rozwija się budowa dużej ilości małych jednostek żaglowych o bardzo dobrych osiągnięciach, co skłania do poszukiwania optymalnych rozwiązań masztów wzmocnionych olinowaniem. Maszty wzmocnione olinowaniem znajdują także obecnie zastosowanie na dużych jednostkach jako elementy urządzeń przeladunkowych.

W artykule rozpatruje się współpracę odciągów z masztem.

Do opisu pracy odciągów użyto przekształceń liniowych, co, zdaniem autora, jest nowym elementem pracy. Użycie tych przekształceń pozwoliło wykazać, że uproszczone metody obliczeń, stosowane w praktyce budownictwa okrętowego, polegające na pomijaniu wpływu sił osiowych, są równoważne zastępowaniu współrzędnych macierzy przekształceń w wybranych układach odniesienia innymi współrzędnymi. Te uproszczenia uzasadnione wymaganą dokładnością obliczeń konstrukcji masztów stalowych o dużej sztywności (np. w urządzeniach przeladunkowych) są nie do przyjęcia przy dużych odkształceniach konstrukcji masztów o niewielkiej sztywności.

1. METODY OBLICZEŃ

Stosowane metody obliczeń masztów wzmocnionych olinowaniem opisane np. w [1], oparte są na uproszczonych modelach obliczeniowych. Maszt jest traktowany jako belka jedno lub wieloprzęsłowa, oparta na sztywnych i sprężystych podporach, przy czym w obliczeniach odkształceń pomija się efekty sił osiowych. Efekty te są dwójakiego rodzaju: pomija się zarówno skrócenie masztu wskutek ściskania siłami osiowymi jak i wpływ sił osiowych na ugięcia poprzeczne masztu.

Samo działanie odciążu zastępuje się siłami sprężystości, działającymi prostopadle do osi masztu i niezależnymi od skrócenia masztu.

Rozważmy pracę odciążu o długości l , przekroju poprzecznym F , wykonanym z materiału o module sprężystości E , zaczepionym w punkcie B do masztu i nachylnym pod kątem α . Zakładamy, że napięcie wstępne w odciążu jest tak duże, że można pominąć wpływ sił ciężkości samego odciążu. Przy przemieszczeniu punktu B równemu ugięciu f w kierunku odchylonym o kąt γ od płaszczyzny odciąż-maszt, zmiana siły w linie wyniesie

$$(1.1) \quad W = f \frac{EF \cos \gamma}{b} \sin^2 \alpha.$$

Odpowiednie składowe: pozioma W_1 i pionowa W_2 są równe

$$(1.2) \quad W_1 = W \sin \alpha, \quad W_2 = W \cos \alpha.$$

Siłę W_1 można rozłożyć dalej odpowiednio na składową W'_1 , skierowaną przeciwnie do przemieszczenia f , oraz na składową W''_1 , skierowaną prostopadle do przemieszczenia f :

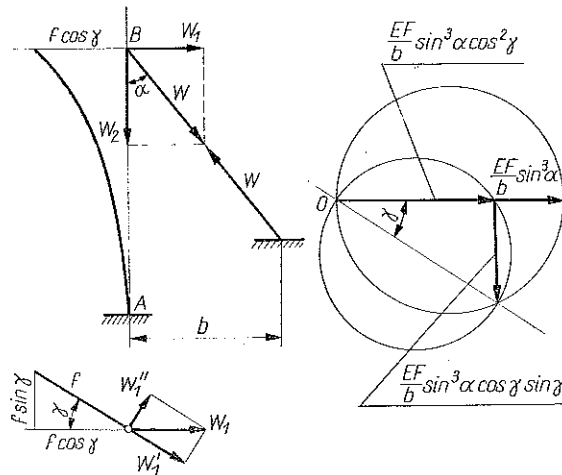
$$(1.3) \quad W'_1 = f \frac{EF}{b} \sin^3 \alpha \cos^2 \gamma$$

oraz

$$(1.4) \quad W''_1 = f \frac{EF}{b} \sin^3 \alpha \cos \gamma \sin \gamma.$$

Sztywność odciążu można zdefiniować przez siły W przy ugięciu $f=1$. Wartości W_1/f oraz W'_1/f , W''_1/f można łatwo znaleźć wykreslnie (rys. 1).

Do obliczeń sztywności pojedynczego odciążu, zespołu odciążów oraz układu złożonego z zespołu odciążów i masztu H. VOIGT [2] zaproponował w ramach



Rys. 1. Praca odciążu

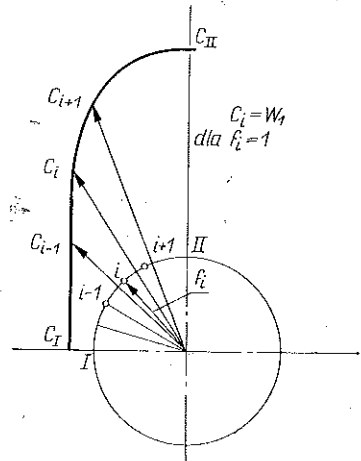
uproszczonego modelu szereg sposobów wykreślnych, które są szczególnie przydatne w przypadku kilku w różny sposób umieszczonych odciągów.

W efekcie współpracy wielu odciągów z masztem można znaleźć zależność pomiędzy przemieszczeniem jednostkowym węzła B a siłą W_1 , która te przemieszczenia wywołuje. Wygodnie jest tę zależność przedstawić wykreślnie (rys. 2) w układzie biegunowym, łącząc końce wektorów sztywności linią ciągłą.

Każdemu przemieszczeniu jednostkowemu $0-i$, $i=1, 2, \dots$, odpowiada wektor sztywności C_i . Wektor przemieszczenia tylko dla niektórych kierunków jest współliniowy z wektorem sztywności C_i .

Aby znaleźć przemieszczenia podczas pracy masztu, należy sporządzić wykres biegunowy sił zewnętrznych będących obwiednią obciążeń roboczych. Wykorzystując ten wykres oraz wykres sztywności można sporządzić obwiednię przemieszczeń podczas pracy konstrukcji. Obwiednia ta przedstawia rozwiązanie w ramach

uproszczonego modelu przy zaniedbaniu przemieszczeń pionowych, których wpływ może być znaczny dla wiotkich masztów. Uproszczony model uniemożliwia również sformułowanie problemu stateczności.



Rys. 2. Wykres sztywności

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Rozpatrując pracę jednego odciagu stwierdzamy, że siła W jest skierowana wzdłuż odciagu i zależy od przemieszczenia f punktu B . Zarówno siłę jak i przemieszczenie można przedstawić za pomocą wektorów w przestrzeni odpowiednio W i f ; mamy więc przypadek funkcji wektorowo-wektorowej:

$$(2.1) \quad W = W(f).$$

Zakładając stosowalność prawa Hooke'a zauważymy, że przekształcenie to jest liniowe, a więc spełnia warunki następujące:

1) dla dwóch dowolnych wektorów f_1 i f_2

$$(2.2) \quad W(f_1 + f_2) = W(f_1) + W(f_2);$$

2) dla dowolnego wektora f i liczby rzeczywistej α

$$(2.3) \quad W(\alpha f) = \alpha W(f).$$

Z warunków 1 i 2 wynika, że dla dowolnych f_1, f_2, \dots, f_n i dowolnych liczb rzeczywistych $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ mamy

$$(2.4) \quad W(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n) = \alpha_1 W(f_1) + \alpha_2 W(f_2) + \dots + \alpha_n W(f_n)$$

lub krócej, zgodnie z regułami sumacyjnymi

$$(2.5) \quad W(\alpha_\lambda \mathbf{f}_\lambda) = \alpha_\lambda W(\mathbf{f}_\lambda).$$

Jest to więc przekształcenie liniowe zwane afinorem. Jeżeli wprowadzimy w przestrzeni układ odniesienia z bazą $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, w którym oś \mathbf{e}_1 pokrywa się z osią odciągu, to współrzędne afinora tworzą macierz $[S_{\lambda\mu}]$, w której tylko element $S_{11} \neq 0$, przy czym

$$S_{11} = \frac{EF \cos \alpha}{b}.$$

Ze względu na opis odkształceń masztu wygodniejsze może być przyjęcie innego układu odniesienia $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ związanego z masztem tak, aby jedna z osi (np. \mathbf{e}'_3) pokrywała się z osią masztu, a dwie pozostałe z głównymi osiami bezwładności przekroju poprzecznego masztu. Oczywiście w nowym układzie odniesienia współrzędne afinora będą inne.

Jeżeli w tym samym punkcie do masztu jest zaczepiony nie jeden lecz kilka dowolnie usytuowanych odciągów, spełniających warunek wystarczającego napięcia wstępnego, to przy jednostkowym przemieszczeniu węzła na maszt działać będzie wypadkowa wszystkich sił w odciągach.

Współrzędne afinora S nowego przekształcenia liniowego tworzą macierz $[S'_{\lambda\mu}]$. Z zasady wzajemności Maxwella-Bettiego wynika symetria względem głównej przekątnej.

Rozwiązania równań

$$(2.6) \quad \begin{aligned} (S'_{1'1'} - \alpha) a_1 + S'_{1'2'} a_2 + S'_{1'3'} a_3 &= 0, \\ S'_{2'1'} a_1 + (S'_{2'2'} - \alpha) a_2 + S'_{2'3'} a_3 &= 0, \\ S'_{3'1'} a_1 + S'_{3'2'} a_2 + (S'_{3'3'} - \alpha) a_3 &= 0 \end{aligned}$$

ze względu na α, a_1, a_2, a_3 wyznaczają wartości własne $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ oraz wektory własne afinora S .

Ze względu na symetrię afinora wszystkie trzy pierwiastki równania charakterystycznego są rzeczywiste i odpowiadają im trzy wzajemnie prostopadłe kierunki własne. W takim układzie odniesienia, którego osie są równoległe do kierunków własnych danego afinora macierz współrzędnych afinora jest następująca:

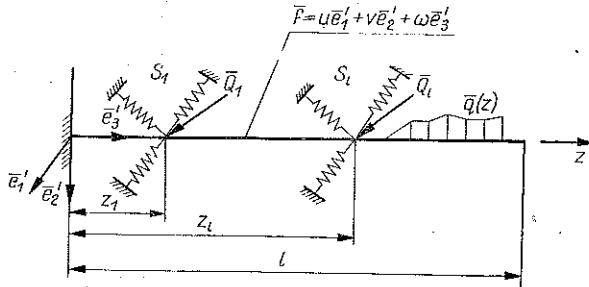
$$(2.7) \quad S = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

Pamiętając, że współrzędne afinora tworzą tensor, zauważymy, że wyznacznik macierzy współrzędnych afinora $[S_{\lambda\mu}]$ jest niezmiennikiem przekształcenia układu odniesienia i jest on równy iloczynowi wartości własnych.

Ważne technicznie przypadki spotykane w budownictwie okrętowym, to nie tylko przypadki osobliwe, gdy niektóre wartości własne są równe zeru, lecz przede wszystkim przypadki nieosobliwe. Inne technicznie ważne przypadki zachodzą, gdy

kierunki własne afinora S nie pokrywają się z osią masztu bądź z osiami głównymi przekroju poprzecznego.

Model obliczeniowy masztu wzmocnionego działaniem układów odciągów jest przedstawiony na rys. 3, przy czym układ odciągów zaczepiony w węźle i cha-



Rys. 3. Model masztu z odciągami

rakteryzuje afinor S_i . Przeszyczenia dowolnego punktu masztu są określone za pomocą wektora

$$\mathbf{f} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3.$$

Obciążenie zewnętrzne, działające na maszt, sprowadza się do obciążenia $\mathbf{q}(z)$ oraz obciążeń \mathbf{Q}_i działających na węzły masztu. Dodatkowo działają reakcje ze strony olinowania. Całkowite obciążenie \mathbf{R}_i , działające w węźle na maszt, przedstawione w postaci macierzowej wynosi

$$(2.8) \quad \mathbf{R}_i = \mathbf{Q}_i - \mathbf{S}_i \mathbf{f}_i,$$

gdzie \mathbf{R}_i , \mathbf{Q}_i są macierzami sił sprężystości i sił zewnętrznych węzła i ($i=1, 2, \dots, N$), \mathbf{S}_i , \mathbf{f}_i są macierzami sztywności i przemieszczeń węzła i . W uproszczonych metodach obliczeń zakłada się, że przemieszczenia osiowe $w\mathbf{e}_3$, nie wpływają na składowe reakcji. Znaczący to, że macierz \mathbf{S} , opisująca własności podpory w wybranym układzie odniesienia, zostaje zmieniona w ten sposób, że wszystkie współrzędne jednego wiersza i jednej kolumny macierzy \mathbf{S} przyjmują wartość zera. Jeżeli przemieszczenia \mathbf{W} nie są małe, to nie można stosować takich uproszczeń, lecz trzeba uwzględnić wpływ przemieszczeń $w\mathbf{e}_3$ na reakcje podpór.

Zagadnienie zginania masztu sprowadza się do obliczenia odkształceń, które spełniają następujące równania oraz warunki brzegowe, wynikające ze sposobu utwierdzenia i podparcia masztu:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} (EJ_2 u'')'' + (Tu')' &= q_1(z), \\ (EJ_1 v'')'' + (Tv')' &= q_2(z), \\ \omega &= - \int_0^z \left[\frac{T(z)}{EF} + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\zeta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{d\zeta} \right)^2 \right] d\zeta, \end{aligned}$$

gdzie J_1, J_2 oznaczają odpowiednio główne momenty bezwładności przekroju poprzecznego masztu, $q_1(z), q_2(z)$ składowe obciążenia zewnętrznego $\mathbf{q}(z)$ oraz $T(z)$ siłę ściskającą w rozważanym przekroju masztu.

Przed przyłożeniem obciążenia zewnętrznego układ znajduje się w stanie równowagi i w maszcie działają siły ściskające $T_0(z)$, będące wynikiem montażu i regulacji układu. Dodając do siły $T_0(z)$ składowe osiowe sił R_i oraz składowe obciążeń $q(z)$ otrzymamy siłę osiową $T(z)$:

$$(2.10) \quad T(z) = T_0(z) - \int_z^l q(\zeta) e_3 \cdot d\zeta - \sum_{i, z_i > z}^N R_i e_3.$$

Tak postawione zadanie pozwala znaleźć odkształcenia układu. Cechą charakterystyczną rozwiązań jest zależność od wstępnych napięć $T_0(z)$. Ważnym zadaniem jest dobór najwygodniejszych wartości $T_0(z)$, zwiększając bowiem napięcia $T_0(z)$ można doprowadzić do tego, że układ nie będzie w stanie przenosić jakiegokolwiek obciążenia bez obawy utraty stateczności.

Siła $T_0(z)$ zależy będzie od początkowych napięć w linii N_{ij}^0 , gdzie i jest numerem węzła $i=1, 2, \dots, N$, a j jest numerem linii, $j=1, 2, \dots, J_N$:

$$(2.11) \quad T_0(z) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{J_N} N_{ij}^0 \alpha_{ij}(z)$$

oraz

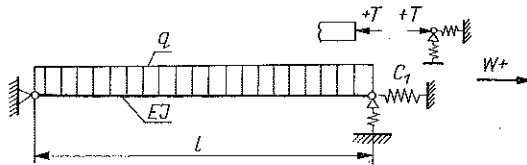
$$\alpha_{ij}(z) = \frac{\partial T_0(z)}{\partial N_{ij}^0}, \quad i=1, 2, \dots, N, \quad j=1, 2, \dots, J_N, \quad z \in \langle 0, l \rangle$$

jest funkcją wpływu siły ściskającej.

Współczynnik bezpieczeństwa κ przy danej postaci obciążenia $q(z)$, Q_i i prostym obciążeniu $\kappa q(z)$, κQ_i jest funkcją wielu zmiennych w pewnym zbiorze domkniętym napięć wstępnych $(N_{11}^0, \dots, N_{N, J_N}^0)$. Brzeg tego zbioru wyznaczają kryteria dostatecznej sztywności układu lub stosowalności teorii liniowej. Jeżeli dla $N_{ij}^0 = N_{ij}$ współczynnik bezpieczeństwa $\kappa = 1$, to znaczy dla $\kappa > 1$ napięcie przynajmniej w jednej z lin spadnie poniżej stosowalności teorii liniowej, to punkt $N_{ij}^0 = N_{ij}$ ($i=1, 2, \dots, N$, $j=1, 2, \dots, J_N$) jest punktem brzegowym obszaru.

Zadanie wyznaczenia obszaru, w którym κ jest określone, jak również ekstremum κ , wymaga oddzielnego zbadania.

Jeżeli chcemy badać duże odkształcenia układu, to zamiast uproszczonych równań linii ugięcia (2.9)₁ należałoby zastosować równania ściśle.



Rys. 4

W celu wykazania wpływu przemieszczeń poprzecznych na siły wewnętrzne rozpatrzmy maszt o stałym przekroju F i momencie bezwładności EJ , obciążony równomiernie rozłożonym obciążeniem q , działającym w jednej płaszczyźnie.

W przekroju $z=0$ maszt jest swobodnie podparty, a w przekroju $z=l$ sprężyste podparty systemem odciągów, których działanie opisuje afinor S_1 . Jedna z głównych osi S_1 pokrywa się z osią z , a druga znajduje się w płaszczyźnie działania obciążenia.

Układ jest tak zmontowany, że przed przyłożeniem obciążenia q w maszcie działa siła ściskająca T_0 . Wskutek wygięcia masztu wg linii $u(z)$ przekrój $z=l$ przemieści się w lewo; a więc

$$(2.12) \quad \Delta W_1 = -\frac{1}{2} \int_0^l [u']^2 dz.$$

Zmianie ulegnie także siła ściskająca maszt o ΔT , który ulegnie skróceniu; a więc

$$(2.13) \quad \Delta W_2 = -\frac{\Delta T l}{EF}.$$

Wskutek zmiany reakcji o ΔT podpora sprężysta przemieści się w prawo o ΔW_3 :

$$(2.14) \quad \Delta W_3 = \frac{\Delta T}{C_1},$$

gdzie C_1 charakteryzuje sztywność podpory w kierunku osi z . Ponieważ przemieszczenia przekroju $z=l$ muszą być dla masztu i podpory jednakowe, więc

$$(2.15) \quad -\frac{1}{2} \int_0^l [u']^2 dz - \frac{\Delta T l}{EF} = \frac{\Delta T}{C_1}.$$

Wykorzystajmy rozwiązanie przybliżone na ugięcie $u(z)$ dla belki obciążonej równomiernym obciążeniem q i siłą ściskającą T :

$$(2.16) \quad u(z) = \frac{4ql^4}{\pi^5 EJ \left(1 - \frac{T}{T_E}\right)} \sin \frac{\pi z}{l},$$

gdzie

$$T_E = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Wprowadźmy oznaczenie:

$$(2.17) \quad h = \frac{4}{\pi^5} \frac{ql^4}{EJ} \approx \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}.$$

Po wykorzystaniu rozwiązania przybliżonego (2.16) i równania (2.15) otrzymamy

$$(2.18) \quad T - T_0 = \Delta T = -\frac{\pi^2 h^2}{4 \left[\frac{l}{EF} + \frac{1}{C_1} \right]} \frac{1}{\left[1 - \frac{T}{T_E} \right]^2},$$

$$T = T_0 - \frac{\pi^2 h^2}{4 \left[\frac{l}{EF} + \frac{1}{C_1} \right]} \frac{1}{\left[1 - \frac{T}{T_E} \right]^2}.$$

Z ostatniego równania stopnia trzeciego znajdujemy T w stanie równowagi. Łatwo zauważyć, że pod wpływem zginania masztu następuje zmniejszenie siły ściskającej tym większe, im sztywniejsze jest olinowanie. Olinowanie bardziej wiotkie powodować będzie powolniejszy spadek siły T , a więc większe ugięcia w chwili osiągnięcia równowagi obciążonego masztu. Przy zupełnie wiotkim olinowaniu siła T mało zmieniać się będzie z obciążeniem masztu przyjmując wartości bliskie T_0 .

Jeżeli siła T jest bliska T_E , to powoduje ona znaczny przyrost ugięć $u(z)$ zginanego masztu i dlatego najlepiej jest przyłożyć możliwie najmniejszą siłę T_0 , jaka wynika z warunków wystarczającego napięcia wstępnego.

Gdyby można było zrealizować dowolną siłę T_0 , to najwygodniejsza ze względu na zginanie byłaby taka, która pozwala uzyskać minimum naprężeń σ w środkowym przekroju masztu:

$$(2.19) \quad \sigma = -\frac{T}{F} \pm \frac{ql^2}{8W} \varphi_0(u),$$

gdzie

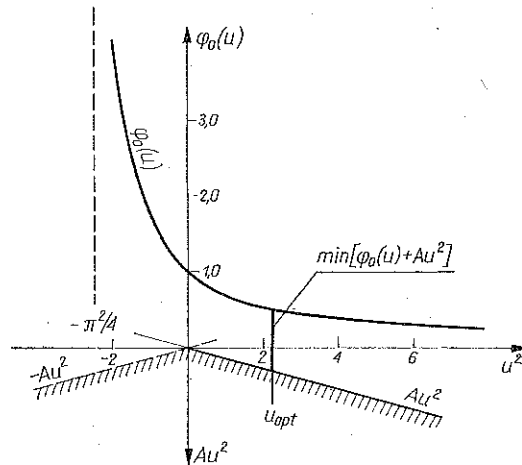
$$(2.20) \quad u = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{-T}{EJ}},$$

$$\varphi_0(u) = \frac{2}{u^2} \left[1 - \frac{1}{\operatorname{ch} u} \right].$$

Naprężenie σ można wyrazić za pomocą wzoru

$$(2.21) \quad \sigma = \frac{4u^2 EJ}{l^2 F} \pm \frac{ql^2}{8W} \varphi_0(u),$$

$$\sigma = \pm \frac{ql^2}{8W} [\varphi_0(u) \pm Au^2].$$



Rys. 5

Poszukujemy takiej wartości u , aby uzyskać minimum większej wartości $\varphi_0(u) \pm \pm Au^2$ (rys. 5). Na podstawie (2.18) i (2.20) optymalne T_0 będzie następujące:

$$(2.22) \quad T_{0 \text{ opt}} = -\frac{4u_{\text{opt}}^2 EJ}{l^2} + \frac{\pi^2 h^2}{4 \left[\frac{l}{EF} + \frac{1}{C_1} \right] \left[1 + \left(\frac{2u_{\text{opt}}}{\pi} \right)^2 \right]^2}.$$

Z charakteru wykresu funkcji $\varphi_0(u)$ i wzoru (2.21) wartość optymalna $u_{\text{opt}}^2 > 0$, skąd wynika, że ze względu na osiągnięcie najmniejszych naprężeń należałoby przyłożyć siłę $T_0 < 0$.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. HENSCHKE, *Schiffbautechnisches Handbuch*, Handbuch. 2. Auflage Band 1. VEB Verlag: Technik, Berlin 1957.
2. H. VOIGT, *Przeliczenie metodą sztywności olinowanych masztów przeladunkowych*, Wyd. wewn. P.R.S., Gdańsk.

Резюме

ИЗГИБ МАЧТЕЙ УПРОЧНЕННЫХ ТАКЕЛАЗОМ

В статье даются уравнения деформаций для судовых мачт взаимодействующих с оттяжками. Для описания действия оттяжек применено линейное преобразование, связывающее перемещение узла с реакциями системы оттяжек. Такое описание учитывает не только прогиб, но и осевое перемещение мачты. Доказано тоже, что упрощения, принимаемые в технических расчетах, сводятся изменению координат матрицы преобразования.

SUMMARY

BENDING OF MASTS REINFORCED BY ROPES

In the paper presented are the deformation equations of naval masts reinforced with stay ropes. The action of stay ropes is described by means of a linear transformation which expresses the displacement of a node in terms of reactions of the ropes. Such a description takes into account not only the deflections but also the axial displacements of the mast. It is proved that the simplifications used in engineering calculations may be reduced to a coordinate transformation in the transformation matrices.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 listopada 1973 r.