

## ZASTOSOWANIE METODY SZTYWNYCH ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH DO OBLICZEŃ DRGAŃ WAŁÓW OKRĘTOWYCH Z UWZGLĘDNIENIEM EFEKTÓW GIROSKOPOWYCH

JANISŁAW TARNOWSKI (GDAŃSK)

W pracy zaproponowano metodę obliczania drgań giętnych okrętowych wałów napędowych z uwzględnieniem efektów giroskopowych. Model obliczeniowy został oparty na metodzie sztywnych elementów skończonych. Opracowano program obliczeniowy na EMC pozwalający na wygodne korzystanie z metody.

### 1. WSTĘP

Jednym z ważnych problemów stojących przed konstruktorami wałów napędowych na statkach jest określenie krytycznych częstości drgań giętnych układu wał-śruba napędowa. Dla otrzymania wartościowych wyników należy uwzględnić w obliczeniach: 1) sztywność na zginanie wału, 2) masę wału, 3) masę i masowy moment bezwładności śruby wraz z wodą towarzyszącą, 4) efekt giroskopowy mas wirujących, 5) sztywność łożysk i podpór łożyskowych oraz 6) luzy między łożyskami a wałem.

Występowanie efektu giroskopowego sprawia, że ruch wału można przedstawić jako rezultat sumowania się drgań w dwóch płaszczyznach prostopadłych, przecinających się wzdłuż osi pokrywającej się z osią łożysk. Zachodzi zatem przypadek tzw. drgań obrotowych, charakteryzujących się tym, że odkształcona oś wału wiruje wokół osi łożysk z prędkością kątową równą prędkości kątowej obrotów własnych wału. Jest to ruch precesyjny. Ruch precesyjny wału powoduje powstawanie dodatkowych momentów od wirujących mas, noszących z racji swego charakteru nazwę momentów giroskopowych. Wpływają one znacznie na charakter drgań w przypadku dużych prędkości kątowych wału lub też dużych masowych momentów bezwładności elementów osadzonych na wale. Elementem takim w przypadku wałów okrętowych jest śruba napędowa, którą w obliczeniach traktuje się jako tarczę.

Zagadnieniem wałów wirujących z uwzględnieniem efektów giroskopowych zajmowało się wielu autorów. Zazwyczaj rozważano pierwszą formę drgań wywołanych niewyważeniem wałów. Prace te [5, 13 i 14] mają raczej charakter rozważań teoretycznych z niewielką możliwością zastosowań praktycznych. W innych pracach rozpatrywano uproszczony model obliczeniowy w postaci nieważkiego wału z osadzoną na nim tarczą. Rozwiązanie w tym przypadku, względem częstotliwości drgań własnych, sprowadzało się do prostego równania kwadratowego, które uwzględniało wpływ efektu giroskopowego pochodzącego od tarczy [1, 3, 4]. Powyższy model

obliczeniowy jest dopuszczalny tylko w przypadku, gdy masa wału nie przekracza 30% masy tarczy [1]. Warunek ten nie jest spełniony dla większości napędowych wałów okrętowych.

Z innych prac teoretycznych należy wymienić pozycje [7, 11 i 16], w których autorzy rozwiązują zagadnienie drgań wałów wirujących z uwzględnieniem masy wału, rozłożonej bądź dyskretnie, bądź też w sposób ciągły. Doświadczalnym aspektem zagadnienia zajmowali się autorzy [8 i 12].

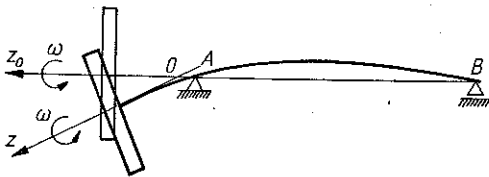
Niniejsza praca przedstawia próbę rozwiązania problemu obliczania drgań wałów okrętowych z uwzględnieniem efektów giroskopowych przy pomocy opracowanej w Instytucie Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Gdańskiej metody sztywnych elementów skończonych (SES).

Wybór metody sztywnych elementów skończonych został podyktowany jej szczególną przydatnością do obliczeń dynamicznych tego typu układów. Model obliczeniowy utworzony przy wykorzystaniu tej metody pozwala na uwzględnienie wielu z wymienionych na wstępie czynników wpływających na drgania wałów. Wprawdzie w pracy tej uwzględniono jedynie efekt giroskopowy, pochodzący od wirujących mas wału, wydaje się jednak, że będzie możliwe uwzględnienie również np. wpływu odkształcalności i masy dna podwójnego oraz sprzężeń drgań giętnych ze wzdłużnymi i skrętnymi. Ważną zaletą metody sztywnych elementów skończonych jest jej przystosowanie do obliczeń na komputerach, co pozwala na pełną (łącznie z przygotowaniem danych) automatyzację obliczeń.

W porównaniu z innymi poznanymi przez autora metodami obliczeń drgań wałów wirujących — metoda sztywnych elementów skończonych pozwala na budowę bardzo ogólnego modelu obliczeniowego zachowując przy tym prostotę i łatwość stosowania.

## 2. MODEL OBLICZENIOWY I RÓWNANIA RUCHU

Na rys. 1 przedstawiono wyidealizowany model linii wałów na statku. Jest to nieważki wał przewieszony, obciążony na końcu tarczą odpowiadającą w układzie rzeczywistym śrubie napędowej. Odkształcony wał obraca się wokół własnej osi  $z$  a ponadto wiruje wokół osi łożysk  $z_0$ . Jest to, jak wspomniano, ruch precesyjny.



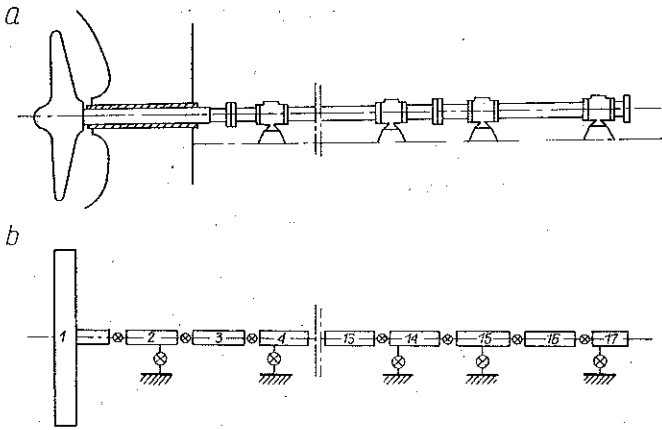
Rys. 1. Ruch precesyjny wału przewieszonego

Jeżeli prędkości kątowe obrotu własnego wału i wirowania jego odkształconej osi są równe, to zachodzi przypadek precesji synchronicznej. Ma on miejsce dla rozpatrywanego zagadnienia drgań obrotowych wałów okrętowych [8]. Środek masy tarczy porusza się po torze kołowym w przypadku łożysk izotropowych (precesja kołowa) lub w przypadku łożysk anizotropowych — po elipsie (precesja eliptyczna). Jeżeli kierunek precesji i obrotu własnego wału są zgodne, to zachodzi przypadek precesji współbieżnej, jeżeli przeciwne, precesji przeciwbieżnej. Należy zaznaczyć, że ten ostatni przypadek ruchu występuje

rzadko i do niedawna wśród badaczy istniały kontrowersyjne opinie co do jego istnienia [12 i 13]. Ulepszone metody pomiarowe pozwoliły na doświadczalne stwierdzenia występowania precesji przeciwbieżnej dla wirników turbin gazowych [12]. W dostępnej literaturze autor nie natrafił na doświadczalne potwierdzenie jej występowania dla okrętowych wałów napędowych.

### 2.1. Model obliczeniowy

Rysunek 2 przedstawia linię wałów na statku, a poniżej jej model obliczeniowy sporządzony na podstawie metody sztywnych elementów skończonych. Powstał on z podziału ciągłego wału na sztywne elementy, połączone między sobą i ostoją elementami o własnościach sprężysto-tłumiących. Zasadę podziału oraz sposób wyznaczania parametrów układu opisano wyczerpująco w pracach [9 i 10].



Rys. 2. Okrętowy wał napędowy: a) układ rzeczywisty, b) model obliczeniowy

Zakładamy, że masa elementów sprężysto-tłumiących jest pomijalnie mała, a charakterystyki są liniowe. Z każdym elementem sztywnym i sprężysto-tłumiącym związane są niezależne, nieruchome układy odniesienia o osiach odpowiednio równoległych. Oznaczamy je przez  $x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}$  (gdzie  $r$  oznacza numer sztywnego elementu skończonego) oraz  $y_{k1}, y_{k2}, y_{k3}$  (gdzie  $k$  oznacza numer elementu sprężysto-tłumiącego). Układ osi związanych ze sztywnym elementem pokrywa się w stanie równowagi układu z jego głównymi osiami bezwładności, podobnie jak układ osi związanych z elementem sprężysto-tłumiącym z jego głównymi osiami deformacji. W ogólnym przypadku każdy element skończony ma sześć stopni swobody, trzy translacyjne wzdłuż osi  $x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}$  i trzy rotacyjne wokół tych osi. Ponieważ rozpatrywany jest przypadek drgań obrotowych wału z pominięciem sprzężeń drgań giętych z drganiami wzdłużnymi i skrętnymi, można pominąć przemieszczenia elementu skończonego w kierunku osi  $x_{r1}$  oraz obroty wokół tej osi. Zatem każdy sztywny element skończony będzie miał cztery stopnie swobody, odpowiadające przemieszczeniom środka

masy w kierunku osi  $x_{r2}$  i  $x_{r3}$  i obrotom wokół tych osi. Przemieszczenia te zostaną przyjęte za współrzędne uogólnione i oznaczone przez  $u_{r2}$ ,  $u_{r3}$ ,  $u_{r5}$ ,  $u_{r6}$ . Wobec powyższego cały układ ma  $n=4u$  stopni swobody.

Uwaga: wszystkie oznaczenia są zgodne z oznaczeniami przyjętymi w pracy [10].

## 2.2. Równania ruchu

Równania różniczkowe ruchu dla opisanego modelu mogą być wyprowadzone z równań Lagrange'a dla małych drgań. W zapisie macierzowym sprowadzają się do postaci

$$(2.1) \quad M\ddot{u} + L\dot{u} + Ku = h,$$

gdzie  $M$  oznacza macierz mas uogólnionych,  $L$  macierz tłumienia,  $K$  macierz sztywności oraz  $h$  wektor sił uogólnionych. Postać oraz sposób tworzenia macierzy  $M$ ,  $K$  i  $L$  zostały szczegółowo opisane w pracach [9 i 10].

Uogólniony wektor sił można przedstawić w postaci

$$(2.2) \quad h = f + g,$$

gdzie  $f$  oznacza wektor sił uogólnionych zależnych wprost od czasu oraz  $g$  wektor uogólnionych sił giroskopowych zależnych od prędkości.

Wektor  $f$  utworzony jest z bloków sił uogólnionych, działających na poszczególne elementy skończone. Można go zatem zapisać w postaci

$$(2.3) \quad f = \text{col} \{f_r\} = \text{col} \{f_i\}, \quad r = 1, 2, \dots, u, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Oczywiście wymiar bloku  $\{f_r\}$  jest równy liczbie współrzędnych uogólnionych odpowiadającego mu elementu skończonego, zatem będzie to blok o wymiarze  $4 \times 1$ . Siły uogólnione, reprezentowane przez wektor  $f$ , mogą pochodzić np. od niewyważenia wału. Mogą to być również okresowe siły zewnętrzne, np. działające na śrubę napędową wymuszenia hydrodynamiczne.

W związku z tym, że wał wykonuje drgania obrotowe, na każdy sztywny element skończony działa moment od sił giroskopowych, który po rozłożeniu na kierunki  $x_{r5}$  i  $x_{r6}$  wyraża się wzorami

$$(2.4) \quad g_{r5} = J_r \omega \dot{u}_{r6}, \quad g_{r6} = -J_r \omega \dot{u}_{r5},$$

gdzie  $J_r$  oznacza osiowy masowy moment bezwładności  $r$ -tego SES oraz  $\omega$  prędkość kątową obrotów własnych wału.

Wobec tego blok sił giroskopowych odpowiadający  $r$ -temu SES ma postać

$$(2.5) \quad g_r = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_r \omega \dot{u}_{r6} \\ -J_r \omega \dot{u}_{r5} \end{Bmatrix},$$

a wektor uogólnionych sił giroskopowych działających na cały układ

$$(2.6) \quad g = \text{col} \{g_r\} = \text{col} \{g_i\}, \quad r = 1, 2, \dots, u, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$



Jak widać, macierz  $\mathbf{G}$  jest skośnie symetryczną macierzą kwadratową. Składa się z bloków o wymiarach  $4 \times 4$ , które leżą na głównej przekątnej. Bloki te odpowiadają poszczególnym elementom skończonym. Wstawiając (2.11) do (2.1) otrzymujemy ostateczną postać różniczkowych równań ruchu w postaci macierzowej, opisujących wymuszone drgania obrotowe wału przedstawionego na rys. 2:

$$(2.13) \quad \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + (\mathbf{L} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

Zagadnienie drgań wymuszonych w postaci (2.13) sprowadzamy do rozwiązania układu równań w zbiorze liczb zespolonych:

$$(2.14) \quad [\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2 + j\omega(\mathbf{L} + \mathbf{G})] \mathbf{u}(j\omega) = \mathbf{f}(j\omega),$$

gdzie  $j$  oznacza jednostkę urojoną.

Dla poszczególnych częstości wymuszeń, np. związanych z niewyważeniem wału, znajdujemy zespolony wektor przemieszczeń  $\mathbf{u}(j\omega)$ , który można przedstawić w postaci

$$(2.15) \quad \mathbf{u}(j\omega) = \text{Re } \mathbf{u}(j\omega) + j \text{Im } \mathbf{u}(j\omega).$$

Amplitudę drgań w kierunku  $i$ -tej współrzędnej uogólnionej oblicza się wtedy z zależności

$$(2.16) \quad u_i^0 = \sqrt{[\text{Re } u_i(j\omega)]^2 + [\text{Im } u_i(j\omega)]^2}.$$

W ten sposób dla danej częstości siły wymuszającej znajdujemy przemieszczenie dowolnego elementu skończonego w wybranym kierunku. Pozwala to w końcowym rezultacie na sporządzenie krzywej rezonansowej z uwzględnieniem efektów giroskopowych, a tym samym określenie częstości krytycznych.

### 3. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Opierając się na podanej wyżej metodzie, opracowano program w języku Fortran IV na komputer ICL systemu IV, pozwalający na wykonanie obliczeń dla rzeczywistych wałów napędowych. Pominiemy szczegółowy opis przygotowania danych, który można znaleźć w pracy [9], a ograniczymy się do podania informacji o parametrach liczbowych układu oraz założeniach, przy których wykonano obliczenia.

Ze względu na niewielkie prędkości obrotowe założono, że wystarczy uwzględnić efekt giroskopowy pochodzący jedynie od śruby napędowej, która charakteryzuje się dużym masowym momentem bezwładności — aczkolwiek w programie istnieje możliwość uwzględnienia efektu giroskopowego od wszystkich wirujących elementów. Pominięto tłumienie oraz przyjęto izotropowe własności łożysk i samego wału, chociaż z punktu widzenia metody i programu nie jest to konieczne.

Cały wał podzielono na 17 sztywnych elementów skończonych (rys. 2b). Masy, uogólnione elementów zestawiono w tabelicy 1, a sztywności elementów sprężystych, łączących sztywne elementy między sobą i ostoją, w tabelicy 2.

W pierwszej i drugiej kolumnie tabelicy 2 podano numery sztywnych elementów skończonych, między którymi znajduje się dany element sprężysty. Kolumna trzecia

zawiera liczbę określającą ilość elementów sprężystych o takich samych współczynnikach sztywności i współrzędnych zamocowania do elementów sztywnych.

W przypadku, gdy element sprężysty łączy element sztywny z ostoją, w kolumnie drugiej powtórzono liczbę z kolumny pierwszej. W kolumnie czwartej podano współczynniki sprężystości translacyjnej, a w piątej rotacyjnej. Wreszcie w kolumnie szóstej i siódmej podano współrzędne zamocowania elementu sprężystego w układzie lewego i prawego sztywnego elementu skończonego.

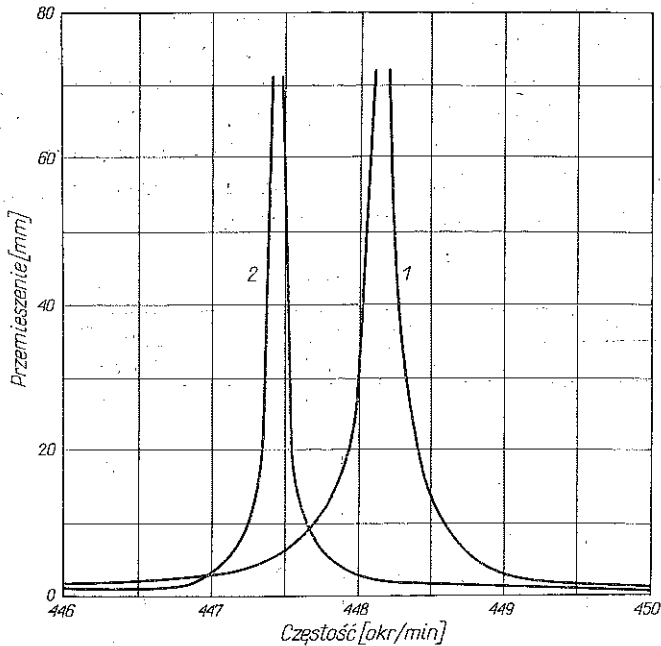
Tablica 1

Nr SES	$m_{r2} = m_{r3}$	$m_{r5} = m_{r6}$
	[kGcm <sup>-1</sup> s <sup>2</sup> ]	[kGcm s <sup>2</sup> ]
1	4,2970	14554
2	2,2700	136
3	0,3370	124
4	}	150
⋮		
10		
11		
11	0,3904	163
12	0,3109	130
13	0,1763	31
14	0,7573	447
15	0,0754	110
16	0,5627	186
17	0,9205	753

Tablica 2

r	p	l	$C_{k2} = C_{k3} \cdot 10^8$	$C_{k5} = C_{k6} \cdot 10^{10}$	$S_{rk}$	$S_{pk}$
			[kG/cm]			
1	2	1	0,300	0,432	23,6	-35,0
2	3	1	0,113	0,162	30,0	-32,4
3	4	1	0,113	0,144	32,5	-30,0
4	5	7	0,107	0,138	32,5	-32,5
11	12	1	0,103	0,133	31,2	-32,5
12	13	1	0,106	0,118	19,5	-33,8
13	14	1	0,095	0,075	12,5	-17,2
14	15	1	0,039	0,083	32,5	-28,2
15	16	1	0,023	0,051	40,0	-32,5
16	17	1	0,108	0,145	54,4	-25,0
2	2	1	0,194	0	0	0
16	16	1	2,340	3,420	0	0

Wynik obliczeń został przedstawiony na rys. 3 w postaci krzywej rezonansowej, pozwalającej na określenie pierwszej prędkości krytycznej obliczanego wału z uwzględnieniem efektu giroskopowego od śruby (wykres 1). Dla porównania naniesiono również krzywą rezonansową dla tego samego układu z pominięciem efektu giroskopowego (wykres 2).



Rys. 3. Krzywa rezonansowa dla wału: 1 — z uwzględnieniem efektu giroskopowego, 2 — bez efektu giroskopowego

#### 4. WNIOSKI

1. Przedstawiona metoda pozwala na obliczanie krytycznych częstości drgań giętnych okrętowych wałów napędowych, podpartych sprężysto w łożyskach, z uwzględnieniem efektów giroskopowych oraz tłumienia wewnętrznego i zewnętrznego.

2. Metoda stwarza możliwości dalszego rozbudowania modelu obliczeniowego, uwzględniającego np. wpływ dna podwójnego i sprzężenia drgań giętnych ze wzdłużnymi i skrętnymi.

3. Metoda została zaprogramowana na komputer, co sprawia, że korzystanie z niej jest bardzo wygodne. Znalazła zastosowanie w biurach konstrukcyjnych przemysłu okrętowego.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. A. BIRGER, B. F. SZOPP, SZNEJDIEROWICZ, *Rascziet na procznost dietalej maszin*, Izd. Maszinostr., Moskwa 1966.
2. R. H. CANNON jr, *Dynamika układów fizycznych*, Wyd. Nauk.-Techn., Warszawa 1973.
3. D. W. CHRONIN, *Tieoria i rascziet koliebanij w dwigateljach lietatelnych apparatow*, Izd. Maszinostr., Moskwa 1970.
4. F. M. DIMERTBIERG, *Izhibnyje koliebanija wraszczajuszczichsja wałow*, Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskwa 1959.



5. W. R. FOOTE, H. PORITZKY, J. J. SLADE, *Critical speeds of a rotor with unequal shaft flexibilities, mounted in bearings of unequal flexibility*, J. Appl. Mech., **10**, 2, 1943.
6. W. GAWROŃSKI, J. KRUSZEWSKI, *Aanaliza drgań wymuszonych złożonych układów liniowych metodą sztywnych elementów skończonych*, Arch. Bud. Masz., **4**, 1972.
7. J. GENIN, J. MAYBEE, *Whirling motion of a viscoelastic continuous shaft*, Int. J. Enging. Sci., **8**, 1970.
8. N. H. JASPER, *A design approach to the problem of critical whirling speeds of shaft — disk systems*, DTMB Report 890, 1954.
9. J. KRUSZEWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych w zastosowaniu do obliczeń częstości drgań własnych złożonych układów liniowych*, Zesz. Nauk. Pol. Gdańskiej, Mechanika, **12**, 1971.
10. J. KRUSZEWSKI, W. GAWROŃSKI, E. WITTBRODT, *Metoda sztywnych elementów skończonych w obliczeniach konstrukcji okrętowych*, Rozpr. Inż., **22**, 3, 1974.
11. R. ŁĄCZKOWSKI, *Metoda obliczania krytycznych prędkości obrotowych wirników przewieszonych*, Technika Lotnicza i Astronautyczna, **1**, 1969.
12. R. ŁĄCZKOWSKI, *Dynamika wirników przewieszonych*, Przegląd Mechaniczny, **12**, 1973.
13. P. T. PEDERSEN, *On forward and backward precession of rotors*, Ing. Archiv, **42**, 1972.
14. G. SCHWEITZER, W. SCHIEHLEN, P. C. MÜLLER, W. HÜBNER, J. LÜCKEL, G. SANDWEG, R. LAUTENSCHLAGER, *Kreiselverhalten eines elastisch gelagerten Rotors*, Ing. Archiv, **41**, 1972.
15. J. TARNOWSKI, W. GAWROŃSKI, *Uwzględnienie efektów giroskopowych przy obliczaniu drgań giętnych okrętowych wałów napędowych*, Materiały sympozjum pt. «Metody numeryczne w mechanice», Gdańsk 1972.
16. J. KOŹEŚNIK, *Dynamika maszyn*, Wyd. Nauk.-Techn., Warszawa 1963.
17. G. ZEGLER, *Osnowy teorii ustożczowości konstrukcji*, Izd. Mir, Moskwa 1971.

## Резюме

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЖЕСТКИХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
ДЛЯ РАСЧЕТА КОЛЕБАНИЙ СУДОВЫХ ВАЛОВ С УЧЕТОМ  
ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ**

В работе предложен метод расчета изгибных колебаний судовых приводных валов с учетом гироскопических эффектов. Расчетная модель основана на методе жестких конечных элементов. Разработана расчетная программа на ЭВЦМ, позволяющая удобно пользоваться методом.

## SUMMARY

**APPLICATION OF THE METHOD OF STIFF ELEMENTS TO THE CALCULATION OF  
NAVAL TRANSMISSION SHAFTS, GYROSCOPIC EFFECTS BEING TAKEN INTO  
CONSIDERATION**

A method of calculation of bending vibrations of naval transmission shafts is proposed in the paper, gyroscopic effects being taken into consideration. The calculations are based on a theoretical model consisting of stiff finite elements. Corresponding programs for digital computers are presented.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 1 marca 1973 r.*