

NAPRĘŻENIA TERMICZNE W PÓŁPRZESTRZENI SPRĘŻYSTEJ WYWOŁANE RUCHOMYM ŹRÓDŁEM CIEPŁA

JÓZEF KUBIK (POZNAŃ)

1. WSTĘP

W pracy rozważymy działanie ruchomego, liniowego źródła ciepła w półprzestrzeni sprężystej. Wyznamy pole temperatury i naprężeń dla przypadku, kiedy źródło ciepła $Q = Q_0 \delta [vt - (y - \xi)] \eta(t) \delta(x)$ porusza się w kierunku prostopadłym do brzegu półprzestrzeni ze stałą prędkością v .

Wyznaczaniem naprężeń cieplnych, wywołanych działaniem ruchomych źródeł ciepła, zajmowali się następujący autorzy: W. NOWACKI [6, 7 i 8], E. MELAN [4], H. PARKUS [9], D. ROSENTHAL [10], Z. SOBECZYŃSKA [16], M. ŻÓRAWSKI [17]. Podali oni rozwiązania dla pól temperatury i naprężeń dla przypadku ruchomych źródeł punktowych i liniowych działających w przestrzeni i półprzestrzeni sprężystej.

Wymienieni autorzy wyznaczyli rozwiązania stosując zazwyczaj ruchomy układ współrzędnych kartezjańskich, związany z poruszającym się źródłem ciepła, pomijali przy tym (z wyjątkiem prac [8, 16 i 17]) w równaniu przewodnictwa cieplnego pochodną lokalną temperatury względem czasu, pozostawiając jedynie wyraz konwekcyjny. W konsekwencji oznacza to, że pole temperatury w ruchomym układzie współrzędnych jest traktowane jako pole stacjonarne.

Na oddzielną uwagę zasługuje praca M. ŻÓRAWSKIEGO [17], który wyznaczył pole naprężeń dla płaskiego ruchomego źródła ciepła w przestrzeni lepkosprężystej, traktując zagadnienie jako dynamiczne.

Należy nadmienić, że wyznaczaniem pól temperatury w elementach sprężystych, wywołanych ruchomym obciążeniem termicznym, zajmował się T. ROŻNOWSKI w pracach [11, 12 i 13].

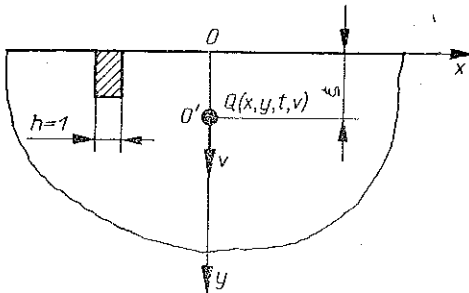
W niniejszej pracy w odróżnieniu od cytowanych wyżej wyznaczmy naprężenia termiczne w półprzestrzeni sprężystej, wywołane ruchomym liniowym źródłem ciepła. Stosować będziemy konsekwentnie nieruchomy układ współrzędnych, związany z rozważaną półprzestrzenią, przy czym pole temperatury będzie nieustalone.

OZNACZENIA

- α_t współczynnik liniowej rozszerzalności termicznej,
 δ_{ij} symbol Kroneckera,
 $\delta(\xi)$ funkcja Diraca,
 ε_{ij} współrzędne tensora odkształcenia,
 ε_{11} dylatacja,
 $\eta(\xi)$ funkcja Heaviside'a,
 G moduł odkształcenia postaciowego,
 κ współczynnik przewodzenia temperatury,
 λ stała Lamégo,
 ν współczynnik Poissona,
 ∇^2 operator Laplace'a,
 ρ gęstość,
 s parametr transformacji Laplace'a,
 σ_{ij} współrzędne tensora naprężenia,
 t czas,
 T temperatura względna, liczona od temperatury stanu beznapężeniowego,
 u_i współrzędne wektora przemieszczenia,
 x_i lub x, y, z współrzędne kartezjańskie,
 Q intensywność działania źródła ciepła.

1. SFORMULOWANIE ZAGADNIENIA

Rozważmy działanie ruchomego, liniowego źródła ciepła w półprzestrzeni sprężystej, poruszającego się w kierunku prostopadłym do brzegu półprzestrzeni, co odpowiada problemowi termosprężystości w płaskim stanie odkształcenia. W tym przypadku pole temperatury jest funkcją dwóch zmiennych miejsca i czasu, a stan naprężenia określają współrzędne $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{zz}$. Stan odkształcenia opisują wielkości $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$, a przemieszczenia charakteryzowane są współrzędnymi u_x i u_y .



Rys. 1

Rysunek 1 przedstawia płaszczyznę przekroju półprzestrzeni ($z = \text{const}$), w której porusza się źródło ciepła $Q(x, y, t; v)$ ze stałą prędkością v wzdłuż osi y . Źródło ciepła

rozpoczyna ruch z punktu O' (z odległości ξ od brzegu półprzestrzeni). Intensywność działania źródła określa wzór

$$(1.1) \quad Q(x, y, t; v) = Q_0 \delta(vt - \bar{y}) \delta(x) \eta(t), \quad \bar{y} = y - \xi,$$

gdzie $\delta(u)$ jest funkcją Diraca, a $\eta(t)$ funkcją Heaviside'a.

Poszukiwać będziemy rozwiązań dla pola temperatury i naprężeń w rozważanej półprzestrzeni. Zakładamy przy tym, że prędkość v jest mała i zagadnienie traktujemy

jako quasi-statyczne. Przyjmujemy, że materiał półprzestrzeni jest izotropowy i doskonale sprężysty, a jego parametry fizyczne nie zależą od temperatury. Założymy ponadto, że na brzegu półprzestrzeni temperatura $T(x, t; v) = 0$.

W celu określenia pola temperatury i naprężeń w półprzestrzeni rozwiązać należy układ równań teorii naprężeń cieplnych, złożony z równania przewodnictwa cieplnego oraz równań przemieszczeniowych, który w przypadku płaskiego stanu odkształcenia ma postać

$$(1.2) \quad \nabla^2 T - \frac{1}{\kappa} \dot{T} = -\frac{Q}{\kappa},$$

$$(1.3) \quad \begin{aligned} &GV^2 u_i + (\lambda + G) \partial_i \varepsilon_u - (3\lambda + 2G) \alpha_i \partial_i T = 0, \\ &\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial i}, \quad i, l = x, y \end{aligned}$$

z następującymi warunkami początkowymi i brzegowymi:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} T(x, y, t; v) &= 0, \\ T(x, t; v) &= 0, \\ \sigma_{yy}(x, t; v) &= 0, \\ \sigma_{xy}(x, t; v) &= 0. \end{aligned}$$

Ponadto otrzymane rozwiązania dla $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$ muszą być ograniczone, czyli

$$(1.5) \quad \begin{aligned} [T(x, y, t; v)]_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} &\rightarrow 0, \\ [\sigma_{ij}(x, y, t; v)]_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} &\rightarrow 0, \quad i, j = x, y \end{aligned}$$

oraz

$$[\sigma_{zz}(x, y, t; v)]_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \rightarrow 0.$$

2. POLE TEMPERATURY

Dla wyznaczenia pola temperatury w półprzestrzeni sprężystej wykorzystamy metodę superpozycji rozwiązań dla temperatur T_1 i T_2 w przestrzeni nieograniczonej, wywołanych źródłami ciepła (dodatnim Q_1 i ujemnym Q_2) poruszającymi się w przeciwnym kierunku lecz z tą samą prędkością.

Funkcje T_1 i T_2 są odpowiednio rozwiązaniami równań przewodnictwa cieplnego:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \nabla^2 T_1 - \frac{1}{\kappa} \dot{T}_1 &= -\frac{Q_0}{\kappa} \delta(x) \delta(vt - \bar{y}) \eta(t), \quad \bar{y} = y - \xi, \\ \nabla^2 T_2 - \frac{1}{\kappa} \dot{T}_2 &= -\frac{Q_0}{\kappa} \delta(x) \delta(vt + \bar{y}) \eta(t), \quad \bar{y} = y + \xi. \end{aligned}$$

Rozwiązania równań (2.1) otrzymamy wykorzystując metodę rozdzielania zmiennych oraz całkowe przekształcenie Fouriera funkcji Diraca w następującej postaci [15]:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \delta(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \alpha x \, d\alpha, \\ \delta(vt - \bar{y}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta(\bar{y} - vt)} \, d\beta, \quad \bar{y} = y - \xi, \\ \delta(vt + \bar{y}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta(\bar{y} + vt)} \, d\beta, \quad \bar{y} = y + \xi. \end{aligned}$$

Wobec oczywistości stosowanej metody do rozwiązania równań (2.1) poprzestajemy na podaniu wyniku dla pola temperatury w półprzestrzeni sprężystej, który ma postać

$$(2.3) \quad \begin{aligned} T(x, y, t; v) &= T_1 + T_2 = \\ &= \frac{Q_0}{2\pi^2 \kappa} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \frac{i\beta v}{\kappa}} [e^{-i\beta vt} - e^{-\kappa(\alpha^2 + \beta^2)t}] e^{-i\beta \bar{y}} \cos \alpha x \, d\alpha \, d\beta - \\ &- \frac{Q_0}{2\pi^2 \kappa} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 - \frac{i\beta v}{\kappa}} [e^{-i\beta vt} - e^{-\kappa(\alpha^2 + \beta^2)t}] e^{-i\beta \bar{y}^+} \cos \alpha x \, d\alpha \, d\beta. \end{aligned}$$

Wykonując całkowanie we wzorze (2.3), opierając się na tablicy [2], otrzymamy temperaturę w postaci

$$(2.4) \quad T(x, y, t; v) = \frac{Q_0}{4\pi\kappa} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)} \left\{ e^{-\frac{x^2 + (\bar{y} - v\tau)^2}{4\kappa(t-\tau)}} - e^{-\frac{x^2 - (\bar{y} + v\tau)^2}{4\kappa(t-\tau)}} \right\} d\tau,$$

która, jak nie trudno wykazać, czyni zadość warunkom początkowym i brzegowym (1.4)_{1,2} i (1.5)₁.

Analiza wzoru (2.4) pozwala stwierdzić, że temperatura wywołana działaniem ruchomego źródła ciepła jest wielkością ograniczoną w całym obszarze rozważanej półprzestrzeni z wyjątkiem miejsca, w którym znajduje się źródło, gdzie posiada osobliwość typu logarytmicznego.

3. POLE NAPRĘŻEŃ

Współrzędne stanu naprężenia wyznaczmy na podstawie potencjału termosprężystego przemieszczenia, który z naprężeniami związany jest zależnościami [7]:

$$(3.1) \quad \bar{\sigma}_{ij} = 2G(\partial_i \partial_j - \delta_{ij} \nabla^2) \Phi, \quad i, j = x, y,$$

oraz

$$\bar{\sigma}_{zz} = -2G\nabla^2 \Phi,$$

przy czym funkcja potencjału Φ zdefiniowana jest wzorami

$$(3.2) \quad \bar{u}_i = \partial_i \Phi, \quad i = x, y.$$

Jak widać, musimy najpierw wyznaczyć funkcję potencjału Φ .

Podstawiając funkcje (3.2) do równań przemieszczeniowych (1.3) otrzymujemy równanie Poissona (3.3), wiążące funkcję potencjału z funkcją temperatury:

$$(3.3) \quad \nabla^2 \Phi = \vartheta_0 T, \quad \vartheta_0 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_t.$$

Wykorzystując wzór na temperaturę (2.3), rozwiązanie równania (3.3) otrzymamy w postaci

$$(3.4) \quad \Phi = -\frac{Q_0 \vartheta_0}{\pi^2} \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-\kappa(\alpha^2 + \beta^2)\tau}}{\alpha^2 + \beta^2} \cos \alpha x \cos \beta [\bar{y} - v(t - \tau)] d\tau d\alpha d\beta + \\ + \frac{Q_0 \vartheta_0}{\pi^2} \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-\kappa(\alpha^2 + \beta^2)\tau}}{\alpha^2 + \beta^2} \cos \alpha x \cos \beta [\bar{y} + v(t - \tau)] d\tau d\alpha d\beta.$$

Znajomość potencjału pozwala na wyznaczenie współrzędnych stanu naprężenia zgodnie z zależnościami (3.1). Po wykonaniu odpowiedniego różniczkowania, a następnie całkowania, poszukiwane naprężenia $\bar{\sigma}_{ij}$ otrzymamy

$$(3.5) \quad \bar{\sigma}_{xx}(x, y, t; v) = \frac{2A}{v} \left[\frac{\bar{y} - vt}{x^2 + (\bar{y} - vt)^2} - \frac{\bar{y}}{x^2 + \bar{y}^2} + \frac{\bar{y} + vt}{x^2 + (\bar{y} + vt)^2} - \frac{\bar{y}}{x^2 + \bar{y}^2} \right] + \\ + \frac{A}{2\kappa v} \int_0^t \frac{\bar{y}}{(t - \tau)^2} e^{-\frac{x^2 + \bar{y}^2}{4\kappa(t - \tau)}} d\tau - \frac{A}{2\kappa v} \int_0^t \frac{\bar{y} - v\tau}{(t - \tau)^2} e^{-\frac{x^2 + (\bar{y} - v\tau)^2}{4\kappa(t - \tau)}} d\tau + \\ + \frac{A}{2\kappa v} \int_0^t \frac{\bar{y}}{(t - \tau)^2} e^{-\frac{x^2 + \bar{y}^2}{4\kappa(t - \tau)}} d\tau - \frac{A}{2\kappa v} \int_0^t \frac{\bar{y} + v\tau}{(t - \tau)^2} e^{-\frac{x^2 + (\bar{y} + v\tau)^2}{4\kappa(t - \tau)}} d\tau;$$

$$(3.6) \quad \bar{\sigma}_{yy}(x, y, t; v) = \frac{2A}{v} \left[\frac{\bar{y}}{x^2 + \bar{y}^2} + \frac{\bar{y}}{x^2 + \bar{y}^2} - \frac{\bar{y} - vt}{x^2 + (\bar{y} - vt)^2} - \frac{\bar{y} + vt}{x^2 + (\bar{y} + vt)^2} \right] + \\ + \frac{A}{2v} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \int_0^t \frac{1}{(t - \tau)^{3/2}} \{ \Psi_1(x, y, \tau) + \Psi_2(x, y, \tau) \} d\tau - \\ - \frac{Ax^2}{4v} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \int_0^t \frac{1}{(t - \tau)^{5/2}} \{ \Psi_1(x, y, v) + \Psi_2(x, y, \tau) \} d\tau,$$

$$(3.7) \quad \bar{\sigma}_{xy}(x, y, t; v) = \frac{2A}{v} \left[\frac{x}{x^2 + \bar{y}^2} - \frac{x}{x^2 + (\bar{y} - vt)^2} + \frac{x}{x^2 + \bar{y}^2} - \frac{x}{x^2 + (\bar{y} + vt)^2} \right] -$$

$$- \frac{A}{2\kappa v} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{x^2 + \bar{y}^2}{4\kappa(t-\tau)}} d\tau - \frac{A}{2\kappa v} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{x^2 + \bar{y}^2}{4\kappa(t-\tau)}} d\tau +$$

$$+ \frac{A}{2\kappa v} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{x^2 + (\bar{y} - vt)^2}{4\kappa(t-\tau)}} d\tau + \frac{A}{2\kappa v} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{x^2 + (\bar{y} + vt)^2}{4\kappa(t-\tau)}} d\tau$$

oraz

$$(3.8) \quad \bar{\sigma}_{zz} = \bar{\sigma}_{xx} + \bar{\sigma}_{yy} = \frac{2A}{v} \left[\frac{\bar{y} - vt}{x^2 + (\bar{y} - vt)^2} + \frac{\bar{y} + vt}{x^2 + (\bar{y} + vt)^2} \right] +$$

$$+ \frac{A}{2\kappa v} \int_0^t \frac{\bar{y}}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{x^2 + \bar{y}^2}{4\kappa(t-\tau)}} d\tau - \frac{A}{2\kappa v} \int_0^t \frac{\bar{y} - vt}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{x^2 + (\bar{y} - vt)^2}{4\kappa(t-\tau)}} d\tau +$$

$$+ \frac{A}{2\kappa v} \int_0^t \frac{\bar{y}}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{x^2 + \bar{y}^2}{4\kappa(t-\tau)}} d\tau - \frac{A}{2\kappa v} \int_0^t \frac{\bar{y} + vt}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{x^2 + (\bar{y} + vt)^2}{4\kappa(t-\tau)}} d\tau +$$

$$+ \frac{A}{2v} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} \{ \Psi_1(x, y, \tau) + \Psi_2(x, y, \tau) \} d\tau -$$

$$- \frac{Ax^2}{4v} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{5/2}} \{ \Psi_1(x, y, \tau) + \Psi_2(x, y, \tau) \} d\tau,$$

$$A = \frac{GQ_0 \vartheta_0}{2\pi}, \quad \bar{y} = y - \xi, \quad \bar{y} = y + \xi,$$

$$\Psi_1(x, y, \tau) = e^{-\frac{x^2}{4\kappa(t-\tau)}} \left[\operatorname{erfc} \frac{\bar{y} - vt}{2\sqrt{\kappa(t-\tau)}} - \operatorname{erfc} \frac{\bar{y}}{2\sqrt{\kappa(t-\tau)}} \right],$$

$$\Psi_2(x, y, \tau) = e^{-\frac{x^2}{4\kappa(t-\tau)}} \left[\operatorname{erfc} \frac{\bar{y} + vt}{2\sqrt{\kappa(t-\tau)}} - \operatorname{erfc} \frac{\bar{y}}{2\sqrt{\kappa(t-\tau)}} \right].$$

Łatwo stwierdzić, że otrzymane naprężenia (3.5) – (3.8) nie spełniają wymaganych warunków brzegowych, gdyż na brzegu różne od zera są naprężenia $\bar{\sigma}_{xy}$ i wynoszą

$$[\bar{\sigma}_{xy}]_{y=0} = \frac{4A}{v} \left[\frac{x}{x^2 + \xi^2} - \frac{x}{x^2 + (\xi + vt)^2} \right] -$$

$$- \frac{A}{\kappa v} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^2} \left[e^{-\frac{x^2 + \xi^2}{4\kappa(t-\tau)}} - e^{-\frac{x^2 + (\xi + vt)^2}{4\kappa(t-\tau)}} \right] d\tau.$$

Celem spełnienia warunków brzegowych (1.4)_{3,4} musimy do współrzędnych stanu naprężenia $\bar{\sigma}_{ij}$ określonych funkcją potencjału Φ dodać naprężenia $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ tak dobrane, aby na brzegu tarczy spełnione były warunki

$$(3.9) \quad [\bar{\sigma}_{xy} + \bar{\bar{\sigma}}_{xy}]_{y=0} = 0, \quad [\bar{\sigma}_{yy} + \bar{\bar{\sigma}}_{yy}]_{y=0} = 0.$$

Naprężenia $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ możemy wyrazić za pomocą funkcji przemieszczeń Galerkina χ_i , które z naprężeniami związane są związkami [7]

$$(3.10) \quad \bar{\bar{\sigma}}_{ij} = \frac{2G}{1-2\nu} [(v\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j)\partial_k\chi_k + (1-\nu)\nabla^2(\partial_j\chi_i + \partial_i\chi_j)],$$

przy czym $\nabla^2\nabla^2\chi_i = 0$.

Takie postępowanie jest równoznaczne z dodaniem do rozwiązania niejednorodnego układu równań przemieszczeniowych (1.3), wyrażonego za pomocą potencjału termosprężystego przemieszczenia, rozwiązania jednorodnego układu równań:

$$G\nabla^2 u_i + (\lambda + G)\partial_i \varepsilon_{ii} = 0, \quad i, l = x, y$$

z warunkami brzegowymi (3.9).

Ponieważ rozważamy zagadnienie dwuwymiarowe, przeto funkcje Galerkina przyjęto w postaci

$$(3.11) \quad \chi_1 = \chi = \int_0^\infty [C(\alpha) + \alpha y D(\alpha)] e^{-\alpha y} \sin \alpha x d\alpha, \quad \chi_2 = \chi_3 = 0,$$

gdzie $C(\alpha)$ i $D(\alpha)$ są chwilowo nie znanymi funkcjami parametru α , które wyznaczymy z warunków (3.9).

Po wykorzystaniu związków (3.10), wyrażenia (3.11) oraz warunków (3.9) funkcję Galerkina otrzymamy w postaci

$$\begin{aligned} \chi = & -\frac{4Q_0 \vartheta_0}{\pi^2} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta}{\alpha^2} \frac{e^{-\kappa(\alpha^2+\beta^2)\tau-\alpha y}}{\alpha^2+\beta^2} \times \\ & \times \sin \alpha x \sin \beta [\xi + v(t-\tau)] d\tau d\alpha d\beta - \\ & -\frac{2Q_0 \vartheta_0}{\pi^2} y(1-2\nu) \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta}{\alpha} \frac{e^{-\kappa(\alpha^2+\beta^2)\tau-\alpha y}}{\alpha^2+\beta^2} \sin \alpha x \sin \beta [\xi + v(t-\tau)] d\tau d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

Podstawiając tak otrzymaną funkcję Galerkina do związków (3.10), wykonując odpowiednie różniczkowanie a następnie całkowanie, otrzymamy poszukiwane naprężenia:

$$(3.12) \quad \bar{\bar{\sigma}}_{xx}(x, y, t; v) = \frac{\pi B}{v} \left[\frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{y+vt}{x^2 + (y+vt)^2} \right] + \\ + \frac{\pi B y}{2v} \left\{ \frac{1}{x^2 + (y+vt)^2} \cos \left[2 \arctg \left(\frac{x}{y+vt} \right) \right] - \frac{1}{x^2 + y^2} \cos \left[2 \arctg \left(\frac{x}{y} \right) \right] \right\} -$$

$$(3.12) \quad \underset{[c.d.]}{\bar{\sigma}} = -\frac{\pi B}{4v\sqrt{\pi\kappa}} \int_0^t \left\{ \varphi_1(x, y, \tau) D_{-2} \left[\frac{y-ix}{\sqrt{2\kappa(t-\tau)}} \right] + \varphi_2(x, y, \tau) D_{-2} \left[\frac{y+ix}{\sqrt{2\kappa(t-\tau)}} \right] \right\} d\tau +$$

$$+ \frac{B\pi y}{4\kappa v \sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left\{ \varphi_1(x, y, \tau) D_{-3} \left[\frac{y-ix}{\sqrt{2\kappa(t-\tau)}} \right] + \right.$$

$$\left. + \varphi_2(x, y, \tau) D_{-3} \left[\frac{y+ix}{\sqrt{2\kappa(t-\tau)}} \right] \right\} d\tau;$$

$$(3.13) \quad \bar{\sigma}_{yy}(x, y, t; v) = -\frac{\pi B y}{2v} \left\{ \frac{1}{x^2 + (y+vt)^2} \cos \left[2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{x}{y+vt} \right) \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{x^2 + y^2} \cos \left[2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{x}{y} \right) \right] \right\} - \frac{By\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2\kappa}v} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left\{ \varphi_1(x, y, \tau) \times \right.$$

$$\left. \times D_{-3} \left[\frac{y-ix}{\sqrt{2\kappa(t-\tau)}} \right] + \varphi_2(x, y, \tau) D_{-3} \left[\frac{y+ix}{\sqrt{2\kappa(t-\tau)}} \right] \right\} d\tau;$$

$$(3.14) \quad \bar{\sigma}_{xy}(x, y, t; v) = \frac{\pi B}{2v} \left[\frac{x}{x^2 + (y+vt)^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{\pi B y}{2v} \left\{ \frac{1}{x^2 + y^2} \sin \times \right. \right.$$

$$\left. \times \left[2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{x}{y} \right) \right] - \frac{1}{x^2 + (y+vt)^2} \sin \left[2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{x}{y+vt} \right) \right] \right\} -$$

$$- \frac{iB}{8v} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \int_0^t \left\{ \varphi_1(x, y, \tau) D_{-2} \left[\frac{y-ix}{\sqrt{2\kappa(t-\tau)}} \right] - \right.$$

$$\left. - \varphi_2(x, y, \tau) D_{-2} \left[\frac{y+ix}{\sqrt{2\kappa(t-\tau)}} \right] \right\} d\tau + \frac{iBy\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2\kappa}v} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left\{ \varphi_1(x, y, \tau) \times \right.$$

$$\left. \times D_{-3} \left[\frac{y-ix}{\sqrt{2\kappa(t-\tau)}} \right] - \varphi_2(x, y, \tau) D_{-3} \left[\frac{y+ix}{\sqrt{2\kappa(t-\tau)}} \right] \right\} d\tau,$$

$$(3.15) \quad \bar{\sigma}_{zz}(x, y, t; v) = \frac{\pi B}{v} \left[\frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{y+vt}{x^2 + (y+vt)^2} \right] - \frac{B\pi}{4v\sqrt{\pi\kappa}} \int_0^t \left\{ \varphi_1(x, y, \tau) \times \right.$$

$$\left. \times D_{-2} \left[\frac{y-ix}{\sqrt{2\kappa(t-\tau)}} \right] + \varphi_2(x, y, \tau) D_{-2} \left[\frac{y+ix}{\sqrt{2\kappa(t-\tau)}} \right] \right\} d\tau -$$

$$- \frac{By\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2\kappa}v} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left\{ \varphi_1(x, y, \tau) D_{-3} \left[\frac{y-ix}{\sqrt{2\kappa(t-\tau)}} \right] + \right.$$

$$\left. + \varphi_2(x, y, \tau) D_{-3} \left[\frac{y+ix}{\sqrt{2\kappa(t-\tau)}} \right] \right\} d\tau,$$

gdzie

$$\varphi_1(x, y, v) = \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} \left[e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa(t-\tau)}} e^{-\frac{(\xi+v\tau)^2}{4\kappa(t-\tau)}} \right] e^{\frac{(y-tx)^2}{8\kappa(t-\tau)}},$$

$$\varphi_2(x, y, \tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} \left[e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa(t-\tau)}} e^{-\frac{(\xi+v\tau)^2}{4\kappa(t-\tau)}} \right] e^{\frac{(y+tx)^2}{8\kappa(t-\tau)}},$$

$$B = \frac{4GQ_0 \vartheta_0}{\pi^2}.$$

Występujące we wzorach (3.12) – (3.15) funkcje $D_{-\nu}(z)$ są funkcjami walca parabolicznego. Stanowią one wraz z funkcjami $D_\nu(z)$ rozwiązanie równania różniczkowego

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} z^2 \right) f = 0.$$

Funkcje $D_{-\nu}(z)$ rzędu całkowitego, $\nu = 1, 2, 3, \dots$, można wyrazić przez dopełnienie funkcji błędu Krampa-Laplace'a. Mamy bowiem [1]

$$D_{-n-1}(z) = \sqrt{2} \frac{(-1)^n}{(n!)} e^{-\frac{z^2}{4}} \frac{d^n}{dz^n} \left[e^{\frac{z^2}{2}} \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{\sqrt{2}} \right) \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

gdzie

$$\operatorname{erfc} \left(\frac{z}{\sqrt{2}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{z/\sqrt{2}}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Całkowite naprężenia w półnieskończonej tarczy otrzymamy dodając do siebie odpowiednie współrzędne naprężeń, czyli

$$(3.16) \quad \sigma_{ij}(x, y, t; v) = \bar{\sigma}_{ij}(x, y, t; v) + \bar{\bar{\sigma}}_{ij}(x, y, t; v), \quad i, j = x, y$$

oraz

$$\sigma_{zz}(x, y, t; v) = \bar{\sigma}_{zz}(x, y, t; v) + \bar{\bar{\sigma}}_{zz}(x, y, t; v).$$

Łatwo wykazać, że otrzymane naprężenia σ_{ij} spełniają warunki brzegowe (1.4)_{3,4}. Dla sprawdzenia warunków (1.5)_{2,3} należy wykorzystać rozwinięcia asymptotyczne funkcji walca parabolicznego $D_{-\nu}(z)$ w postaci [14]

$$(3.17) \quad D_{-\nu}(z) \approx e^{-\frac{z^2}{4}} z^\nu \left[1 - \frac{\nu(\nu-1)}{2z^2} + \dots \right] \quad \text{dla } |z| \gg 1.$$

Po wykorzystaniu rozwinięć asymptotycznych (3.17) we wzorach (3.16) oraz przejściu granicznym, gdy x i y dążą do nieskończoności, stwierdzamy bez trudności, że wszystkie naprężenia dążą do zera.

Jakościowa analiza⁽¹⁾ otrzymanych wzorów (3.16) pozwala stwierdzić, że naprężenia normalne σ_{xx} , σ_{yy} oraz σ_{zz} posiadają, podobnie jak temperatura, osobliwość

(¹) Ponieważ analiza wzorów na naprężenia jest żmudna i zajmuje dużo miejsca, przytoczono tutaj tylko jej końcowe wnioski odsyłając zainteresowanych do pracy [3].

typu logarytmicznego w miejscu działania źródła ciepła, natomiast w pozostałym obszarze półprzestrzeni są wielkościami ograniczonymi. Naprężenia styczne σ_{xy} są ograniczone w całym obszarze półprzestrzeni, a nadto można zauważyć, że są funkcją nieparzystą względem zmiennej x i na całej półosi $x=0$, $y \geq 0$, $z = \text{const}$, przyjmują wartość równą zeru.

4. PRZYKŁAD LICZBOWY I WNIOSKI KOŃCOWE

Zilustrujemy tutaj wpływ prędkości ruchu źródła ciepła na zmianę pola naprężeń w półprzestrzeni sprężystej na przykładzie naprężeń σ_{xx} i σ_{xy} .

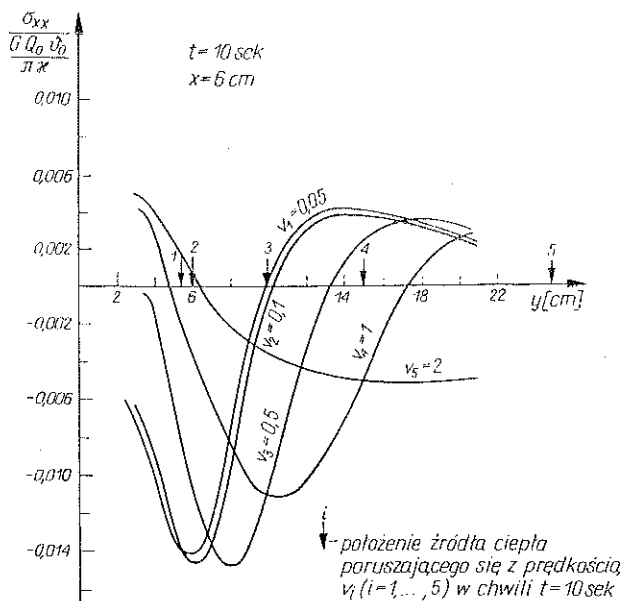
Dla wykonania obliczeń numerycznych wzory (3.16) zapiszemy w prostszej postaci wykorzystując rozwinięcia asymptotyczne funkcji walca parabolicznego (3.17):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y, t; v) = & \frac{A_1}{v} \left[\frac{3\bar{y}}{x^2 + \bar{y}^2} - \frac{\bar{y}}{x^2 + \bar{y}^2} + \frac{\bar{y} - vt}{x^2 + (\bar{y} - vt)^2} - \frac{3(\bar{y} + vt)}{x^2 + (\bar{y} + vt)^2} \right] - \\ & - \frac{2A_1 y}{v} \left\{ \frac{\bar{y}^2 - x^2}{(x^2 + \bar{y}^2)^2} - \frac{(\bar{y} + vt)^2 - x^2}{[x^2 + (\bar{y} + vt)^2]^2} \right\} + \frac{A_1}{4\kappa v} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^2} \times \\ & \times \left[\bar{y} e^{-\frac{x^2 + \bar{y}^2}{4\kappa(t-\tau)}} + \bar{y} e^{-\frac{x^2 + \bar{y}^2}{4\kappa(t-\tau)}} \right] d\tau - \frac{A_1}{4\kappa v} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^2} \left[(\bar{y} - vt) e^{-\frac{x^2 + (\bar{y} - vt)^2}{4\kappa(t-\tau)}} + \right. \\ & \left. + (\bar{y} + vt) e^{-\frac{x^2 + (\bar{y} + vt)^2}{4\kappa(t-\tau)}} \right] d\tau - \frac{4A_1 \sqrt{\pi}}{v \sqrt{\kappa}} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \omega(v, \tau) d\tau + \\ & + \frac{4A_1 \sqrt{\pi}}{v \sqrt{\kappa}} \frac{y^2 (y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \omega(v, \tau) d\tau, \\ \sigma_{xy}(x, y, t; v) = & \frac{A_1}{v} \left[\frac{x}{x^2 + \bar{y}^2} - \frac{x}{x^2 + \bar{y}^2} - \frac{x}{x^2 + (\bar{y} - vt)^2} - \frac{x}{x^2 + (\bar{y} + vt)^2} \right] + \\ & + \frac{4A_1 xy}{v} \left\{ \frac{\bar{y}}{(x^2 + \bar{y}^2)^2} - \frac{\bar{y} + vt}{[x^2 + (\bar{y} + vt)^2]^2} \right\} + \frac{A_1 x}{4\kappa v} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^2} \times \\ & \times \left[e^{-\frac{x^2 + \bar{y}^2}{4\kappa(t-\tau)}} + e^{-\frac{x^2 + \bar{y}^2}{4\kappa(t-\tau)}} \right] d\tau + \frac{A_1 x}{4\kappa v} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^2} \left[e^{-\frac{x^2 + (\bar{y} - vt)^2}{4\kappa(t-\tau)}} + e^{-\frac{x^2 + (\bar{y} + vt)^2}{4\kappa(t-\tau)}} \right] d\tau + \\ & + \frac{4A_1 x \sqrt{\kappa}}{v \sqrt{\pi} (x^2 + y^2)^2} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \omega(v, \tau) d\tau - \frac{4A_1 xy \sqrt{\kappa} (3y^2 - x^2)}{v \sqrt{\pi} (x^2 + y^2)^3} \times \\ & \times \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \omega(v, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

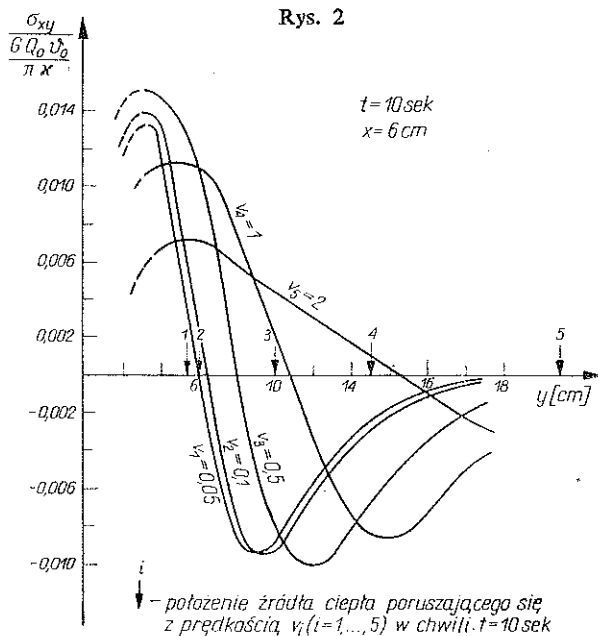
gdzie

$$\omega(v, \tau) = \left[e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa(t-\tau)}} - e^{-\frac{(\xi+v\tau)^2}{4\kappa(t-\tau)}} \right],$$

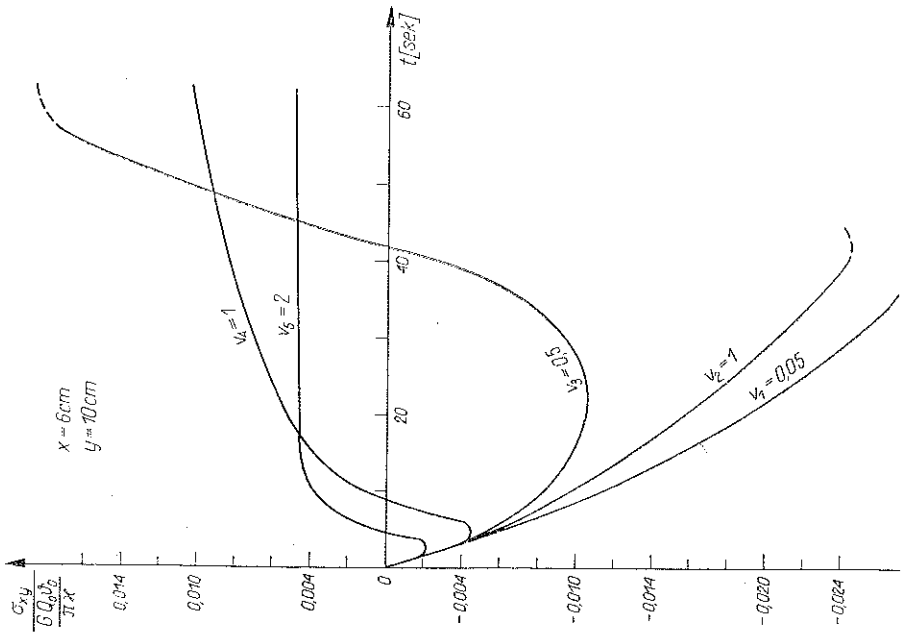
$$A_1 = \frac{GQ_0 \vartheta_0}{\pi}, \quad \bar{y} = y - \xi, \quad \bar{y}^+ = y + \xi.$$



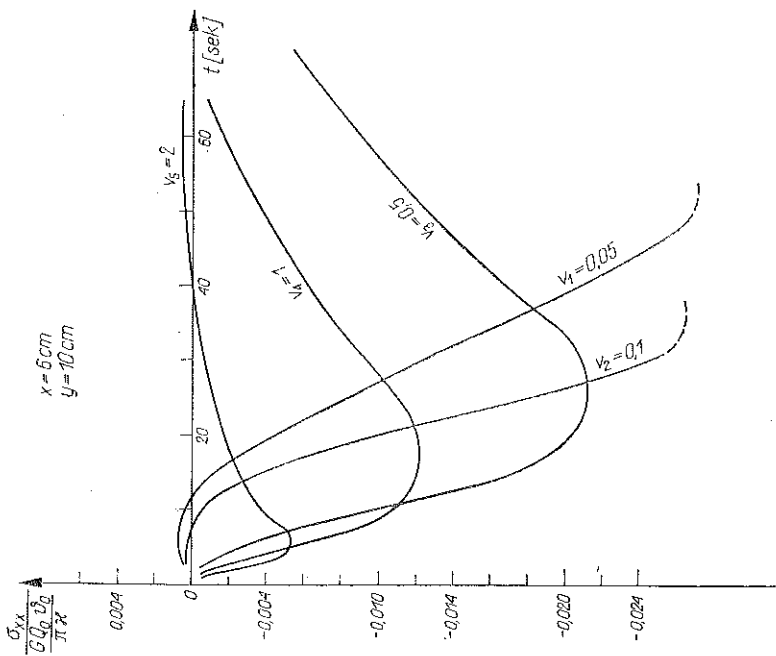
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 5



Rys. 4

Obliczenia wykonano dla półprzestrzeni ze stali przyjmując $\kappa=0,08$ cm²/sek dla następujących wartości prędkości:

$$v_1=0,05, \quad v_2=0,1, \quad v_3=0,5, \quad v_4=1,0, \quad v_5=2,0 \text{ cm/sek}$$

oraz dla czasów: $t=1, 5, 10, 60$ sek. Przyjęto, że źródło ciepła rozpoczyna ruch z miejsca $\xi=5$ cm od brzegu półprzestrzeni.

Przyjęte prędkości v_1-v_5 poruszania się źródła ciepła odpowiadają prędkościom stosowanym w praktyce spawalniczej [5].

Małe wielkości czasu t są uwarunkowane rozwinięciami asymptotycznymi funkcji wałka parabolicznego dla współrzędnych $x>2$, $y\geq 1$ cm.

Na rys. 2 i 3 przedstawiono rozkład naprężeń σ_{xx} i σ_{xy} wywołanych różnymi prędkościami ruchu źródła ciepła w ustalonym przekroju rozważanej płaszczyzny półprzestrzeni

$$(z = \text{const}), \quad x = 6 \text{ cm} \quad \text{dla} \quad t = 10 \text{ sek.}$$

Zmianę naprężeń σ_{xx} i σ_{xy} jako funkcji czasu t działania źródła ciepła w ustalonym punkcie rozważanej płaszczyzny półprzestrzeni $x=6$ cm, $y=10$ cm przy różnych prędkościach v_1-v_5 ruchu źródła ilustrują wykresy pokazane na rys. 4 i 5.

Opierając się na uzyskanych wynikach oraz przeprowadzonej analizie ilościowej rozwiązań należy stwierdzić, że prędkość ruchu źródła ciepła wpływa w sposób wyraźny na rozkład naprężeń w półprzestrzeni, mimo że rozważania ograniczono wyłącznie do małych prędkości stosowanych w praktyce spawalniczej.

Jak łatwo zauważyć, wzrost prędkości ruchu źródła korzystnie wpływa na rozkład naprężeń w półprzestrzeni powodując obniżenie ich wartości zarówno w ustalonej pewnej chwili t (patrz rys. 2 i 3) oraz ze wzrostem czasu t (rys. 4 i 5).

SPIS LITERATURY

1. H. BATEMAN, A. ERDELYI, *Higher transcendental functions*, New York 1953.
2. H. BATEMAN, *Tables of integral transforms*, New York 1954.
3. J. KUBIK, *Pole temperatury, naprężeń i przemieszczeń w tarczy półnieskończonej wywołane działaniem ruchomego źródła ciepła*, Praca doktorska, Poznań 1972.
4. E. MELAN, *Warmespannungen in einer Scheibe infolge einer wandernden Warmquelle*, Ing. Arch., **20**, 1952.
5. M. MYŚLIWIEC, *Ciepłno-mechaniczne podstawy spawalnictwa*, WNT, Warszawa 1972.
6. W. NOWACKI, *O pewnym quasi-ustalonym zagadnieniu termosprężystości*, Rozpr. Inżyn., **3**, 1957.
7. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.
8. W. NOWACKI, *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1966.
9. Г. Паркус, *Неустановившиеся температурные напряжения*, Гос. Изд. Физ.-Мат. Лит., Москва 1963.
10. D. ROSENTHAL, *The theory of moving sources of heat and its applications to metal treatments*, Trans. Amer. Soc., **68**, 1946.
11. T. ROŻNOWSKI, *Non-steady state of temperature in a long cylinder with moving boundary condition*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **13**, 45, 1965.
12. T. ROŻNOWSKI, *Niestacjonarne pole temperatury w półprzestrzeni w przypadku ruchomego ogrzania na brzegu*, Rozpr. Inżyn., **17**, 4, 1969.

13. T. ROŻNOWSKI, K. SKALSKI, *Niestacjonarny przepływ ciepła w grubej rurze ogrzanej ruchomym polem temperatury*, Rozpr. Inżyn., **19**, 4, 1971.
14. И. М. РИЖИК, И. С. ГРАДЦТЕЙН, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Изд. Наука, Москва 1971.
15. J. SNEDDON, *Fourier transforms*, New York 1951.
16. Z. SOB CZYŃSKA, *Działanie ruchomego punktowego źródła ciepła w przestrzeni nieograniczonej*, Mech. Teoret. i Stos., **1**, 7, 1969.
17. M. ŻÓRAWSKI, *Moving dynamic heat sources in a viscoelastic space and certain basic solutions for moving sources*, Arch. Mech. Stos., **12**, 2, 1961.

Резюме

ТЕРМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ВЫЗВАННЫЕ ПОДВИЖНЫМ ТЕПЛОИСТОЧНИКОМ

В работе обсуждены термические и механические результаты действия подвижного, линейного теплоисточника в упругом полупространстве, движущегося в перпендикулярном направлении к границе полупространства с постоянной скоростью v .

В рассуждениях принято, что граница полупространства поддерживается в относительной температуре равной нулю и что она может свободно перемещаться.

Обсуждаемая задача термоупругости отвечает плоскому деформационному состоянию.

При построении поля температуры применен метод суперпозиции двух теплоисточников: положительного и отрицательного, которые действуют в неограниченном пространстве; суперпозиция отвечающих этим источникам полей дает в результате искомое решение для полупространства.

Для определения поля напряжений использованы функция термоупругого потенциала перемещения и функция Галеркина.

Полученные результаты проанализированы на числовом примере и иллюстрированы графиками.

SUMMARY

THERMAL STRESSES IN ELASTIC SEMISPACE DUE TO A MOVING HEAT SOURCE

The paper presents the thermal and mechanical effects of a moving, linear heat source in an elastic halfspace; the source propagates at a constant velocity v in the direction perpendicular to the surface of the halfspace. The surface is assumed to be held at zero temperature and free of kinematic constraints. The conditions of plane strain are satisfied.

The temperature field is constructed by superposing two heat sources, a positive and a negative one, acting within an elastic space. Thermoelastic strain potential and Galerkin functions are used in the solution. The results are illustrated by a numerical example and several graphs.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 sierpnia 1973 r.