

KONSOLIDACJA WARSTWY SPRĘŻYTEJ POD WPLYWEM LINIOWO ZMIENNEGO OBCIĄŻENIA ZEWNĘTRZNEGO

JERZY DOMSKI i JÓZEF WILK (KRAKÓW I GDAŃSK)

W pracy przedstawiono analizę rozkładu ciśnienia porowego cieczy oraz naprężeń w szkielecie oraz przebieg ich zmienności w czasie — przy różnych prędkościach przyrostu obciążenia zewnętrznego — konsolidowanej warstwy sprężystej. Zadania rozwiązano przy warunkach płaskiego stanu odkształcenia na podstawie metody różnic skończonych.

1. WSTĘP

Zagadnienie konsolidacji warstwy sprężystej jest jednym z ważniejszych (szczególnie z punktu widzenia praktycznego) zagadnień mechaniki gruntów. Rozwiązanie szeregu zadań tego typu dla warstw o zmiennej liniowo i nieliniowo grubości przy założeniu nagłego statycznie przyłożonego i niezmiennego w czasie obciążenia zewnętrznego — przedstawiono w [8]. W niniejszej pracy przedstawiamy bardziej interesujące z punktu widzenia poznawczego i praktycznego fragmenty wyników dotyczących stanu naprężeń konsolidującej warstwy sprężystej o stałej grubości w płaskim stanie odkształcenia pod wpływem narastającego w sposób liniowy a później stałego obciążenia zewnętrznego. Dla oceny wpływu intensywności przyrostu obciążenia zewnętrznego na charakter procesu konsolidacji rozwiązano kilka zadań przy różnych przebiegach intensywności. Problem został sformułowany na gruncie teorii konsolidacji Biota [2]. Ze względu na dość skomplikowaną postać wyprowadzonych układów równań różniczkowych zastosowano metodę różnic skończonych, dzięki czemu uzyskano efektywne rozwiązania postawionych zadań.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Układ równań teorii konsolidacji obejmuje następujące znane równania [4]:
równowagi

$$(\sigma_{ij} + \sigma \delta_{ij})_{,j} = 0,$$

nierozdzielności

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0,$$

fizyczne

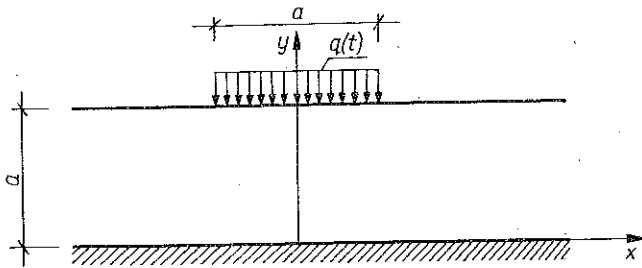
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1-\nu} g \delta_{ij} \right) + \frac{\sigma}{3H} \delta_{ij},$$

filtracji

$$k \nabla^2 \sigma = -\frac{2}{3H} \dot{g} + \frac{2}{R} \dot{\sigma}.$$

W równaniach tych wprowadzono następujące oznaczenia:

- σ_{ij} składowa tensora naprężeń przejmowanych przez szkielet,
 - σ ciśnienie przejmowane przez ciecz,
 - δ_{ij} symbol Kroneckera,
 - ε_{ij} składowa tensora odkształceń,
 - ν współczynnik Poissona,
 - G moduł odkształcenia postaciowego,
 - k współczynnik przepuszczalności,
 - $1/H$ miara ściśliwości gruntu przy zmianie zawartości wody,
 - $1/R$ miara zawartości wody przy danej zmianie jej ciśnienia,
 - $\vartheta = \sigma_{ij}$.
- Kropką oznaczono różniczkowanie względem czasu t .



Rys. 1

Dla rozpatrywanego tu przypadku płaskiego stanu odkształcenia składowe naprężeń w szkielecie zastąpiono funkcją naprężeń Airy'ego:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

dzięki czemu układ naprężeniowych równań konsolidacji można w znany sposób sprowadzić do postaci:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} (RA + 2NR - Q^2) \nabla^2 \nabla^2 F &= 2N(Q + R) \nabla^2 \sigma, \\ (RN + RA - Q^2) \nabla^2 \sigma &= b(2Q + A + N + R) \dot{\sigma} - \frac{b}{2} (Q + R) \nabla^2 \dot{F}, \end{aligned}$$

gdzie b oznacza współczynnik oporności przepływu związany ze współczynnikiem przepuszczalności zależnością $b = 1/k$,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

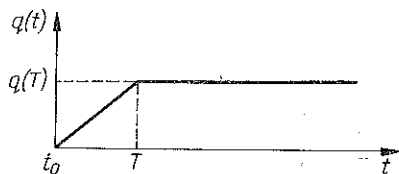
operator Laplace'a oraz A, N, Q, R stałe materiałowe.

Warunki początkowe przyjęto przy założeniu, że obciążenie zewnętrzne narasta od wartości $q(t_0) = 0$ w chwili początkowej do $q(T) = \text{const}$ po czasie T . Przy dodatkowym założeniu nieważkości ośrodka konsolidującego przyjmują one postać:

$$(2.2) \quad [\sigma]_{t=0} = 0, \quad [F]_{t=0} = 0.$$

Warunki brzegowe sformułowano przy założeniu, że warstwa spoczywa na nieodkształconym podłożu, a jej brzegi poziome są gładkie i przepuszczalne dla cieczy. Ograniczenia pionowe warstwy są tu niezbędne ze względu na zastosowaną metodę rozwiązania, natomiast warunki dla pionowych części brzegu ustawiono przy założeniu, że wpływ obciążenia zewnętrznego staje się pomijalny w pewnej odległości od miejsca jego przyłożenia. Ostatecznie warunki brzegowe dla $y=a$ przyjmują postać

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \tau_{xy} &= 0, \\ \sigma &= 0, \\ \sigma_y &= 0, \quad \text{dla } |x| > a/2, \\ \sigma_y &= q(t) \quad \text{dla } |x| < a/2, \end{aligned}$$



Rys. 2

przy czym $q(t)$ rośnie liniowo od $q(t_0)=0$ do wartości $q(T)=\text{const}$. Wykres funkcji określającej sposób przykładania obciążenia przedstawiono na rys. 2.

Warunki brzegowe dla $y=0$ przyjmują postać

$$(2.4) \quad \sigma=0, \quad u=0, \quad v=0,$$

gdzie u i v są składowymi przemieszczeń. Dla rozwiązania metodą różnic skończonych zadania brzegowego dla obszaru nieskończonego należy go z konieczności ograniczyć. Stosownie do warunku zanikania naprężeń w szkielecie i ciśnienia cieczy dla $|x|=3/2a$ mamy

$$(2.5) \quad F=0, \quad \frac{\partial F}{\partial n}=0, \quad \sigma=0.$$

3. ROZWIĄZANIE ZADANIA

Dla rozwiązania tak sformułowanego zadania należy rozwiązać układ równań (2.1) z uwzględnieniem warunków początkowych (2.2) oraz warunków brzegowych (2.3), (2.4) i (2.5). W układzie równań (2.1) pochodne funkcji F i σ względem czasu zastąpiono odpowiednimi ilorazami różnicowymi, otrzymując równania

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 F_{(t)} - \frac{2N(Q+R)}{RA+2NR-Q^2} \nabla^2 \sigma_{(t)} &= 0, \\ \frac{2(RN+RA-Q^2)}{b(Q+R)} \nabla^2 \sigma_{(t)} - \frac{2(2Q+A+N+R)}{Q+R} \frac{\sigma_{(t)} - \sigma_{(t-1)}}{\Delta t} &+ \\ &+ \frac{\nabla^2 F_{(t)} - \nabla^2 F_{(t-1)}}{\Delta t} = 0, \end{aligned}$$

gdzie Δt oznacza krok na osi czasu. W równaniach (3.1) pochodne względem zmiennych przestrzennych zastępujemy odpowiednimi ilorazami różnicowymi przy zastosowaniu kwadratowej siatki o boku $\Delta x = \Delta y = \Delta$.

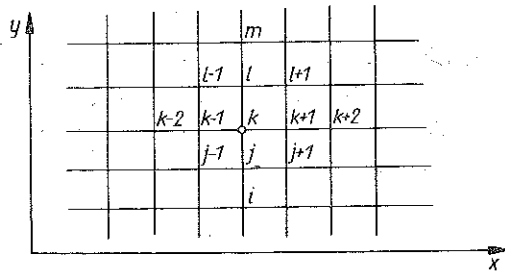
Układ równań różnicowych dla węzła k przy oznaczeniach jak na rys. 3 przyjmuje postać następującą:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} 20F_{(t)k} - 8F_{(t)k+1} - 8F_{(t)j} - 8F_{(t)l} - 8F_{(t)k-1} + 2F_{(t)j+1} + 2F_{(t)j-1} + \\ + 2F_{(t)l+1} + 2F_{(t)l-1} + F_{(t)k+2} + F_{(t)k-2} + F_{(t)l} + F_{(t)m} + \\ + c_1 \sigma_{(t)k-1} + c_1 \sigma_{(t)k+1} - 4c_1 \sigma_{(t)k} + c_1 \sigma_{(t)j} + c_1 \sigma_{(t)l} = 0, \\ F_{(t)k+1} + F_{(t)k-1} - 4F_{(t)k} + F_{(t)j} + F_{(t)l} + c_2 \sigma_{(t)k+1} + c_2 \sigma_{(t)k-1} - \\ - (4c_2 + c_3) \sigma_{(t)k} + c_2 \sigma_{(t)j} + c_2 \sigma_{(t)l} = c_{(t-1)4}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.3) \quad \begin{aligned} c_1 &= -\frac{2N(Q+R) \Delta^2}{RA + 2NR - Q^2}, & c_2 &= \frac{2(RN + RA - Q^2) \Delta t}{b(Q+R)}, \\ c_3 &= \frac{2(2Q + A + N + R) \Delta^2}{Q+R}, \end{aligned}$$

$$c_{(t-1)4} = F_{(t-1)k+1} + F_{(t-1)k-1} - 4F_{(t-1)k} + F_{(t-1)j} + F_{(t-1)l} - c_3 \sigma_{(t-1)k}.$$



Rys. 3

Sposób uwzględnienia warunków początkowych i brzegowych jest ogólnie znany, jedynie krótkim komentarzem opatrzyć należy warunki brzegowe przemieszczeniowe, które wyrażamy za pomocą znanych wzorów:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} u &= \frac{1}{E} \int_0^{x_1} (\sigma_x - \nu \sigma_y) dx \approx \frac{1}{E} \sum \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \Delta - \frac{\nu}{E} \sum \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Delta = 0, \\ v &= \frac{1}{E} \int_0^{y_1} (\sigma_y - \nu \sigma_x) dy \approx \frac{1}{E} \sum \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Delta - \frac{\nu}{E} \sum \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \Delta = 0. \end{aligned}$$

Uwzględniono tu zerowe wartości przemieszczenia sztywnego (nieodkształcalnego) podłoża.

W przedstawionych w pracy zadaniach przyjęto następujące wartości parametrów materiałowych charakteryzujących cechy ośrodka konsolidującego: współczynnik ściśliwości próbki izolowanej $x=0,30 \text{ cm}^2/\text{kG}$, współczynnik rozszerzalności objętościowej $\delta=0,005 \text{ cm}^2/\text{kG}$, współczynnik zawartości cieczy $\gamma=0,01 \text{ cm}^2/\text{kG}$,

uogólniony moduł ściśliwości $E=100 \text{ kG/cm}^2$, współczynnik Poissona $\nu=0,3$, porowatość $f=0,35$ oraz współczynnik przepuszczalności $k=10^{-4} \text{ cm}^4/\text{kG sek}$.

Przyjęte wartości parametrów fizycznych uzyskano w efekcie wrywkowych badań laboratoryjnych dla kilku prób gruntów gliniastych. Przyjęto ponadto $\Delta t=10$ dni jako krok czasowy oraz $\Delta x=\Delta y=10^2 \text{ cm}$ jako bok kwadratowego oczka siatki przestrzennej. W pracy przedstawiono wyniki rozwiązań dla trzech zadań różniących się intensywnością przyrostu obciążenia zewnętrznego $q(t)$. Rezultaty obliczeń przedstawiają rysunki 5–8. Na wykresach tych linią ciągłą oznaczono przypadek 1, tzn. gdy obciążenie $q(t)$ osiąga wartość $q(T)=1 \text{ kG/cm}^2=\text{const}$ po czasie $T=100$ dni, linią przerywaną oznaczono przypadek 2, tzn. gdy $q(t)$ osiąga wartość $q(T)=1 \text{ kG/cm}^2=\text{const}$ po czasie $T=50$ dni, a linią kropkowaną oznaczono przypadek 3, gdy $q(t)$ osiąga wartość $q(T)=1 \text{ kG/cm}^2=\text{const}$ po czasie 20 dni. We wszystkich tych przypadkach za czas procesu konsolidacji przyjęto 400 dni, więc okres, po którym procesy te uległy właściwie już zakończeniu.

Pozostałe stałe, przyjęte do obliczeń, miały następujące wartości

$$N=G=\frac{E}{2(1+\nu)} \approx 38 \text{ [kG/cm}^2\text{]},$$

$$A=\frac{\frac{\gamma}{x}+f^2+(1-2f)\left(1-\frac{\delta}{x}\right)}{\gamma+\delta-\frac{\delta^2}{x}}-\frac{2}{3}G \approx 25 \text{ [kG/cm}^2\text{]},$$

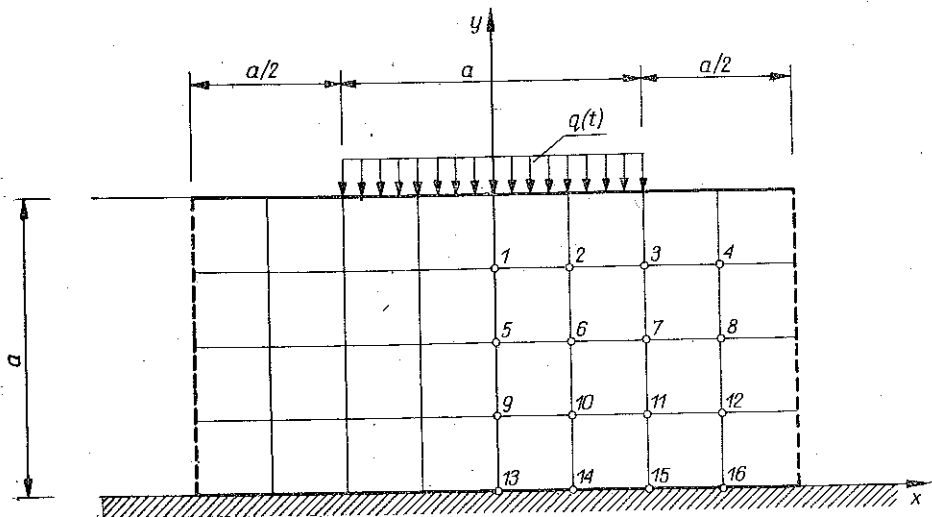
$$R=\frac{f^2}{\gamma+\delta-\frac{\delta^2}{x}} \approx 8 \text{ [kG/cm}^2\text{]},$$

$$Q=\frac{f\left(1-f-\frac{\delta}{x}\right)}{\gamma+\delta-\frac{\delta^2}{x}} \approx 12 \text{ [kG/cm}^2\text{]},$$

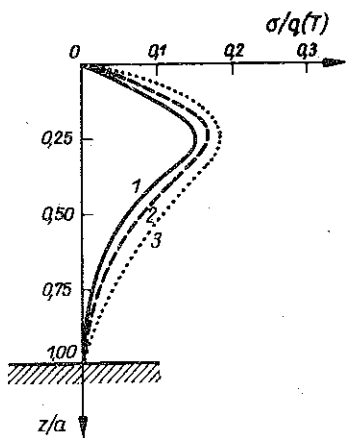
$$c_1=23 \cdot 10^3, \quad c_2=3 \cdot 10^3, \quad c_3=95 \cdot 10^3.$$

4. ZESTAWIENIE CIEKAWSZYCH FRAGMENTÓW WYNIKÓW OBLICZEŃ

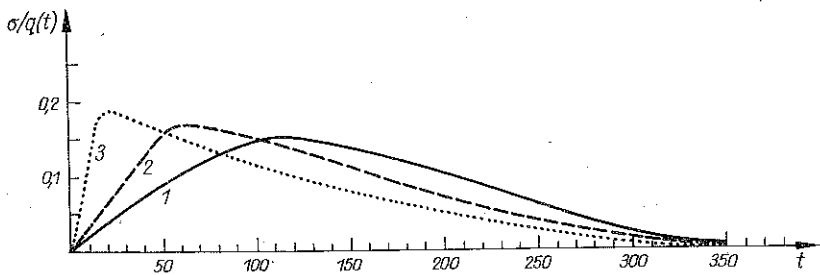
Algorytm obliczeń opartych na metodzie różnic skończonych (schemat siatki różnicowej przedstawia rys. 4) został zaprogramowany dla elektronicznej maszyny cyfrowej ODRA-1204. Ciekawsze wyniki ilustrujące proces konsolidacji dla opisanych w p. 3 przypadków przedstawiono na rysunkach 5–8. Na rys. 5 pokazano rozkład ciśnień porowych wody σ w momencie osiągnięcia pełnego obciążenia zewnętrznego $q(T)$ w przekroju ośrodka wzdłuż osi y . Przez z oznaczono zagłębienie punktu w stosunku do górnej części brzegu $y=a$. Rysunek 6 ilustruje zmienność



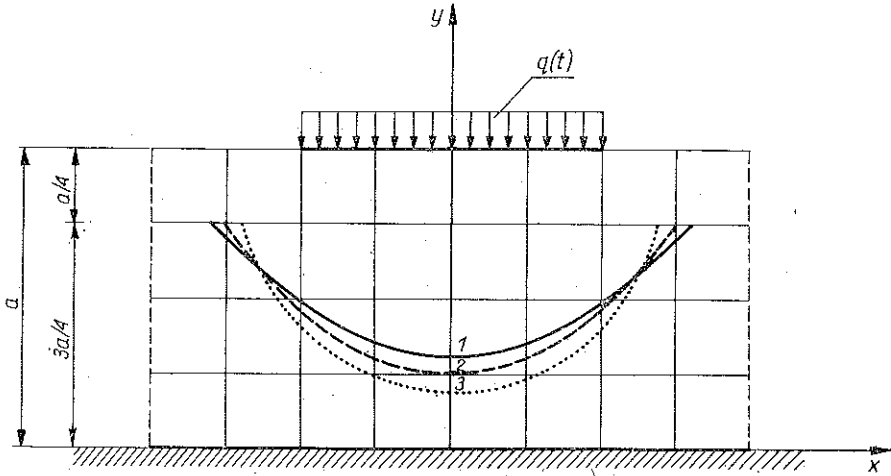
Rys. 4



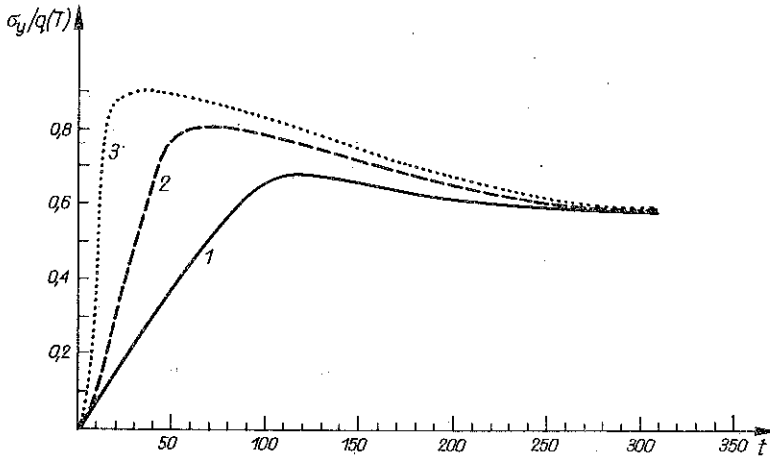
Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

w czasie ciśnienia wody σ w miejscu węzła 1 siatki różnicowej. Na rys. 7 pokazano rozkład naprężeń pionowych σ_y w momencie osiągnięcia pełnego obciążenia $q(T)$.

Rysunek 8 przedstawia zmienność naprężeń σ_y w miejscu węzła 1 siatki różnicowej. Rzędne poszczególnych punktów na wykresach odpowiadają wielkościom stosunku dla $\sigma_y/q(t)$.

5. WNIOSKI KOŃCOWE

Uzyskane w pracy rozwiązania należy traktować z pewną ostrożnością ze względu na nieuniknione błędy spowodowane doborem siatki różnicowej, kroku czasu czy też obcięciem badanego obszaru. Ważnym problemem jest tu również zagadnienie stabilności schematu różnicowego. Z uwagi na brak w dostępnej literaturze dokładnej analizy tego typu zagadnienia wykonano dodatkowo szereg rozwiązań tego typu

zadań przy różnych wielkościach kroku siatki różnicowej Δ oraz kroku czasu Δt . Bardzo istotnym z punktu widzenia inżynierskiego oraz poznawczego jest spostrzeżenie dotyczące przebiegu zmian w czasie ciśnienia porowego oraz naprężeń w szkielecie. Tak więc ciśnienie porowe uzyskuje wartości maksymalne bezpośrednio po zakończeniu procesu przyrostu obciążenia zewnętrznego, w początkowym momencie jego stabilizacji. Wielkość maksymalnych ciśnień porowych jest tu zależna od prędkości przyrostu obciążeń zewnętrznych.

Niezwykle interesująco przedstawia się przebieg w czasie zmian naprężeń pionowych σ_y w szkielecie. Stwierdzić można pojawienie się wartości maksymalnych tych naprężeń w momencie zakończenia procesu przyrostu obciążeń zewnętrznych. Można sądzić, że istnieje graniczna intensywność przyrostu obciążeń zewnętrznych, powyżej której pojawiają się pewne krytyczne, maksymalne naprężenia pionowe σ_y w szkielecie w momencie, gdy zaczyna się stabilizować wartość obciążenia zewnętrznego. Poniżej tej krytycznej intensywności naprężenia pionowe są stale rosnące aż do końcowego stanu konsolidacji.

Stwierdzono silny wpływ, jaki wywiera sposób przyrostu obciążeń zewnętrznych na charakter zmienności i wielkość maksymalnych naprężeń w szkielecie oraz ciśnień porowych cieczy. Bardziej szczegółowa analiza tych zagadnień, a przede wszystkim badania w zakresie sterowania obciążeniem zewnętrznym, mogłaby mieć kapitalne znaczenie dla opracowania praktycznych zaleceń dotyczących optymalnego programu wznoszenia budowli inżynierskich.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. F. ANDERMAN, *Tarcze prostokątne — obliczenia statyczne*, Wyd. Arkady, Warszawa 1966.
2. M. A. BIOT, *General theory of three-dimensional consolidation*, J. Appl. Phys., 12, 155–164, 1941.
3. L. COLLATZ, *Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych*, PWN, Warszawa 1960.
4. W. DERSKI, *Wstęp do matematycznej teorii konsolidacji*, Zeszyty Nauk. Politechniki Łódzkiej, z. 11, Mechanika 1964.
5. W. DERSKI, L. KISIEL, *Warunki początkowe w teorii konsolidacji*, Arch. Hydrotechniki, 16, 4.
6. W. A. FLORIN, *Osnovy mechaniki gruntow*, Gostroiizdat 1961.
7. C. T. HWANG, H. MORGENSTERN, D. W. MORRAY, *On solutions of plane strain consolidation problems by finite element methode*, Canadian Geotechnical Journal, 8 (1971).
8. G. SZEFER, J. DOMSKI, *Analiza naprężeń w konsolidującej warstwie sprężystej*, Studia Geotechnika, PAN, Wrocław 1974.

Резюме

КОНСОЛИДАЦИЯ УПРУГОГО СЛОЯ ПОД ВЛИЯНИЕМ ПЕРЕМЕННОЙ НАГРУЗКИ

В работе представлен анализ распределения давления жидкости, а также напряжений в скелете и ход их изменения во времени при разных скоростях приращения внешней нагрузки — консолидированного упругого слоя. Задача решена в условиях плоского деформационного состояния на основе метода конечных разностей.

SUMMARY

CONSOLIDATION OF ELASTIC LAYER UNDER ACTION OF VARIABLE EXTERIOR LOAD

The paper deals with the analysis of the distribution of fluid pressure in pores and stresses in skeleton. The changes of pressure and stresses with time are presented for different velocities of the exterior increment of loading of the consolidated elastic layer. The problem considered is treated as the plane strain problem and is solved by finite differences the method.

INSTYTUT GEOTECHNIKI POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ
i INSTYTUT MATEMATYKI UNIwersYTETU GDANSKIEGO

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 marca 1975 r.
