ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 22, 2, 245—264, 1974
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

NIEUSTALONE NAPRĘŻENIA TEMPERATUROWE W NIEOGRANICZONEJ WARSTWIE SPRĘŻYSTEJ, WYWOŁANE OGRZANIEM CZĘŚCI JEJ POWIERZCHNI

K. K. KAJDAROW (PAWŁODAR)

1. Sformułowanie zagadnienia i metoda jego rozwiązania

Rozpatrywać będziemy nieograniczoną warstwę sprężystą o grubości $2h$. Układ współrzędnych x_1, x_2, x_3 obierzemy w taki sposób, aby płaszczyzna x_1, x_2 pokrywała się z płaszczyzną środkową warstwy, a oś x_3 była do niej prostopadła. Niech w obszarze Γ płaszczyzny $x_3=h$ dana będzie temperatura $\theta(x_1, x_2, h, t)=2f(x_1, x_2, t)$, a poza tym obszarem, jak również na dolnej powierzchni warstwy $x_3=-h$ — temperatura $\theta=0$. Założymy ponadto, że na płaszczyznach ograniczających warstwę nie występują naprężenia, a początkowa temperatura warstwy jest równa zeru.

Pole temperatury i stanu naprężenia warstwy pozwalają wyznaczyć równania różniczkowe przewodnictwa cieplnego [1]

$$\nabla^2\theta-\frac{1}{\kappa}\dot{\theta}=0 \tag{1.1}$$

i termosprężystości (napisane w przemieszczeniach)

$$\mu\nabla^2 u_i+(\lambda+\mu)u_{j,ji}-\rho\ddot{u}_i=\gamma\theta_{,i} \tag{1.2}$$

z następującymi warunkami początkowymi i brzegowymi:

$$\theta(x_1, x_2, x_3, 0)=0, \tag{1.3}$$

$$u_i(x_1, x_2, x_3, 0)=0, \qquad \dot{u}_i(x_1, x_2, x_3, 0)=0; \tag{1.4}$$

$$\theta(x_1, x_2, -h, t)=0, \qquad \theta(x_1, x_2, h, t)=\begin{cases}2f(x_1, x_2, t) & \text{w obszarze } \Gamma,\\ 0 & \text{poza obszarem } \Gamma\end{cases} \tag{1.5}$$

oraz

$$\sigma_{i3}(x_1, x_2, \pm h, t)=0, \tag{1.6}$$

gdzie $\nabla^2=\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2+\partial^2/\partial x_3^2$ oznacza operator Laplace'a, κ współczynnik przewodnictwa temperaturowego oraz gdzie

$$\dot{\theta}=\frac{\partial\theta}{\partial t}, \qquad \theta_{,i}=\frac{\partial\theta}{\partial x_i}, \qquad u_{j,ji}=\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\partial x_j}, \qquad \ddot{u}_i=\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \qquad i,j=1,2,3;$$

λ, μ oznaczają stałe Lamégo, ρ — gęstość, $\gamma=\alpha_t(3\lambda+2\mu)$, a α_t współczynnik rozszerzalności liniowej.

Rozwiązanie ogólne układu równań (1.2) przedstawimy w postaci sumy

$$u_i = u_i^0 + u_i^*, \tag{1.7}$$

gdzie u_i^0 oznacza rozwiązanie szczególne układu równań niejednorodnych (1.2), a u_i^* rozwiązanie ogólne równań jednorodnych

$$\mu\nabla^2 u_i^* + (\lambda+\mu)\, u_{j,ji}^* - \rho\ddot{u}_i^* = 0. \tag{1.8}$$

Rozwiązanie szczególne znajdziemy wprowadzając za pomocą równości

$$u_i^0 = \Phi_{,i} \tag{1.9}$$

termosprężysty potencjał przemieszczeń $\Phi(x_1, x_2, x_3, t)$. Rozwiązania równań (1.8) będziemy poszukiwać podaną przez A. I. LURIEGO [2] metodą funkcji początkowych (sposobem symbolicznym). Funkcje u_i^* powinny być określone tak, aby czyniły zadość warunkom brzegowym na ograniczających warstwę powierzchniach $x_3 = \pm h$. Dla uproszczenia zamiast warunków brzegowych (1.5) rozpatrywać będziemy warunki następujące:

$$\theta^{(s)}(x_1, x_2, \pm h, t) = \begin{cases} f(x_1, x_2, t) & \text{w obszarze } \Gamma, \\ 0 & \text{poza obszarem } \Gamma \end{cases} \tag{1.10}$$

oraz

$$\theta^{(a)}(x_1, x_2, \pm h, t) = \begin{cases} \pm f(x_1, x_2, t) & \text{w obszarze } \Gamma \\ 0 & \text{poza obszarem } \Gamma, \end{cases} \tag{1.11}$$

które określają pola temperatury w warstwie odpowiednio symetryczne i antysymetryczne względem płaszczyzny środkowej $x_3 = 0$. Sumując rozwiązanie odpowiadające warunkom (1.10) i (1.11) uzyskamy rozwiązanie zadania wyjściowego z warunkami (1.5).

Równania (1.2) rozwiążemy najpierw z pominięciem wyrazów bezwładnościowych $\rho\ddot{u}_i$ (zagadnienie quasi-statyczne), a potem z ich uwzględnieniem (zagadnienie dynamiczne).

W dalszym ciągu dla uproszczenia zapisu wprowadzimy oznaczenia $x_3 = z$, $u_3 = w$.

2. Wyznaczanie pola temperatury

Stosując całkowe przekształcenie Fouriera ze względu na współrzędne x_1, x_3 oraz przekształcenie Laplace'a ze względu na czas t oraz uwzględniając warunek początkowy (1.3), sprowadzimy równanie (1.1) do postaci

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}^{(s)}}{\partial z^2} - \omega^2 \tilde{\theta}^{(s)} = 0, \tag{2.1}$$

gdzie

$$\theta^{(s)}(\alpha_1, \alpha_2, z, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\, dx_2 \int_0^{\infty} \theta(x_1, x_2, z, t)\, e^{i\alpha_k x_k - pt}\, dt, \tag{2.2}$$

oraz gdzie

$$\omega=\sqrt{\alpha^2+\frac{p}{\kappa}}, \qquad \alpha=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}, \qquad \alpha_k x_k=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2. \tag{2.3}$$

Biorąc pod uwagę warunki brzegowe (1.10) znajdziemy stąd

$$\tilde{\theta}^{(s)}(\alpha_1,\alpha_2,z,p)=\tilde{f}(\alpha_1,\alpha_2,p)\frac{\operatorname{ch}\omega z}{\operatorname{ch}\omega h}, \tag{2.4}$$

gdzie $\tilde{f}(\alpha_1,\alpha_2,p)$ jest obrazem funkcji $f(x_1,x_2,t)$ określonej na brzegu.

Po wykonaniu odwrotnych przekształceń Laplace'a i Fouriera uzyskamy

$$\theta^{(s)}(x_1,x_2,z,t)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\alpha_1 d\alpha_2\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\tilde{f}(\alpha_1,\alpha_2,p)\frac{\operatorname{ch}\omega\alpha}{\operatorname{ch}\omega h}e^{pt-i\alpha_k x_k}dp. \tag{2.5}$$

W sposób analogiczny z równania (2.1) przy warunku brzegowym (1.11) wyznaczymy antysymetryczne pole temperatury w postaci

$$\theta^{(a)}(x_1,x_2,z,t)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\alpha_1 d\alpha_2\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\tilde{f}(\alpha_1,\alpha_2,p)\frac{\operatorname{sh}\omega z}{\operatorname{sh}\omega h}e^{pt-i\alpha_k x_k}dp. \tag{2.6}$$

3. Zagadnienie quasi-statyczne

W tym przypadku stan naprężeń i odkształceń warstwy, wywołany nieustalonym polem temperatury, uzyskamy rozwiązując równania

$$\mu\nabla^2 u_i+(\lambda+\mu)u_{j,ji}=\gamma\theta_{,i} \tag{3.1}$$

przy warunku brzegowym (1.6).

Podstawienie $u_i^0=\Phi_{,i}$ do równań (3.1) prowadzi do równania [3]

$$\nabla^2\Phi=m\theta, \qquad m=\frac{\gamma}{\lambda+2\mu}. \tag{3.2}$$

Podstawiając $\Phi(x_1,x_2,\mp h,t)=0$ i wyzyskując przekształcenia Laplace'a ze względu na t oraz przekształcenie Fouriera ze względu na x_1, x_2, z równania (3.2) znajdziemy termosprężysty potencjał przemieszczeń. W przypadku symetrycznego pola temperatury ma on postać

$$\Phi^{(s)}(x_1,x_2,z,t)= \tag{3.3}$$

$$=\frac{m\kappa}{4\pi^2 i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\alpha_1 d\alpha_2\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\tilde{f}(\alpha_1,\alpha_2,p)}{p}\left(\frac{\operatorname{ch}\omega z}{\operatorname{ch}\omega h}-\frac{\operatorname{ch}\alpha z}{\operatorname{ch}\alpha h}\right)e^{pt-i\alpha_k x_k}dp,$$

a w przypadku antysymetrycznego pola temperatury postać

$$\Phi^{(a)}(x_1,x_2,z,t)= \tag{3.4}$$

$$=\frac{m\kappa}{4\pi^2 i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\alpha_1 d\alpha_2\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\tilde{f}(\alpha_1,\alpha_2,p)}{p}\left(\frac{\operatorname{sh}\omega z}{\operatorname{sh}\omega h}-\frac{\operatorname{sh}\alpha z}{\operatorname{sh}\alpha h}\right)e^{pt-i\alpha_k x_k}dp.$$

Znajomość funkcji Φ pozwala na wyznaczenie przemieszczeń i naprężeń wg wzorów

$$u_i^0 = \Phi_{,i}, \tag{3.5}$$

oraz

$$\sigma_{ij}^0 = 2\mu(\Phi_{,ij} - \delta_{ij}\nabla^2\Phi), \tag{3.6}$$

gdzie δ_{ij} jest symbolem Kroneckera.

Wyznaczymy przede wszystkim naprężenia quasi-statyczne wywołane symetrycznym polem temperatury (2.5). Jak łatwo jest ustalić, w tym przypadku przy $z = \pm h$

$$\sigma_{13}^0 = \pm 2\mu\partial_1\tau, \quad \sigma_{23}^0 = \pm 2\mu\partial_2\tau, \quad \sigma_{33}^0 = 0, \tag{3.7}$$

gdzie

$$\begin{gathered}\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2};\\ \tau(x_1, x_2, t) = \Phi_{,z}^{(s)}(x_1, x_2, h, t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\Phi}_{,z}^{(s)}(\alpha_1, \alpha_2, h, t)\, e^{-i\alpha_k x_k}\, d\alpha_1\, d\alpha_2\end{gathered} \tag{3.8}$$

oraz

$$\begin{gathered}\overline{\Phi}_{,z}^{(s)}(\alpha_1, \alpha_2, h, t) = \frac{m\kappa}{2\pi i}\int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\tilde{f}(\alpha_1, \alpha_2, p)}{p}(\omega\, th\, \omega h - \alpha\, th\, \alpha h)\, e^{pt}\, dp,\\ \Phi_{,z} = \frac{\partial\Phi}{\partial z}.\end{gathered} \tag{3.9}$$

Z równości (3.7) wynika, iż warunki brzegowe (1.6) nie są spełniane dokładnie. Dlatego też stan naprężeń o składowych σ_{ij}^0 należy na zasadzie superpozycji nałożyć na stan naprężeń σ_{ij}^* wybrany tak, aby spełnione były warunki

$$\sigma_{13}^0 + \sigma_{13}^* = 0, \quad \sigma_{23}^0 + \sigma_{23}^* = 0, \quad \sigma_{33}^0 + \sigma_{33}^* = 0 \text{ przy } z = \pm h. \tag{3.10}$$

Ponieważ naprężenia σ_{ij}^* uzależnione są od przemieszczeń u_i^* zgodnie z prawem Hooke'a, zadanie sprowadza się do rozwiązań równań

$$\mu\nabla^2 u_i^* + (\lambda + \mu)u_{j,ji}^* = 0 \tag{3.11}$$

przy warunkach brzegowych

$$\sigma_{33}^* = 0, \quad \sigma_{k3}^* = \mp 2\mu\partial_k\tau, \quad k = 1, 2 \text{ przy } z = \pm h. \tag{3.12}$$

A. I. Lurie [2] badając metodą funkcji początkowych równowagę warstwy sprężystej, wykazał, że zadanie wyznaczenia rozwiązań równań (3.11) przy warunkach brzegowych (3.12) daje się sprowadzić do wyznaczenia funkcji naprężeń (funkcji rozwiązującej) $\chi(x_1, x_2, t)$ z równania

$$F(D^2)\chi = \tau, \tag{3.13}$$

gdzie

$$F(D^2) = -hD^2\left(1 + \frac{\sin 2hD}{2hD}\right), \quad D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2. \tag{3.14}$$

Przemieszczenia i naprężenia wyrażają się przez funkcję χ wg wzorów

$$(3.15)\qquad \begin{aligned} u_k^* &= -\partial_k X_1(ziD, hiD)\chi, \\ w^* &= X_2(ziD, hiD)\chi \end{aligned}$$

oraz

$$(3.16)\qquad \begin{aligned} \sigma_{k3}^* &= 2\mu\,\partial_k X_3(ziD, hiD)\chi, \\ \sigma_{33}^* &= -2\mu X_4(ziD, hiD)D^2\chi, \\ \sigma_{11}^* &= 2\mu\,[D^2X_5(ziD, hiD)+\partial_2^2X_1(ziD, hiD)]\chi, \\ \sigma_{22}^* &= 2\mu\,[D^2X_5(ziD, hiD)+\partial_1^2X_1(ziD, hiD)]\chi, \\ \sigma_{12}^* &= -2\mu\,\partial_1\partial_2X_1(ziD, hiD)\chi, \qquad k=1,2. \end{aligned}$$

Funkcje operatorowe $X_s(ziD, hiD)$ $(s=1, 2, ..., 5)$ uzyskuje się z funkcji $X_s(\alpha z, \alpha h)$ przez zastąpienie liczby α przez iD $(i=\sqrt{-1})$. Funkcje $X_s(\alpha z, \alpha h)$ mają postać następującą:

$$(3.17)\qquad \begin{aligned} X_1(\alpha z, \alpha h) &= \alpha z\operatorname{sh}\alpha z\operatorname{ch}\alpha h-\alpha h\operatorname{sh}\alpha h\operatorname{ch}\alpha z+\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\operatorname{ch}\alpha z\operatorname{ch}\alpha h, \\ X_2(\alpha z, \alpha h) &= \alpha^2h\operatorname{sh}\alpha h\operatorname{sh}\alpha z-\alpha^2z\operatorname{ch}\alpha h\operatorname{ch}\alpha z+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\alpha\operatorname{sh}\alpha z\operatorname{ch}\alpha h, \\ X_3(\alpha z, \alpha h) &= \alpha^2h\operatorname{sh}\alpha h\operatorname{sh}\alpha z-\alpha^2z\operatorname{ch}\alpha h\operatorname{ch}\alpha z-\alpha\operatorname{sh}\alpha z\operatorname{ch}\alpha h, \\ X_4(\alpha z, \alpha h) &= \alpha h\operatorname{sh}\alpha h\operatorname{ch}\alpha z-\alpha z\operatorname{sh}\alpha z\operatorname{ch}\alpha h, \\ X_5(\alpha z, \alpha h) &= -\alpha z\operatorname{sh}\alpha z\operatorname{ch}\alpha h+\alpha h\operatorname{sh}\alpha h\operatorname{ch}\alpha z-2\operatorname{ch}\alpha h\operatorname{ch}\alpha z. \end{aligned}$$

A. I. Lurie [2] wykazał także, iż jeżeli obciążenie $\tau(x_1, x_2, t)$ daje się wyrazić całką Fouriera o postaci

$$(3.18)\qquad \tau(x_1, x_2, t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\tau}(\alpha_1, \alpha_2, t)e^{-i\alpha_k x_k}d\alpha_1\,d\alpha_2,$$

gdzie $\bar{\tau}(\alpha_1, \alpha_2, t)$ jest transformantą Fouriera funkcji $\tau(x_1, x_2, t)$, to funkcja naprężeń ma postać

$$(3.19)\qquad \chi(x_1, x_2, t)=\frac{1}{2\pi h}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{\tau}(\alpha_1, \alpha_2, t)}{F(-\alpha^2)}e^{-i\alpha_k x_k}\,d\alpha_1\,d\alpha_2.$$

Wyrażenie $F(-\alpha^2)$ uzyskiwane jest przy tym z (3.14) za pomocą zastąpienia operatora D^2 przez liczbę $-\alpha^2$, czyli

$$(3.20)\qquad F(-\alpha^2)=\alpha^2h\left(1+\frac{\operatorname{sh}2\alpha h}{2\alpha h}\right)=\frac{\alpha}{2}(2\alpha h+\operatorname{sh}2\alpha h).$$

Znalezienie wyniku operacji postaci

$$(3.21)\qquad X(ziD, hiD)\chi$$

sprowadza się do pomnożenia χ przez wynik zastąpienia w równości (3.21) symbolu iD liczbą α:

$$X(ziD, hiD)\chi = X(\alpha z, \alpha h)\chi. \tag{3.22}$$

W rozpatrywanym zadaniu, jak wynika ze wzorów (3.8), (3.18) i (3.19),

$$\chi(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\Phi}^{(s)}_{,z}(\alpha_1, \alpha_2, h, t)}{F(-\alpha^2)} e^{-i\alpha_k x_k} d\alpha_1 d\alpha_2. \tag{3.23}$$

Z równości (3.15), (3.16) i (3.23), stosując regułę (3.22), można wyznaczyć przemieszczenia u_i^* i naprężenia σ_{ij}^*.

Ogólne naprężenia znajdujemy w postaci sum

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^*. \tag{3.24}$$

Analogicznie wyznaczane są naprężenia w warstwie, wywołane antysymetrycznym polem temperatury (2.6). Naprężenia σ_{ij}^0 wyznaczane są z wzorów (3.4) i (3.6). W tym przypadku w płaszczyznach $z = \pm h$ spełnione są warunki:

$$\sigma_{33}^0 = 0, \quad \sigma_{13}^0 = 2\mu \partial_1 S, \quad \sigma_{23}^0 = 2\mu \partial_2 S, \tag{3.25}$$

gdzie

$$S(x_1, x_2, t) = \Phi^{(a)}_{,z}(x_1, x_2, h, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{(a)}_{,z}(\alpha_1, \alpha_2, h, t)\, e^{-i\alpha_k x_k} d\alpha_1 d\alpha_2 \tag{3.26}$$

oraz

$$\bar{\Phi}^{(a)}_{,z}(\alpha_1, \alpha_2, h, t) = \frac{m\kappa}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\bar{f}(\alpha_1, \alpha_2, p)}{p}(\omega \operatorname{cth} \omega h - \alpha \operatorname{cth} \alpha h)\, e^{pt} dp. \tag{3.27}$$

Ponieważ dla $z = \pm h$ $\sigma_{13}^0 \neq 0$ i $\sigma_{23}^0 \neq 0$, przeto do rozwiązania σ_{ij}^0 należy dodać rozwiązanie σ_{ij}^*, czyniące zadość warunkom

$$\sigma_{33}^* = 0, \quad \sigma_{k3}^* = -2\mu \partial_k S, \quad k = 1, 2 \text{ przy } z = \pm h. \tag{3.28}$$

Rozwiązanie to znajdziemy w postaci:

$$\begin{aligned} u_k^* &= -\partial_k \Psi_1(\alpha z, \alpha h)\psi, \\ w^* &= \Psi_2(\alpha z, \alpha h)\psi \end{aligned} \tag{3.29}$$

oraz

$$\begin{aligned} \sigma_{k3}^* &= 2\mu \partial_k \Psi_3(\alpha z, \alpha h)\psi, \\ \sigma_{33}^* &= 2\mu \alpha^2 \Psi_4(\alpha z, \alpha h)\psi, \\ \sigma_{11}^* &= -2\mu[\alpha^2 \Psi_5(\alpha z, \alpha h) - \partial_2^2 \Psi_1(\alpha z, \alpha h)]\psi, \\ \sigma_{22}^* &= -2\mu[\alpha^2 \Psi_5(\alpha z, \alpha h) - \partial_1^2 \Psi_1(\alpha z, \alpha h)]\psi, \\ \sigma_{12}^* &= -2\mu \partial_1 \partial_2 \Psi_1(\alpha z, \alpha h)\psi, \end{aligned} \tag{3.30}$$

gdzie

$$
(3.31)\quad
\begin{aligned}
&\Psi_1(\alpha z, \alpha h) = \alpha h \operatorname{sh}\alpha z \operatorname{ch}\alpha h - \alpha z \operatorname{sh}\alpha h \operatorname{ch}\alpha z - \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\operatorname{sh}\alpha z \operatorname{sh}\alpha h,\\
&\Psi_2(\alpha z, \alpha h) = \alpha^2 z \operatorname{sh}\alpha h \operatorname{sh}\alpha z - \alpha^2 h \operatorname{ch}\alpha h \operatorname{ch}\alpha z - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\alpha \operatorname{sh}\alpha h \operatorname{ch}\alpha z,\\
&\Psi_3(\alpha z, \alpha h) = \alpha^2 z \operatorname{sh}\alpha h \operatorname{sh}\alpha z - \alpha^2 h \operatorname{ch}\alpha h \operatorname{ch}\alpha z + \alpha \operatorname{sh}\alpha h \operatorname{ch}\alpha z,\\
&\Psi_4(\alpha z, \alpha h) = \alpha z \operatorname{sh}\alpha h \operatorname{ch}\alpha z - \alpha h \operatorname{ch}\alpha h \operatorname{sh}\alpha z,\\
&\Psi_5(\alpha z, \alpha h) = -\alpha h \operatorname{sh}\alpha z \operatorname{ch}\alpha h + \alpha z \operatorname{sh}\alpha h \operatorname{ch}\alpha z + 2\operatorname{sh}\alpha z \operatorname{sh}\alpha h.
\end{aligned}
$$

We wzorach tych ψ jest nową funkcją naprężeń o postaci

$$
(3.32)\quad \psi(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{\Phi}^{(a)}_{,z}(\alpha_1, \alpha_2, h, t)}{F_1(-\alpha^2)} e^{-i\alpha_k x_k}\, d\alpha_1 d\alpha_2,
$$

gdzie

$$
(3.33)\quad F_1(-\alpha^2) = \frac{\alpha}{2}(2\alpha h - \operatorname{sh} 2\alpha h).
$$

Uzyskaliśmy w ten sposób ogólne rozwiązanie zagadnienia przewodnictwa cieplnego i quasi-statycznego zagadnienia termosprężystości dla rozpatrywanej warstwy przy danych warunkach brzegowych i początkowych.

4. Przykłady

1. Niech w prostokątnych obszarach $-a<x_1<a$, $-b<x_2<b$ płaszczyzn $z=\pm h$ temperatura ma postać funkcji liniowej

$$
(4.1)\quad \theta(x_1, x_2, \pm h, t) = f(x_1, x_2, t) = \frac{\theta_0}{t_0}[t-(t-t_0)H(t-t_0)]
$$

(gdzie $H(t)$ jest jednostkową funkcją Heaviside'a), a poza tymi obszarami jest równa zeru.

Jeżeli podstawimy transformatę funkcji brzegowej

$$
(4.2)\quad \tilde{f}(\alpha_1, \alpha_2, p) = \frac{2}{\pi}\frac{\theta_0(1-e^{-pt_0})}{p^2 t_0}\frac{\sin\alpha_1 a \sin\alpha_2 b}{\alpha_1\alpha_2}
$$

do wzoru (2.5), to będziemy mogli obliczyć całkę

$$
(4.3)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\operatorname{ch}\omega z}{t_0 p^2 \operatorname{ch}\omega h}(1-e^{-pt_0})e^{pt}\, dp,
$$

czyli wykonać odwrotne przekształcenie Laplace'a:

$$
(4.4)\quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{t_0}\frac{\operatorname{ch}\omega z}{p^2\operatorname{ch}\omega h}(1-e^{-pt_0})\right] = \vartheta(\alpha, z, t, t_0),
$$

gdzie $\mathcal{L}$ oznacza przekształcenie Laplace'a. Żeby wyznaczyć funkcję ϑ zwróćmy uwagę, że

$$(4.5)\qquad \frac{\operatorname{ch}\omega z}{p^2\operatorname{ch}\omega h}=\frac{\operatorname{ch}(z\sqrt{\alpha^2+p/\kappa})}{p^2\operatorname{ch}(h\sqrt{\alpha^2+p/\kappa})}=\frac{R(p)}{r(p)}$$

jest ilorazem dwóch uogólnionych wielomianów ze względu na p, przy czym $r(p)=$ $=p^2\operatorname{ch}(h\sqrt{\alpha^2+p/\kappa})$ nie zawiera stałej i ma dwukrotny pierwiastek $p=0$ oraz pierwiastki pojedyncze $p_n=-\frac{\nu_n^2+\alpha^2/h^2}{h^2}\kappa$, gdzie $\nu_n=(2n-1)\frac{\pi}{2}$ $(n=1, 2, 3, ...)$.

W związku z tym przy wyznaczaniu retransformaty można zastosować uogólnione twierdzenie o rozkładzie [4]:

$$(4.6)\qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R(p)}{r(p)}\right]=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{p\to p_m}\left\{\frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}}\left[\frac{R(p)(p-p_m)^k}{r(p)}e^{pt}\right]\right\}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R(p_n)}{r'(p_n)}e^{p_n t},$$

gdzie k jest krotnością pierwiastka p_m a $r'(p_n)=[dr(p)/dp]_{p=p_n}$. W rozpatrywanym przypadku przy $p_m=0$, $k=2$ mamy

$$(4.7)\qquad \psi(\alpha, z, t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\operatorname{ch}\omega z}{p^2\operatorname{ch}\omega h}\right]=t\frac{\operatorname{ch}\alpha z}{\operatorname{ch}\alpha h}+\frac{z\operatorname{sh}\alpha z\operatorname{ch}\alpha h-h\operatorname{sh}\alpha h\operatorname{ch}\alpha z}{2\kappa\alpha\operatorname{ch}^2\alpha h}+$$
$$+\frac{2h^2}{\kappa}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\nu_n}{(\nu_n^2+\alpha^2h^2)^2}\cos\left(\nu_n\frac{z}{h}\right)e^{-\frac{\nu_n^2+\alpha^2h^2}{h^2}\kappa t}.$$

Wyzyskując twierdzenie o przesunięciu otrzymamy szukaną funkcję (4.4) w postaci

$$(4.8)\qquad \vartheta(\alpha, z, t, t_0)=\frac{1}{t_0}[\psi(\alpha, z, t)-\psi(\alpha, z, t-t_0)H(t-t_0)].$$

Wprowadzając uzyskane wyrażenia do wzoru (2.5) wyznaczymy pole temperatury:

$$(4.9)\qquad \theta^{(s)}(x_1, x_2, z, t)=$$
$$=\frac{4\theta_0}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\vartheta(\alpha, z, t, t_0)\frac{\sin\alpha_1 a\sin\alpha_2 b}{\alpha_1\alpha_2}\cos\alpha_1 x_1\cos\alpha_2 x_2\,d\alpha_1\,d\alpha_2.$$

Analogicznie według wzorów (3.3) i (4.6) uzyskamy

$$(4.10)\qquad \Phi^{(s)}(x_1, x_2, z, t)=$$
$$=\frac{4m\kappa\theta_0}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\varphi(\alpha, z, t, t_0)\frac{\sin\alpha_1 a\sin\alpha_2 b}{\alpha_1\alpha_2}\cos\alpha_1 x_1\cos\alpha_2 x_2\,d\alpha_1\,d\alpha_2$$

oraz

$$(4.11)\qquad \varphi(\alpha, z, t, t_0)=\frac{1}{t_0}[\eta(\alpha, z, t)-\eta(\alpha, z, t-t_0)H(t-t_0)],$$

$$(4.12)\qquad \eta(\alpha, z, t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^3}\left(\frac{\operatorname{ch}\omega z}{\operatorname{ch}\omega h}-\frac{\operatorname{ch}\alpha z}{\operatorname{ch}\alpha h}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{h^2}{2\kappa^2\alpha^2}th^2\alpha h\right)\frac{\operatorname{ch}\alpha z}{\operatorname{ch}\alpha h}+\right.$$

$$+\frac{(z^2-h^2)\alpha\operatorname{ch}\alpha z\operatorname{ch}\alpha h-2h\alpha z\operatorname{sh}\alpha z\operatorname{sh}\alpha h-z\operatorname{sh}\alpha z\operatorname{ch}\alpha h+h\operatorname{sh}\alpha h\operatorname{ch}\alpha z}{4\kappa^2\alpha^3\operatorname{ch}^2 dh}+$$

$$\left.+t\frac{z\operatorname{sh}\alpha z\operatorname{ch}\alpha h-h\operatorname{sh}\alpha h\operatorname{ch}\alpha z}{\kappa\alpha\operatorname{ch}^2\alpha h}\right]-$$

$$-\frac{2h^4}{\kappa^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{v_n}{(v_n^2+\alpha^2h^2)^3}\cos\left(v_n\frac{2}{h}\right)e^{-\frac{v_n^2+\alpha^2h^2}{h^2}\varkappa t},$$

$$(4.13)\qquad v_n=(2n-1)\frac{\pi}{2},\qquad n=1, 2, 3, \dots .$$

Przy $t_0\to 0$ ze wzorów (4.9) i (4.10) otrzymamy pole temperatury θ i potencjał termosprężysty Φ dla przypadku, kiedy prostokątne obszary należące do płaszczyzn $z=\pm h$ zmieniają nagle temperaturę na θ_0, a następnie są utrzymywane w tej temperaturze, czyli gdy

$$(4.14)\qquad \theta(x_1 x_2 \pm h, t)=\begin{cases}\theta_0 H(t), & \text{jeśli}\quad -a<x_1<a,\quad -b<x_2<b,\\ 0, & \text{jeśli}\quad |x_1|>a,\quad |x_2|>b.\end{cases}$$

Wprowadzając do wzorów (4.9) i (4.10) graniczne wartości funkcji

$$(4.15)\qquad \vartheta(\alpha, z, t)=\lim_{t_0\to 0}\vartheta(\alpha, z, t, t_0)=$$

$$=\frac{\operatorname{ch}\alpha z}{\operatorname{ch}\alpha h}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2v_n}{v_n^2+\alpha^2h^2}\cos\left(v_n\frac{z}{h}\right)e^{-\frac{v_n^2+\alpha^2h^2}{v^2}\varkappa t}$$

oraz

$$(4.16)\qquad \varphi(\alpha, z, t)=\lim_{t_0\to 0}\varphi(\alpha, z, t, t_0)=\frac{z\operatorname{sh}\alpha z\operatorname{ch}\alpha h-h\operatorname{sh}\alpha h\operatorname{ch}\alpha z}{2\kappa\alpha\operatorname{ch}^2\alpha h}+$$

$$+\frac{2h^2}{\kappa}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{v_n}{(v_n^2+\alpha^2h^2)^2}\cos\left(v_n\frac{z}{h}\right)e^{-\frac{v_n^2+\alpha^2h^2}{h^2}\varkappa t},$$

wyznaczymy pole temperatury θ oraz potencjał Φ dla rozpatrywanego przypadku.

Naprężenia σ_{ij}^0 odpowiadające potencjałowi $\Phi^{(s)}$ obliczymy według wzorów (3.6). Następnie podstawiając do wzoru (3.16) funkcję naprężeń

$$(4.17)\qquad \chi(x_1, x_2, t)=$$

$$=\frac{4m\kappa\theta_0}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\varphi_{,z}(h)}{F(-\alpha^2)}\,\frac{\sin\alpha_1 a\cdot\sin\alpha_2 b}{\alpha_1\alpha_2}\cos\alpha_1 x_1\cos\alpha_2 x_2\,d\alpha_1\,d\alpha_2,$$

określimy przykładane naprężenia σ_{ij}^{*}. We wzorze (4.17) wprowadziliśmy oznaczenia:

$$\varphi_{,z}(h)=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]_{z=h}=\frac{1}{t_0}\left[\eta_{,z}(\alpha,h,t)-\eta_{,z}(\alpha,h,t-t_0)\,H(t-t_0)\right],$$

$$\eta_{,z}(\alpha,h,t)=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{h^2}{2\kappa^2\alpha^2}\,th^2\alpha h\right)\alpha\,th\alpha h+\right. \tag{4.18}$$

$$\left.+\frac{2\alpha h(1-\alpha h)\,\mathrm{ch}^2\alpha h-(0{,}5+\alpha h)\,\mathrm{sh}\,2\alpha h-\alpha h}{4\kappa^2\alpha^3\,\mathrm{ch}^2\alpha h}+t\frac{2\alpha h+\mathrm{sh}\,2\alpha h}{2\kappa\alpha\,\mathrm{ch}^2\alpha h}\right]+$$

$$+t\frac{2h^3}{\kappa^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu_n^2}{(\nu_n^2+\alpha^2h^2)^3}\,e^{-\frac{\nu_n^2+\alpha^2h^2}{h^2}\varkappa t},$$

a w przypadku (4.16)

$$\varphi_{,z}(h)=\frac{2\alpha h+\mathrm{sh}\,2\alpha h}{4\kappa\alpha\,\mathrm{ch}^2\alpha h}-\frac{2h}{\kappa}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu_n^2}{(\nu_n^2+\alpha^2h^2)^2}\,e^{-\frac{\nu_n^2+\alpha^2h^2}{h^2}\varkappa t}. \tag{4.19}$$

Ostateczne wyrażenia naprężeń $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{0}=\sigma_{ij}^{*}$ będą miały postać:

$$\sigma_{11}=8\mu\frac{m\kappa\theta_0}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left\{\alpha_2^2\varphi-\varphi_{,zz}-\frac{\varphi_{,z}(h)}{F(-\alpha^2)}\left[\alpha_2^2X_1(\alpha z,\alpha h)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\alpha^2X_5(\alpha z,\alpha h)\right]\right\}\sin\alpha_1 a\sin\alpha_2 b\cos\alpha_1 x_1\cos\alpha_2 x_2\,d\alpha_1\,d\alpha_2,$$

$$\sigma_{22}=8\mu\frac{m\kappa\theta_0}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left\{\alpha_1^2\varphi-\varphi_{,zz}-\frac{\varphi_{,z}(h)}{F(-\alpha^2)}\left[\alpha_1^2X_1(\alpha z,\alpha h)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\alpha^2X_5(\alpha z,\alpha h)\right]\right\}\sin\alpha_1 a\sin\alpha_2 b\cos\alpha_1 x_1\cos\alpha_2 x_2\,d\alpha_1\,d\alpha_2,$$

$$\sigma_{12}=8\mu\frac{m\kappa\theta_0}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\varphi-\frac{\varphi_{,z}(h)}{F(-\alpha^2)}X_1(\alpha z,\alpha h)\right]\times$$

$$\times\sin\alpha_1 a\sin\alpha_2 b\sin\alpha_1 x_1\sin\alpha_2 x_2\,d\alpha_1\,d\alpha_2, \tag{4.20}$$

$$\sigma_{13}=-8\mu\frac{m\kappa\theta_0}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{\alpha_2}\left[\varphi_{,z}+\frac{\varphi_{,z}(h)}{F(-\alpha^2)}X_3(\alpha z,\alpha h)\right]\times$$

$$\times\sin\alpha_1 a\sin\alpha_2 b\sin\alpha_1 x_1\cos\alpha_2 x_2\,d\alpha_1\,d\alpha_2,$$

$$\sigma_{23}=-8\mu\frac{m\kappa\theta_0}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{\alpha_1}\left[\varphi_{,z}+\frac{\varphi_{,2}(h)}{F(-\alpha^2)}X_3(\alpha z,\alpha h)\right]\times$$

$$\times\sin\alpha_1 a\sin\alpha_2 b\cos\alpha_1 x_1\sin\alpha_2 x_2\,d\alpha_1\,d\alpha_2,$$

$$\sigma_{33}=8\mu\frac{m\kappa\theta_0}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\alpha^2}{\alpha_1\alpha_2}\left[\varphi+\frac{\varphi_{,z}(h)}{F(-\alpha^2)}X_4(\alpha z,\alpha h)\right]\times$$

$$\times\sin\alpha_1 a\sin\alpha_2 b\cos\alpha_1 x_1\cos\alpha_2 x_2\,d\alpha_1\,d\alpha_2.$$

Tutaj i w dalszym ciągu funkcja $\varphi(\alpha, z, t, t_0)$ (przy $t_0=0$ funkcja $\varphi(\alpha, z, t)$) dla uproszczenia zapisu oznaczana będzie symbolem φ, natomiast $\varphi_{,z}=d\varphi/dz$, $\varphi_{,zz}=$ $=d^2\varphi/dz^2$ oznaczać będą jej pochodne; funkcje $X_s(\alpha z, \alpha h)$ określone są przez wzory (3.17). Dla dostatecznie dużych czasów ustalą się pola temperatury i naprężenia. Wzory na odpowiednie funkcje łatwo jest uzyskać, podstawiając do (4.9) i (4.19) funkcje (4.15) i (4.16) przy $t\to\infty$:

$$\vartheta(\alpha, z)=\frac{\operatorname{ch}\alpha z}{\operatorname{ch}\alpha h} \tag{4.21}$$

oraz

$$\varphi(\alpha, z)=\frac{1}{2\kappa\alpha\operatorname{ch}^2\alpha h}(z\operatorname{sh}\alpha z\operatorname{ch}\alpha h-h\operatorname{sh}\alpha h\operatorname{ch}\alpha z). \tag{4.22}$$

W tym przypadku, jak wykazują obliczenia, naprężenia σ_{13}, σ_{23}, σ_{33} znikają w każdym punkcie warstwy i stan naprężeń jest quasi-płaski [2 i 3].

2. Rozpatrzymy przypadek, gdy temperatura określona jest równością (4.1) w obszarach kołowych $(0<r<b)$ na płaszczyznach ograniczających warstwę, czyli

$$\theta(r, \pm h, t)=\begin{cases} f(r,t)=\dfrac{\theta_0}{t_0}[t-(t-t_0)H(t-t_0)], & \text{jeśli} \quad 0<r<b, \\ 0, & \text{jeśli} \quad r>b. \end{cases} \tag{4.23}$$

Jest to przypadek osiowo symetrycznego pola temperatury i stanu naprężeń. Dlatego też wygodniej jest posługiwać się układem współrzędnych walcowych r, φ, z oraz przekształceniem całkowym Hankela. Funkcję temperatury, termosprężystego potencjału przemieszczeń oraz funkcję naprężeń można uzyskać w tym przypadku bezpośrednio ze wzorów (2.5), (3.3) i (3.23), posługując się znanymi zależnościami między transformatami Fouriera i Hankela [5].

Rozwiązaniem równania (1.1), gdzie w tym przypadku

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{4.24}$$

przy przekształconych warunkach brzegowych

$$\tilde{\theta}(\alpha, \pm h, p)=\tilde{f}(\alpha, p)=\frac{\theta_0 b(1-e^{-pt_0})}{p^2 t_0}\frac{J_1(\alpha b)}{\alpha}, \tag{4.25}$$

jest funkcja

$$\theta(r, z, t)=\theta_0 b\int_0^\infty \vartheta J_1(\alpha b)J_0(\alpha r)d\alpha, \tag{4.26}$$

gdzie ϑ ma postać (4.8) (przy $t_0=0$ postać (4.15)).

Potencjał termosprężysty ma następującą postać:

$$\Phi(r, z, t)=m\kappa\theta_0 b\int_0^\infty \varphi J_1(\alpha b)J_0(\alpha r)d\alpha. \tag{4.27}$$

Funkcja φ jest tutaj określona jak poprzednio równością (4.11) lub przy $t_0=0$ równością (4.16).

Potencjałowi Φ odpowiadają naprężenia

$$\sigma_{rr}^0=-2\mu\left(\Phi_{,zz}+\frac{1}{r}\Phi_{,r}\right)=$$
$$=-2\mu m\kappa\theta_0 b\int_0^\infty\left[\varphi_{,zz}J_0(\alpha r)-\alpha\varphi\frac{J_1(\alpha r)}{r}\right]J_1(\alpha b)\,d\alpha,$$
$$\sigma_{\varphi\varphi}^0=-2\mu(\Phi_{,zz}+\Phi_{,rr})=$$
$$=-2\mu m\kappa\theta_0 b\int_0^\infty\left[\varphi_{,zz}-\alpha^2\varphi J_0(\alpha r)+\alpha\varphi\frac{J_1(\alpha r)}{r}\right]J_1(\alpha b)\,d\alpha,$$
$$\sigma_{zz}^0=-2\mu\left(\Phi_{,rr}+\frac{1}{r}\Phi_{,r}\right)=2\mu m\kappa\theta_0 b\int_0^\infty\alpha^2\varphi J_1(\alpha b)J_0(\alpha r)\,d\alpha,\tag{4.28}$$
$$\sigma_{rz}^0=2\mu\Phi_{,rz}=-2\mu m\kappa\,\theta_0 b\int_0^\infty\alpha\varphi_{,z}J_1(\alpha b)J_1(\alpha r)\,d\alpha.$$

W rozpatrywanym przypadku funkcja χ będzie miała postać

$$\chi(r,t)=m\kappa\theta_0 b\int_0^\infty\frac{\varphi_{,z}(h)}{F(-\alpha^2)}J_1(db)J_0(dr)\,d\alpha,\tag{4.29}$$

gdzie $\varphi_{,z}(h)$ i $F(-\alpha^2)$ wyrażają się odpowiednio wzorami (4.18), (4.19) i (3.20).

Naprężenia σ_{ij}^* określimy według wzorów podanych w [2]:

$$\sigma_{rr}^*=2\mu\left[X_5(ziD,hiD)D^2+\frac{1}{r}\partial_r X_1(ziD,hiD)\right]\chi=-2\mu m\kappa\theta_0 b\times$$
$$\times\int_0^\infty\alpha^2J_1(\alpha b)\frac{\varphi_{,z}(h)}{F(-\alpha^2)}\left[X_5(\alpha z,\alpha h)J_0(\alpha r)+X_1(\alpha z,\alpha h)\frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r}\right]d\alpha,$$
$$\sigma_{\varphi\varphi}^*=2\mu[X_5(ziD,hiD)D^2+\partial_r^2X_1(ziD,hiD)]\chi=$$
$$=-2\mu m\kappa\theta_0 b\int_0^\infty\alpha^2J_1(\alpha b)\frac{\varphi_{,z}(h)}{F(-\alpha^2)}\left\{X_5(\alpha z,\alpha h)J_0(\alpha r)+\left[J_0(\alpha r)-\frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r}\right]X_1(\alpha z,\alpha h)\right\}d\alpha,\tag{4.30}$$
$$\sigma_{zz}^*=-2\mu X_4(ziD,hiD)D^2\chi=$$
$$=2\mu m\kappa\theta_0 b\int_0^\infty\alpha^2J_1(\alpha b)\frac{\varphi_{,z}(h)}{F(-\alpha^2)}X_4(\alpha z,\alpha h)J_0(\alpha r)\,d\alpha,$$
$$\sigma_{rz}^*=2\mu\partial_r X_3(ziD,hiD)\chi=$$
$$=-2\mu m\kappa\theta_0 b\int_0^\infty\alpha J_1(\alpha b)\frac{\varphi_{,z}(h)}{F(-\alpha^2)}X_3(\alpha z,\alpha h)J_1(\alpha r)\,d\alpha,$$

gdzie funkcje $X_s(\alpha z,\alpha h)$ są jak poprzednio określone wzorem (3.17). Całki, występujące w rozwiązaniu (4.30), można wyznaczyć w sposób przybliżony (podany w [5]).

Ogólne naprężenia $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{0}+\sigma_{ij}^{*}$ są rozwiązaniem zadania, czyniącym zadość nałożonym warunkom brzegowym.

Przy $t\to\infty$ stacjonarny rozkład naprężeń ma postać:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{rr}=-E\alpha_t\theta_0 b\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\alpha z}{\operatorname{ch}\alpha h}\frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r}d\alpha,\\
(4.31)\qquad &\sigma_{\varphi\varphi}=-E\alpha_t\theta_0 b\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\alpha^2}{\operatorname{ch}\alpha h}\left[J_0(\alpha r)-\frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r}\right]J_1(\alpha b)\,d\alpha,\\
&\sigma_{rz}=\sigma_{zz}=0,
\end{aligned}
$$

gdzie E jest modułem sprężystości.

Rozwiązanie to jest zgodne z wynikiem uzyskanym przez W. NOWACKIEGO [3].

5. Przypadek dynamiczny

Do tej pory było rozpatrywane zagadnienie quasi-statyczne z pominięciem wpływu przyspieszeń. Metoda tego rodzaju dopuszczalna jest przy powolnych zmianach pola temperatury. W przypadku szybkiego nagrzania części płaszczyzny $z=h$ należy w równaniach (1.2) uwzględnić wyrazy bezwładnościowe $-\rho\ddot{u}_i$. Będziemy rozpatrywać zagadnienie dynamiczne, nie biorąc pod uwagę oddziaływania wzajemnego pól deformacji i temperatury.

Równanie określające termosprężysty potencjał przemieszczeń ma postać [1]

$$(5.1)\qquad \nabla^2\Phi-\frac{1}{c_1^2}\ddot{\Phi}=m\theta,\qquad c_1=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}.$$

Stąd, przyjmując

$$(5.2)\qquad \Phi(x_1,x_2,z,0)=0,\qquad \dot{\Phi}(x_1,x_2,z,0)=0,$$

$$(5.3)\qquad \Phi(x_1,x_2,\pm h,t)=0$$

oraz wyzyskując przekształcenia Laplace'a i Fouriera, wyznaczymy funkcję Φ. W przypadku symetrycznego pola temperatury (2.5) ma ona postać

$$(5.4)\qquad \Phi^{(s)}=\frac{mc_1^2}{4\pi^2 i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\alpha_1\,d\alpha_2\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\tilde{f}(\alpha_1,\alpha_2,p)}{p\left(p-\frac{c_1^2}{\kappa}\right)}\left(\frac{\operatorname{ch}\gamma_1 z}{\operatorname{ch}\gamma_1 h}-\frac{\operatorname{ch}\omega z}{\operatorname{ch}\omega h}\right)e^{pt-i\alpha_k x_k}dp,$$

natomiast w przypadku antysymetrycznego pola temperatury (2.6) postać:

$$(5.5)\qquad \Phi^{(a)}=\frac{mc_1^2}{4\pi^2 i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\alpha_1\,d\alpha_2\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\tilde{f}(\alpha_1,\alpha_2,p)}{p\left(p-\frac{c_1^2}{\kappa}\right)}\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma_1 z}{\operatorname{sh}\gamma_1 h}-\frac{\operatorname{sh}\omega z}{\operatorname{sh}\omega h}\right)e^{pt-i\alpha_k x_k}dp.$$

Zarówno tu, jak i w dalszym ciągu, używamy oznaczeń

$$\gamma_1=\sqrt{\alpha^2+\frac{p^2}{c_1^2}},\qquad \omega=\sqrt{\alpha^2+\frac{p}{\kappa}},\qquad \alpha^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2,\qquad \alpha_k x_k=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2.$$

Naprężenia można obliczyć według wzorów

$$\sigma_{ij}^{0} = 2\mu(\Phi_{,ij} - \delta_{ij}\nabla^2\Phi) + \rho\ddot{\Phi}\delta_{ij}. \tag{5.6}$$

Jak wynika z tego wzoru naprężenie σ_{33}^{0}, zgodnie z warunkiem brzegowym (1.6), znika w płaszczyznach $z = \pm h$. Naprężenia styczne natomiast są różne od zera i przyjmują wartości następujące:

a) w przypadku symetrycznego pola temperatury

$$\sigma_{13}^{0} = \pm 2\mu\partial_1\tau, \qquad \sigma_{23}^{0} = \pm 2\mu\partial_2\tau, \tag{5.7}$$

gdzie

$$\tau(x_1, x_2, t) = \Phi_{,z}^{(s)}(x_1, x_2, h, t) = \tag{5.8}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_1\, d\alpha_2 \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \Phi_{,z}^{(s)}(\alpha_1, \alpha_2, h, p)\, e^{pt - i\alpha_k x_k}\, dp$$

oraz

$$\Phi_{,z}^{(s)}(\alpha_1, \alpha_2, h, p) = \frac{mc_1^2 \tilde{f}(\alpha_1, \alpha_2, p)}{p\left(p - \frac{c_1^2}{\kappa}\right)}(\gamma_1 \operatorname{th}\gamma_1 h - \omega \operatorname{th}\omega h), \tag{5.9}$$

b) w przypadku antysymetrycznego pola temperatury

$$\sigma_{13}^{0} = 2\mu\partial_1 S, \qquad \sigma_{23}^{0} = 2\mu\partial_2 S, \tag{5.10}$$

gdzie

$$S(x_1, x_2, t) = \Phi_{,z}^{(a)}(x_1, x_2, h, t) = \tag{5.11}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_1\, d\alpha_2 \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \Phi_{,z}^{(a)}(\alpha_1, \alpha_2, h, p)\, e^{pt - i\alpha_k x_k}\, dp$$

oraz

$$\Phi_{,z}^{(a)}(\alpha_1, \alpha_2, h, p) = \frac{mc_1^2 \tilde{f}(\alpha_1, \alpha_2, p)}{p\left(p - \frac{c_1^2}{\kappa}\right)}(\gamma_1 \operatorname{cth}\gamma_1 h - \omega \operatorname{cth}\omega h). \tag{5.12}$$

Dla zrównoważenia tych naprężeń należy wyznaczyć dodatkowo stan naprężeń o składowych σ_{ij}^{*}. Określenie naprężeń σ_{ij}^{*} sprowadza się do rozwiązania równań

$$\mu\nabla^2 u_i^{*} + (\lambda + \mu)u_{j,ji}^{*} - \rho\ddot{u}_i^{*} = 0, \tag{5.13}$$

z następującymi warunkami brzegowymi dla $z = \pm h$:

$$\text{a)}\quad \sigma_{33}^{*} = 0, \qquad \sigma_{k3}^{*} = \mp 2\mu\,\partial_k\tau; \tag{5.14}$$

$$\text{b)}\quad \sigma_{33}^{*} = 0, \qquad \sigma_{k3}^{*} = -2\mu\partial_k S, \tag{5.15}$$

$$k = 1, 2.$$

Zastosujemy do tego zagadnienia dynamicznego metodę A. I. LURIEGO [2]. Wprowadzimy oznaczenia

(5.16)
$$\frac{\partial}{\partial x_3}=\frac{\partial}{\partial z}=(\ )', \quad D^2=\partial_1^2+\partial_2^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad \partial_t=\frac{\partial}{\partial t},$$
$$\Delta_1^2=D^2-\frac{\partial_t^2}{c_1^2}, \quad \Delta_2^2=D^2-\frac{\partial_t^2}{c_2^2}, \quad c_1^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}, \quad c_2^2=\frac{\mu}{\rho}, \quad \nu=\frac{\lambda+\mu}{\mu},$$

przy użyciu których równania (5.13) będą miały postać

(5.17)
$$\begin{aligned} &u_1^{*''}+(\Delta_2^2+\nu\partial_1^2)u_1^*+\nu\partial_1\partial_2 u_2^*+\nu\partial_1 w^{*'}=0,\\ &u_2^{*''}+(\Delta_2^2+\nu\partial_2^2)u_2^*+\nu\partial_1\partial_2 u_1^*+\nu\partial_2 w^{*'}=0,\\ &(1+\nu)w^{*''}+\Delta_2^2 w^*+\nu\partial_1 u_1^{*'}+\nu\partial_2 u_2^{*'}=0. \end{aligned}$$

Rozpatrując ∂_1, ∂_2, Δ_2^2 jako stałe znajdziemy całkę tego układu trzech równań różniczkowych zwyczajnych ze zmienną niezależną z przy warunkach początkowych:

a) dla zagadnienia (5.14) przy $z=0$

(5.18)
$$u_k^*=u_{k0}^*, \quad w^*=0, \quad u_k^{*'}=0, \quad w^{*'}=w_0^{*'};$$

b) dla zagadnienia (5.15) przy $z=0$

(5.19)
$$u_k^*=0, \quad w^*=w_0^*, \quad u_k^{*'}=u_{k0}^{*'}, \quad w^{*'}=0, \quad k=1,2.$$

W wyniku uzyskamy:

a) w przypadku (5.18)

(5.20)
$$\begin{aligned} u_k^*&=\cos\Delta_2 z u_{k0}^*+\frac{\nu}{\Delta_1^2-\Delta_2^2}(\cos\Delta_1 z-\cos\Delta_2 z)\partial_k e_0,\\ w^*&=\frac{\sin\Delta_2 z}{\Delta_2}w_0^{*'}-\frac{\nu\Delta_1^2}{\Delta_1^2-\Delta_2^2}\left(\frac{\sin\Delta_1 z}{\Delta_1}-\frac{\sin\Delta_2 z}{\Delta_2}\right)e_0, \end{aligned}$$

gdzie

(5.21)
$$e_0=\partial_1 u_{10}^*+\partial_2 u_{20}^*+w_0^{*'}, \quad k=1,2;$$

b) w przypadku (5.19)

(5.22)
$$\begin{aligned} u_k^*&=\frac{\sin\Delta_2 z}{\Delta_2}u_{k0}^{*'}+\frac{\nu}{1+\nu}\,\frac{1}{\Delta_1^2-\Delta_2^2}\left(\frac{\sin\Delta_1 z}{\Delta_1}-\frac{\sin\Delta_2 z}{\Delta_2}\right)\partial_k e_0^*,\\ w^*&=\cos\Delta_2 z w_0^*+\frac{\nu}{1+\nu}\,\frac{1}{\Delta_1^2-\Delta_2^2}(\cos\Delta_1 z-\cos\Delta_2 z)e_0^*, \end{aligned}$$

gdzie

(5.23)
$$e_0^*=\partial_1 u_{10}^{*'}+\partial_2 u_{20}^{*'}-\Delta_2^2 w_0^*, \quad k=1,2.$$

Jak wynika ze wzorów (5.20) - (5.23) rozwiązanie zagadnienia sprowadza się do wyznaczenia początkowych funkcji u_{k0}^*, $w_0^{*'}$ i $u_{k0}^{*'}$, w_0^*. Wyznaczymy je z warunków brzegowych w płaszczyznach $z=\pm h$, wprowadzając funkcję naprężeń (postępowanie identyczne z podanym w [2]). W przypadku warunków brzegowych (5.14) lub (5.15) wystarczy wprowadzić jedną funkcję naprężeń. Wobec pełnej analogii z przypadkiem statycznym [2], pominiemy tok postępowania, podając tylko ostateczne wzory na przemieszczenia i naprężenia. W zagadnieniu (5.14) mają one postać:

$$u_k^* = -\partial_k X_1(zi\Delta_k, hi\Delta_k)\chi^*, \quad w^* = X_2(zi\Delta_k, hi\Delta_k)\chi^*; \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{k3}^* &= 2\mu\,\partial_k X_3(zi\Delta_k, hi\Delta_k)\chi^*, \\ \sigma_{33}^* &= -2\mu X_4(zi\Delta_k, hi\Delta_k)D^2\chi^*, \\ \sigma_{11}^* &= 2\mu\,[X_5(zi\Delta_k, hi\Delta_k)D^2 + \partial_2^2 X_1(zi\Delta_k, hi\Delta_k)]\,\chi^*, \\ \sigma_{22}^* &= 2\mu\,[X_5(zi\Delta_k, hi\Delta_k)D^2 + \partial_1^2 X_1(zi\Delta_k, hi\Delta_k)]\,\chi^*, \\ \sigma_{12}^* &= -2\mu\,\partial_1\partial_2 X_1(zi\Delta_k, hi\Delta_k)\chi^*, \quad k=1,2. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Funkcje operatorowe $X_s(zi\Delta_k, hi\Delta_k)$ $(s=1, 2, ..., 5)$ uzyskuje się z funkcji $X_k(\gamma_k z, \gamma_k h)$ zastępując α przez iD oraz $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + p^2/c_k^2}$ przez $i\Delta_k$ $(\Delta_k = \sqrt{D^2 - \gamma_t^2/c_k^2})$. Funkcje $X(\gamma_k z, \gamma_k h)$ mają postać:

$$\begin{aligned} X_1(\gamma_k z, \gamma_k h) &= (\alpha^2+\gamma_2^2)\operatorname{ch}\gamma_1 h \operatorname{ch}\gamma_2 z - 2\alpha^2 \operatorname{ch}\gamma_1 z \operatorname{ch}\gamma_2 h, \\ X_2(\gamma_k z, \gamma_k h) &= \alpha^2\left[2\gamma_1 \operatorname{sh}\gamma_1 z \operatorname{ch}\gamma_2 h - (\alpha^2+\gamma_2^2)\operatorname{ch}\gamma_1 h \frac{\operatorname{sh}\gamma_2 z}{\gamma_2}\right], \\ X_3(\gamma_k z, \gamma_k h) &= 4\alpha^2\gamma_1 \operatorname{sh}\gamma_1 z \operatorname{ch}\gamma_2 h - (\alpha^2+\gamma_2^2)^2 \operatorname{ch}\gamma_1 h \frac{\operatorname{sh}\gamma_2 z}{\gamma_2}, \\ X_4(\gamma_k z, \gamma_k h) &= (\alpha^2+\gamma_2^2)\,(\operatorname{ch}\gamma_1 \operatorname{ch}\gamma_2 h - \operatorname{ch}\gamma_1 h \operatorname{ch}\gamma_2 z), \\ X_5(\gamma_k z, \gamma_k h) &= (2\gamma_1^2 - \gamma_2^2 + \alpha^2)\operatorname{ch}\gamma_1 z \operatorname{ch}\gamma_2 h - (\alpha^2+\gamma_2^2)\operatorname{ch}\gamma_1 h \operatorname{ch}\gamma_2 z. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Funkcja naprężeń $\chi^*(x_1, x_2, t)$ powinna być wyznaczona z równania

$$F(\Delta_k^2)\chi^* = 2\tau. \tag{5.27}$$

We wzorze tym

$$F(\Delta_k^2) = (D^2+\Delta_2^2)^2 \cos\Delta_1 h \frac{\sin\Delta_2 h}{\Delta_2} - 4D^2\Delta_1 \sin\Delta_1 h \cos\Delta_2 h, \tag{5.28}$$

co oznacza, że $F(\Delta_k^2)$ jest funkcją operatorową, którą można przedstawić w postaci szeregu potęgowego

$$\begin{aligned} F(\Delta_k^2) = 4D^2\Delta_1^2 h \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{n+m}\frac{(\Delta_1 h)^{2n}}{(2n+1)!}\frac{(\Delta_2 h)^{2m}}{(2m)!} - \\ -(\Delta_2^2+D^2)h\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{n+m}\frac{(\Delta_1 h)^{2n}}{(2n)!}\frac{(\Delta_2 h)^{2m}}{(2m+1)!}; \end{aligned} \tag{5.29}$$

$\tau(x_1, x_2, t)$ jest obciążeniem określonym we wzorze (5.8) przez całki Fouriera i Laplace'a.

Funkcja naprężeń ma następującą postać:

$$\chi^* = \frac{1}{2\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_1 d\alpha_2 \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\tilde{\Phi}^{(s)}_{,z}(\alpha_1, \alpha_2, h, p)}{F(-\gamma_k^2)} e^{pt - i\alpha_k x_k} dp, \tag{5.30}$$

gdzie funkcja $\tilde{\Phi}^{(s)}_{,z}(\alpha_1, \alpha_2, h, p)$ określona jest wzorem (5.9), a

$$F(-\gamma_k^2) = (\alpha^2 + \gamma_2^2)^2 \operatorname{ch} \gamma_1 h \frac{\operatorname{sh} \gamma_2 h}{\gamma_2} - 4\alpha^2 \gamma_1 \operatorname{sh} \gamma_1 h \operatorname{ch} \gamma_2 h. \tag{5.31}$$

Za pomocą szeregu (5.29) można przekonać się, że zastosowanie operatora $F(\Delta_k^2)$ do funkcji postaci (5.30) sprowadza się do pomnożenia tej funkcji przez $F(-\gamma_k^2)$:

$$F(\Delta_k^2)\chi^* = F(-\gamma_k^2)\chi^*, \qquad \Delta_k^2 = D^2 - \frac{\partial_t^2}{c_k^2}, \qquad \gamma_k^2 = \alpha^2 + \frac{p^2}{c_k^2}. \tag{5.32}$$

Wynika z tego, że funkcja (5.30) spełnia równanie (5.27). Mamy przy tym

$$X(zi\Delta_k, hi\Delta_k)\chi^* = X(\gamma_k z, \gamma_k h)\chi^*. \tag{5.33}$$

Podobnie jak poprzednio, podstawiając do wzorów (5.25) funkcję naprężeń (5.30) oraz stosując regułę (5.33), wyznaczymy dodatkowy stan naprężeń o składowych σ_{ij}^*.

Analogicznie przemieszczenia u_i^* i naprężenia σ_{ij}^* mają postać

$$u_k^* = -\partial_k \Psi_1(\gamma_k z, \gamma_k h)\psi^*, \qquad w^* = \Psi_2(\gamma_k z, \gamma_k h)\psi^*; \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{k3}^3 &= 2\mu\partial_k \Psi_3(\gamma_k z, \gamma_k h)\psi^*, \\
\sigma_{33}^* &= 2\mu\alpha^2 \Psi_4(\gamma_k z, \gamma_k h)\psi^*, \\
\sigma_{11}^* &= -2\mu[\alpha^2 \Psi_5(\gamma_k z, \gamma_k h) - \partial_2^2 \Psi_1(\gamma_k z, \gamma_k h)]\psi^*, \\
\sigma_{22}^* &= -2\mu[\alpha^2 \Psi_5(\gamma_k z, \gamma_k h) - \partial_1^2 \Psi_1(\gamma_k z, \gamma_k h)]\psi^*, \\
\sigma_{12}^* &= -2\mu\partial_1\partial_2 \Psi_1(\gamma_k z, \gamma_k h)\psi^*,
\end{aligned} \tag{5.35}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\Psi_1(\gamma_k z, \gamma_k h) &= 2\alpha^2 \gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_2 h \frac{\operatorname{sh} \gamma_1 z}{\gamma_1} - (\alpha^2 + \gamma_2^2)\gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_2 z \frac{\operatorname{sh} \gamma_1 h}{\gamma_1}, \\
\Psi_2(\gamma_k z, \gamma_k h) &= \alpha^2 \left[(\alpha^2 + \gamma_2^2) \operatorname{ch} \gamma_2 z \frac{\operatorname{sh} \gamma_1 h}{\gamma_1} - 2\gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_2 h \operatorname{ch} \gamma_1 z\right], \\
\Psi_3(\gamma_k z, \gamma_k h) &= (\alpha^2 + \gamma_2^2)^2 \operatorname{ch} \gamma_2 z \frac{\operatorname{sh} \gamma_1 h}{\gamma_1} - 4\alpha^2 \gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_2 h \operatorname{ch} \gamma_1 z, \\
\Psi_4(\gamma_k z, \gamma_k h) &= (\alpha^2 + \gamma_2^2)\left[\gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_2 z \frac{\operatorname{sh} \gamma_1 h}{\gamma_1} - \gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_2 h \frac{\operatorname{sh} \gamma_1 z}{\gamma_1}\right], \\
\Psi_5(\gamma_k z, \gamma_k h) &= (\alpha^2 + \gamma_2^2)\gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_2 z \frac{\operatorname{sh} \gamma_1 h}{\gamma_1} - (2\gamma_1^2 - \gamma_2^2 + \alpha^2)\gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_2 h \frac{\operatorname{sh} \gamma_1 z}{\gamma_1};
\end{aligned} \tag{5.36}$$

$$\psi^*(x_1, x_2, t) \frac{1}{2\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_1 d\alpha_2 \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\Phi^{(a)}_{,z}(\alpha_1, \alpha_2, h, p)}{F_1(-\gamma_k^2)} e^{pt - i\alpha_k x_k} dp. \tag{5.37}$$

Funkcja $\Phi^{(a)}_{,z}(\alpha_1, \alpha_2, h, p)$ określona jest przez wzór (5.12) oraz

$$F_1(-\gamma_k^2) = 4\alpha^2\gamma_2 \operatorname{sh}\gamma_2 h \operatorname{ch}\gamma_1 h - (\alpha^2+\gamma_2^2)^2 \operatorname{ch}\gamma_2 h \frac{\operatorname{sh}\gamma_1 h}{\gamma_1}. \tag{5.38}$$

Uzyskaliśmy w ten sposób ogólne rozwiązanie sformułowanego dynamicznego zagadnienia termosprężystości dla warstwy.

Dla przykładu rozpatrzymy zagadnienie nagłego ogrzania obszarów kołowych w płaszczyznach ograniczających warstwę:

$$\theta(r, \pm h, t) = \begin{cases} f(r,t) = \theta_0 H(t), & \text{jeśli} \quad 0 < r < b, \\ 0, & \text{jeśli} \quad r > b. \end{cases} \tag{5.39}$$

Pole temperatury ma podobnie jak poprzednio postać (4.26). Potencjał termosprężysty i funkcja naprężeń są następujące:

$$\Phi = \frac{mc_1^2\theta_0 b}{2\pi i} \int_0^\infty J_1(\alpha b) J_0(\alpha r)\, d\alpha \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tilde{\Phi}^0(\alpha, z, p) e^{pt}\, dp, \tag{5.40}$$

gdzie

$$\tilde{\Phi}^0(\alpha, z, p) = \frac{1}{p^2\left(p - \frac{c_1^2}{\kappa}\right)} \left(\frac{\operatorname{ch}\gamma_1 z}{\operatorname{ch}\gamma_1 h} - \frac{\operatorname{ch}\omega z}{\operatorname{ch}\omega h}\right); \tag{5.41}$$

$$\chi^* = \frac{mc_1^2\theta_0 b}{\pi i} \int_0^\infty J_1(\alpha b) J_0(\alpha r)\, d\alpha \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\tilde{\Phi}^0_{,z}(\alpha, h, p)}{F(-\gamma_k^2)} e^{pt}\, dp, \tag{5.42}$$

gdzie

$$\tilde{\Phi}^0_{,z}(\alpha, h, p) = \frac{1}{p^2\left(p - \frac{c_1^2}{\kappa}\right)} (\gamma_1 \operatorname{th}\gamma_1 h - \omega \operatorname{th}\omega h). \tag{5.43}$$

Ze wzorów (5.6) wyznaczymy

$$\begin{aligned}
\sigma^0_{rr} &= -\frac{\mu mc_1^2\theta_0 b}{2\pi i} \int_0^\infty J_1(\alpha b)\, d\alpha \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[\left(2\tilde{\Phi}^0_{,zz} - \frac{p^2}{c_2^2}\tilde{\Phi}^0\right) J_0(\alpha r) - \right. \\
&\qquad \left. -2\tilde{\Phi}^0 \frac{\alpha J_1(\alpha r)}{r}\right] e^{pt}\, dp, \\
\sigma^0_{\varphi\varphi} &= -\frac{\mu mc_1^2\theta_0 b}{2\pi i} \int_0^\infty J_1(\alpha b)\, d\alpha \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{\left[2\tilde{\Phi}^0_{,zz} - (\alpha^2+\gamma_2^2)\tilde{\Phi}^0\right] J_0(\alpha r) + \right. \\
&\qquad \left. +2\tilde{\Phi}^0 \frac{\alpha J_1(\alpha r)}{r}\right\} e^{pt}\, dp, \\
\sigma^0_{zz} &= \frac{\mu mc_1^2\theta_0 b}{2\pi i} \int_0^\infty J_1(\alpha b)\, d\alpha \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (\alpha^2+\gamma_2^2)\tilde{\Phi}^0 J_0(\alpha r) e^{pt}\, dp, \\
\sigma^0_{rz} &= -\frac{\mu mc_1^2\theta_0 b}{2\pi i} \int_0^\infty J_1(\alpha b)\, d\alpha \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \alpha\tilde{\Phi}^0_{,z} J_1(\alpha r) e^{pt}\, dp,
\end{aligned} \tag{5.44}$$

gdzie

$$\tilde{\Phi}^0_{,z} = \frac{d\tilde{\Phi}_0(\alpha, z, p)}{dz}, \quad \tilde{\Phi}^0_{,zz} = \frac{d^2 \tilde{\Phi}^0(\alpha, z, p)}{dz^2}.$$

Przykładane naprężenia σ^*_{ij} określone są ze wzorów (5.25) dokładnie tak samo jak w przypadku quasi-statycznym (4.30):

$$\sigma^*_{rr} = -2\mu \frac{mc_1^2 \theta_0 b}{\pi i} \int_0^\infty \alpha^2 J_1(\alpha b)\, d\alpha \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\tilde{\Phi}^0_{,z}(\alpha, h, p)}{F(-\gamma_k^2)} \times$$
$$\times \left[X_5(\gamma_k z, \gamma_k h) J_0(\alpha r) + \frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r} X_1(\gamma_k z, \gamma_k h) \right] e^{pt}\, dp,$$

$$\sigma^*_{\varphi\varphi} = -2\mu \frac{mc_1^2 \theta_0 b}{\pi i} \int_0^\infty \alpha^2 J_1(\alpha b)\, d\alpha \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\tilde{\Phi}^0_{,z}(\alpha, h, p)}{F(-\gamma_k^2)} \times$$

(5.45)
$$\times \left\{ X_5(\gamma_k z, \gamma_k h) J_0(\alpha r) + \left[J_0(\alpha r) - \frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r} \right] X_1(\gamma_k z, \gamma_k h) \right\} e^{pt}\, dp,$$

$$\sigma^*_{zz} = 2\mu \frac{mc_1^2 \theta_0 b}{\pi i} \int_0^\infty \alpha^2 J_1(\alpha b)\, d\alpha \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\tilde{\Phi}^0_{,z}(\alpha, h, p)}{F(-\gamma_k^2)} \times$$
$$\times X_4(\gamma_k z, \gamma_k h) J_0(\alpha r) e^{pt}\, dp,$$

$$\sigma^*_{rz} = 2\mu \frac{mc_1^2 \theta_0 b}{\pi i} \int_0^\infty \alpha J_1(\alpha b)\, d\alpha \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\tilde{\Phi}^0_{,z}(\alpha, h, p)}{F(-\gamma_k^2)} \times$$
$$\times X_3(\gamma_k z, \gamma_k h) J_1(\alpha r) e^{pt}\, dp.$$

W tym przypadku, w odróżnieniu od przypadku quasi-statecznego, nie tylko $\tilde{\Phi}^0_{,z}(\alpha, h, p)$, ale również $F(-\gamma_k^2)$ i $X_s(\gamma_k z, \gamma_k h)$ są funkcjami p, parametru przekształcenia Laplace'a. W związku z tym obliczenie całek przekształcenia odwrotnego nastręcza poważne trudności.

Literatura cytowana w tekście

1. W. Nowacki, *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości*, IPPT PAN, Warszawa 1966.
2. A. I. Lurie, *Prostranstwiennyje zadaczi tieorii uprugosti*, Gostiechizdat, Moskwa 1955.
3. W. Nowacki, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.
4. A. W. Łykow, *Tieorija tiepłoprowodnosti*, «Wysszaja Szkoła» Moskwa 1967.
5. I. Sneddon, *Prieobrazowanija Fourie*, I. L., Moskwa 1955.

Резюме

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В УПРУГОМ НЕОГРАНИЧЕННОМ СЛОЕ, ВЫЗВАННЫЕ НАГРЕВОМ УЧАСТКА ЕГО ПОВЕРХНОСТИ

В работе получено общее решение термоупругой задачи для бесконечного слоя, когда в некоторой конечной области, принадлежащей верхней границе слоя, задана температура в виде функции координат и времени, а вне этой области и в нижней границе слоя температура равна нулю. Рассмотрены отдельно симметричное и антисимметричное относительно срединной плоскости слоя температурные поля. Задача решена в квазистатической и динамической постановках с использованием интегральных преобразований и термоупругого потенциала перемещений. Граничные условия корректируются путем решения однородных уравнений Ляме методом начальных функций А. И. Лурье. В качестве примера рассмотрены случаи нагрева прямоугольных и круговых областей, принадлежащих плоскостями, ограничивающим слой. Динамическое решение представлено через интегралы обращения.

Summary

NON-STATIONARY THERMAL STRESSES IN INFINITE ELASTIC LAYER HEATED ON A PART OF ITS SURFACE

On some finite part of the upper surface of the infinite layer the temperature is given as a function of place and time, on the remaining part and on the lower surface the temperature equals zero. The general solution of the thermoelastic problem for this layer is obtained. The symmetric and antisymmetric temperature fields are considered separately. The quasi-static approximation and the solution of the dynamic problem are derived by means of integral transforms and thermoelastic potential. The boundary conditions are corrected on solving the homogeneous Lamé equations with the aid of Lurie's method of initial functions. Heating of rectangular and circular regions constituting parts of planes bounding the layer is considered as an example. In the dynamic case the solution is expressed by the inverse Laplace transforms.

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 lipca 1973 r.