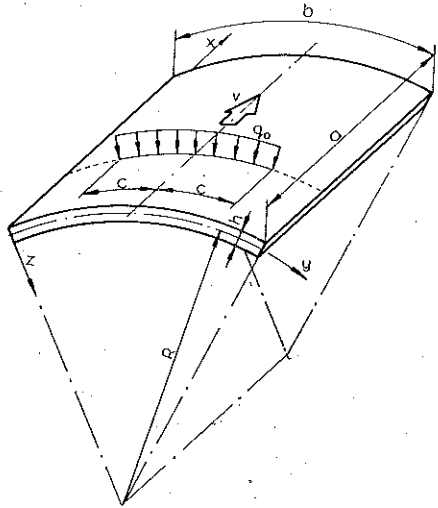


## EFEKT DYNAMICZNY WYWOŁANY DZIAŁANIEM RUCHOMEGO OBCIĄŻENIA NA POWŁOKĘ WALCOWĄ

W. SZYC I F. TWARDOSZ (POZNAŃ)

W pracy przedstawiono przybliżone rozwiązanie zagadnienia skończonych ugięć otwartej powłoki walcowej, swobodnie podpartej na brzegach, wywołanych obciążeniem normalnym poruszającym się ze stałą prędkością po powierzchni powłoki w kierunku tworzącej. Uwzględnia się przy tym zarówno masę własną powłoki, jak i masę związaną z obciążeniem. Punktem wyjścia są nieliniowe równania teorii małowyniosłych powłok walcowych uzupełnione odpowiednimi wyrazami dynamicznymi. Równania te rozwiązuje się metodą Bubnowa-Galerkina uzyskując układy równań różniczkowych zwyczajnych, które z kolei rozwiązano metodą Rungego-Kutty przy użyciu maszyny cyfrowej. Otrzymane w ten sposób wykresy ugięcia w czasie analizuje się w celu zbadania zależności pomiędzy prędkościami krytycznymi a parametrami obciążenia dla dwu jego przypadków: rozłożonego na odcinku obwodowym i powierzchniowego.

Praca niniejsza podaje metodę przybliżoną rozwiązania zagadnienia skończonych ugięć sprężystych otwartej powłoki walcowej pod wpływem poruszającego się po niej ze stałą prędkością ruchomego ciężaru, którego masy nie można pominąć w porównaniu z masą powłoki (rys. 1 i 2). Podobne zagadnienia dla belek i płyt były przedmiotem rozważań autorów w pracach [1, 2 i 3]. Pokrewna praca [4] z tej dziedziny podaje rozwiązanie dla przypadku, gdy po powłoce porusza się ze stałą prędkością osiowo-symetryczne bezmasowe obciążenie. W ostatnich latach były rozpatrywane bardziej złożone przypadki dotyczące dynamiki ustrojów sprężystych przeważnie przez uczonych radzieckich; odpowiednia bibliografia zebrana została przez H. Z. JAKUSZEWĄ [5]. Niniejsza praca ma również na celu zbadanie wpływu takich czynników związanych z obciążeniem jak jego masa i stopień skupienia na przebieg procesu dynamicznej deformacji powłoki z możliwością utraty stateczności. Szczególnie wpływ masy związanej z obciążeniem jest, jak się okazuje, znaczny.



Rys. 1

Przedmiotem rozważań jest otwarta powłoka walcowa, której zasadnicze wymiary i przyjęty układ współrzędnych  $x$ ,  $y$ ,  $z$  przedstawiono na rys. 1. Niech na powłokę działa obciążenie  $q_0$  o stałym natężeniu rozmieszczone symetrycznie względem linii

$x = b/2$  na odcinku o długości  $2c$ , poruszające się w kierunku osi  $x$  ze stałą prędkością  $v$  (rys. 1). Zakłada się przy tym, że wszystkie brzegi powłoki są swobodnie podparte.

Punktem wyjścia rozważań są nieliniowe równania różniczkowe ruchu małych wzniosłych powłok walcowych

$$(1.1) \quad D \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{h}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - h \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) + \\ + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t),$$

$$(1.2) \quad \frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$

Tutaj  $w$  oznacza promieniowe przemieszczenie powłoki,  $\varphi$  funkcję naprężeń,  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$  jest sztywnością powłoki na zginanie,  $m$  masą powłoki na jednostkę powierzchni środkowej,  $q(x, y, t) = q_0 - m_a(x, y) d^2 w/dt^2$  — obciążeniem zewnętrznym, w którym uwzględnia się siły bezwładności jego masy, przy czym  $m_a$  jest masą poruszającego się ciężaru. Pozostałe oznaczenia wynikają z rys. 1.

Przy założeniu stałej prędkości obciążenia jego całkowite oddziaływanie można przedstawić w postaci

$$(1.3) \quad q(x, y, t) = q_0 - m_a \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} v^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right).$$

Wzór ten, poza siłami bezwładności wynikającymi z niejednostajnego ruchu w kierunku normalnej do powierzchni powłoki, uwzględnia także siłę odśrodkową i siłę Coriolisa.

Rozwiązanie równań (1.1) i (1.2) przyjmujemy w postaci szeregów trygonometrycznych

$$(1.4) \quad \varphi(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$(1.5) \quad w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

gdzie  $A_{mn}(t)$  i  $f_{mn}(t)$  są chwilowo nieznanymi funkcjami czasu.

Stosując metodę Bubnowa-Galerkina rozwiązujemy równanie nierozdzielności odkształceń (1.2). Ograniczając się do trzech wyrazów  $(m, n) = (1, 1), (2, 3), (3, 5)$  każdej z funkcji, uzyskamy w ten sposób związki uzależniające współczynniki funkcji naprężeń  $A_{mn}$  od współczynników funkcji ugięcia  $f_{mn}$ :

$$(1.6) \quad A_{11} = \frac{4E}{\pi^2} \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2} \left( \frac{b^2}{4R} f_{11} - \frac{4}{3} f_{11}^2 - \frac{1256}{1575} f_{11} f_{35} - \frac{48}{7} f_{23}^2 - \frac{1340}{77} f_{35}^2 \right), \\ A_{23} = \frac{4E}{\pi^2} \frac{a^2 b^2}{(9a^2 + 4b^2)^2} \left( \frac{b^2}{R} f_{23} - \frac{96}{7} f_{11} f_{23} - \frac{13152}{385} f_{23} f_{35} \right),$$

$$(1.6) \quad A_{35} = \frac{4E}{\pi^2} \frac{a^2 b^2}{(25a^2 + 9b^2)} \left( \frac{9b^2}{4R} f_{35} + \frac{628}{1575} f_{11}^2 - \frac{2680}{77} f_{11} f_{35} - \right. \\ \left. - \frac{6576}{385} f_{23}^2 - 20 f_{35}^2 \right). \quad [c.d.]$$

Z kolei rozwiązujemy metodą Bubnowa-Galerkina równanie równowagi dynamicznej (1.1) wg następującego schematu:

$$(1.7) \quad \int_0^a \int_0^b L \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{vt-\varepsilon}^{vt+\varepsilon} \int_{\frac{b}{2}-\varepsilon}^{\frac{b}{2}+\varepsilon} q(x, y, t) \sin \frac{m\pi x}{a} \times \\ \times \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = 0,$$

gdzie  $L$  oznacza lewą stronę równania równowagi (1.1). Całkowanie wyrazów pochodzących od obciążenia zewnętrznego odbywa się po obszarze (zmiennym w czasie), na którym obciążenie to działa. Wprowadzając bezwymiarowe parametry ugięcia i czasu

$$f_{mn} = \frac{f_{mn}}{h}, \quad \tau = \frac{vt}{a},$$

otrzymamy następujący układ zwyczajnych nieliniowych równań różniczkowych rzędu drugiego o zmiennych współczynnikach:

$$(1.8) \quad \begin{aligned} & a_1 \frac{d^2 \hat{f}_{11}}{d\tau^2} + a_2 \frac{d\hat{f}_{11}}{d\tau} + a_3 \hat{f}_{11} + a_4 \hat{f}_{11}^2 + a_5 \hat{f}_{11}^3 + a_6 \frac{d^2 \hat{f}_{23}}{d\tau^2} + a_7 \frac{d\hat{f}_{23}}{d\tau} + \\ & + a_8 \hat{f}_{23} + a_9 \hat{f}_{23}^2 + a_{10} \frac{d^2 \hat{f}_{35}}{d\tau^2} + a_{11} \frac{d\hat{f}_{35}}{d\tau} + a_{12} \hat{f}_{35} + a_{13} \hat{f}_{35}^2 + \\ & + a_{14} \hat{f}_{35}^3 + a_{15} \hat{f}_{11} \hat{f}_{35} + a_{16} \hat{f}_{11} \hat{f}_{23}^2 + a_{17} \hat{f}_{11} \hat{f}_{35}^2 + \\ & + a_{18} \hat{f}_{11}^2 \hat{f}_{35} + a_{19} \hat{f}_{23}^2 \hat{f}_{35} = a_{20}, \\ & b_1 \frac{d^2 \hat{f}_{23}}{d\tau^2} + b_2 \frac{d\hat{f}_{23}}{d\tau} + b_3 \hat{f}_{23} + b_4 \hat{f}_{23}^2 + b_5 \frac{d^2 \hat{f}_{11}}{d\tau^2} + b_6 \frac{d\hat{f}_{11}}{d\tau} + b_7 \hat{f}_{11} + \\ & + b_8 \frac{d^2 \hat{f}_{35}}{d\tau^2} + b_9 \frac{d\hat{f}_{35}}{d\tau} + b_{10} \hat{f}_{35} + b_{11} \hat{f}_{11} \hat{f}_{23} + b_{12} \hat{f}_{23} \hat{f}_{35} + \\ & + b_{13} \hat{f}_{11}^2 \hat{f}_{23} + b_{14} \hat{f}_{11} \hat{f}_{23} \hat{f}_{35} + b_{15} \hat{f}_{23}^2 \hat{f}_{35} = b_{16}, \\ & c_1 \frac{d^2 \hat{f}_{35}}{d\tau^2} + c_2 \frac{d\hat{f}_{35}}{d\tau} + c_3 \hat{f}_{35} + c_4 \hat{f}_{35}^2 + c_5 \hat{f}_{35}^3 + c_6 \frac{d^2 \hat{f}_{11}}{d\tau^2} + c_7 \frac{d\hat{f}_{11}}{d\tau} + \\ & + c_8 \hat{f}_{11} + c_9 \hat{f}_{11}^2 + c_{10} \hat{f}_{11}^3 + c_{11} \frac{d^2 \hat{f}_{23}}{d\tau^2} + c_{12} \frac{d\hat{f}_{23}}{d\tau} + c_{13} \hat{f}_{23} + \\ & + c_{14} \hat{f}_{23}^2 + c_{15} \hat{f}_{11} \hat{f}_{35} + c_{16} \hat{f}_{11}^2 \hat{f}_{35} + c_{17} \hat{f}_{11} \hat{f}_{23}^2 + c_{18} \hat{f}_{11} \hat{f}_{23}^2 + \\ & + c_{19} \hat{f}_{23}^2 \hat{f}_{35} = c_{20}. \end{aligned}$$

Liczba równań układu (1.8) jest równa liczbie wyrazów przyjętych w funkcji ugięcia (1.5) i w naszym przypadku wynosi trzy. Rozwiązaniem układu przy następujących jednorodnych warunkach początkowych:

$$\hat{f}_{11} = \hat{f}_{23} = \hat{f}_{35} = \frac{df_{11}}{d\tau} = \frac{df_{23}}{d\tau} = \frac{df_{35}}{d\tau} = 0 \quad \text{przy } \tau = 0$$

będą funkcje opisujące zmianę ugięcia (a konkretnie poszczególnych współczynników  $f_{mn}$  funkcji ugięcia) w czasie pod działaniem ruchomego obciążenia.

Zmienne współczynniki układu równań (1.8) po wprowadzeniu dalszych bezwymiarowych parametrów

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad \beta = \frac{2c}{b}, \quad \mu = \frac{2m_q c}{mab}, \quad \kappa = \frac{b}{R}, \quad \psi = \frac{h}{R}, \quad \eta = \frac{Ea}{m\omega^2}, \quad \vartheta = \frac{qa^2}{v^2 hm_q}$$

przedstawimy w następującej postaci:

$$a_1 = 1 + 2\mu r_1 \sin^2 \pi\tau, \quad a_2 = 2\pi\mu r_1 \sin 2\pi\tau,$$

$$a_3 = \frac{\pi^4 e_2}{12(1-v^2)d_{11}\alpha^4} + \frac{d_{11}\kappa^2 e_1}{\psi} - 2\pi\mu^2 r_1 \sin^2 \pi\tau,$$

$$a_4 = -16e_1 d_{11}, \quad a_5 = e_2(56,8889d_{11} + 5,08754d_{35}),$$

$$a_6 = -\frac{2\mu}{\pi\beta} s_{12} \sin \pi\tau \sin 2\pi\tau, \quad a_7 = -\frac{8\mu}{\beta} s_{12} \sin \pi\tau \cos 2\pi\tau,$$

$$a_8 = -4\pi^2 a_6, \quad a_9 = -e_1(219,429d_{23} + 27,4286d_{11}),$$

$$a_{10} = \frac{2\mu}{\pi\beta} s_{23} \sin \pi\tau \sin 3\pi\tau, \quad a_{11} = \frac{12\mu}{\pi\beta} s_{23} \sin \pi\tau \cos 3\pi\tau,$$

$$a_{12} = 9\pi^2 a_{10}, \quad a_{13} = -e_1(69,6104d_{11} + 8176,62d_{35}),$$

$$a_{14} = e_2(72681,1d_{35} - 520,317d_{11}), \quad a_{15} = e_1(6,37968d_{11} + 28,7086d_{35}),$$

$$a_{16} = e_2(292,571d_{11} + 3009,31d_{23} - 217,937d_{35}),$$

$$a_{17} = e_2(1810,89d_{11} + 189471d_{35}), \quad a_{18} = -e_2(51,0375d_{11} + 2115,15d_{35}),$$

$$a_{19} = e_2(7495,91d_{23} - 87,4928d_{11} + 67071,5d_{35}), \quad a_{20} = \frac{8\mu\vartheta}{\pi\beta} \sin \frac{\pi\beta}{2} \sin \pi\tau,$$

$$b_1 = 1 + 2\mu r_3 \sin^2 2\pi\tau, \quad b_2 = 4\pi\mu r_3 \sin 4\pi\tau,$$

$$b_3 = \frac{\pi^4 e_2}{12(1-v^2)d_{23}\alpha^4} + \frac{16d_{23}\kappa^2 e_1}{\psi} - 8\pi^2\mu r_3 \sin^2 2\pi\tau,$$

$$b_4 = e_2(1504,65d_{11} + 2998,36d_{35}), \quad b_5 = a_6, \quad b_6 = 2\pi a_6, \quad b_7 = -\pi^2 a_6,$$

$$b_8 = -\frac{2\mu}{\pi\beta} s_{14} \sin 2\pi\tau \sin 3\pi\tau, \quad b_9 = -\frac{12\mu}{\beta} s_{14} \sin 2\pi\tau \cos 3\pi\tau,$$

$$\begin{aligned}
 b_{10} &= -9\pi^2 b_8, & b_{11} &= -e_1(438,857 d_{23} + 54,8571 d_{11}), \\
 b_{12} &= -e_1(109315 d_{23} + 1229,80 d_{35}), & b_{13} &= a_{16}, \\
 b_{14} &= e_2(14991,8 d_{32} - 408,300 d_{11}), \\
 b_{15} &= e_2(3818,63 d_{11} + 10931,5 d_{35} + 18671,6 d_{23}), \\
 b_{16} &= -\frac{8\mu g}{3\pi\beta} \sin \frac{3\pi\beta}{2} \sin 2\pi\tau, \\
 c_1 &= 1 + 2\mu r_5 \sin^2 3\pi\tau, & c_2 &= 6\pi\mu r_5 \sin 6\pi\tau, \\
 c_3 &= \frac{\pi^4 e_2}{12(1-\nu^2)d_{35}\alpha^4} + \frac{81 d_{35} \kappa^2 e_1}{\psi} - 18\pi^2 r_5 \sin^2 3\pi\tau, \\
 c_4 &= -2373,33 e_1 d_{35}, & c_5 &= e_2(9691,21 d_{11} + 14696,3 d_{35}), \\
 c_6 &= a_{10}, & c_7 &= \frac{4\mu}{\beta} s_{23} \cos \pi\tau \sin 3\pi\tau, & c_8 &= \pi^2 a_{10}, \\
 c_9 &= e_1(14,3543 d_{35} + 3,18984 d_{11}), & c_{10} &= -e_2(17,0125 d_{11} + 222,046 d_{35}), \\
 c_{11} &= b_8, & c_{12} &= \frac{2}{3} b_9, & c_{13} &= -4\pi^2 b_8, \\
 c_{14} &= -e_1(614,899 d_{35} + 546,577 d_{23}), & c_{15} &= -e_1(3132,47 d_{35} + 139,221 d_{11}), \\
 c_{16} &= e_2(752,686 d_{11} + 28779,5 d_{35}), & c_{17} &= e_2(49500,7 d_{35} - 666,138 d_{11}), \\
 c_{18} &= e_2(9511,85 d_{35} + 7495,91 d_{23} - 87,4928 d_{11}), & c_{19} &= e_2(18671,6 d_{23} + \\
 & & & + 3818,63 d_{11} + 12551,0 d_{35}), & c_{20} &= \frac{8\mu g}{5\pi\beta} \sin \frac{5\pi\beta}{2} \sin 3\pi\tau,
 \end{aligned}$$

gdzie przyjęto oznaczenia

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \frac{\eta\alpha\psi^2}{\kappa}, & e_2 &= \frac{\eta\alpha\psi^3}{\kappa^3}, & d_{mn} &= [m^2 + (n\alpha)^2]^{-2}, \\
 r_n &= 1 + \frac{\sin n\pi\beta}{n\pi\beta}, & s_{ij} &= \frac{1}{i} \sin i\pi\beta + \frac{1}{j} \sin j\pi\beta,
 \end{aligned}$$

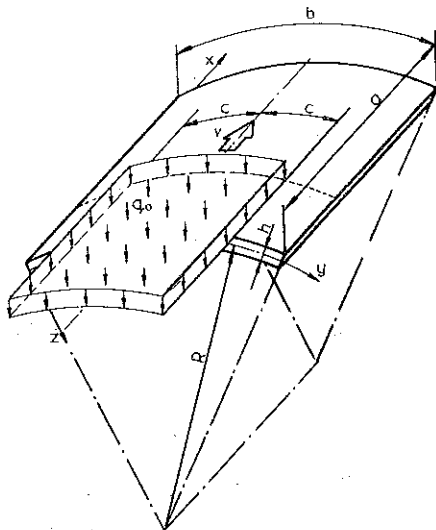
( $i, j$  są to liczby naturalne), a wartości liczbowe zostały podane z dokładnością do sześciu cyfr znaczących.

Rozwiązanie układu równań (1.8) można przeprowadzić metodami numerycznymi.

Oddzielnie rozpatrzmy przypadek ruchomego obciążenia powierzchniowego (rys. 2). Rozwiązanie przebiega tu w sposób podobny do poprzedniego. Wzory (1.1)–(1.5) pozostają niezmienione, zachowamy także przyjęte oznaczenia. Przyjmujemy z kolei po dwa wyrazy szeregów (1.4) i (1.5) przyjmując  $(m, n) = (1, 1), (2, 1)$ .

Współczynniki funkcji naprężeń  $A_{mn}$  związane są ze współczynnikami  $f_{mn}$  funkcji ugięcia następującymi wzorami:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} A_{11} &= \frac{4E}{\pi^2} \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2} \left( \frac{b^2}{4R} f_{11} - \frac{4}{3} f_{11}^2 - \frac{16}{5} f_{21}^2 \right), \\ A_{21} &= \frac{4E}{\pi^2} \frac{a^2 b^2}{(a^2 + 4b^2)^2} \left( \frac{b^2}{R} f_{21} - \frac{32}{5} f_{11} f_{21} \right). \end{aligned}$$



Rys. 2

Schemat rozwiązania metodą Bubnowa-Galerkina równania równowagi (1.1) jest teraz następujący:

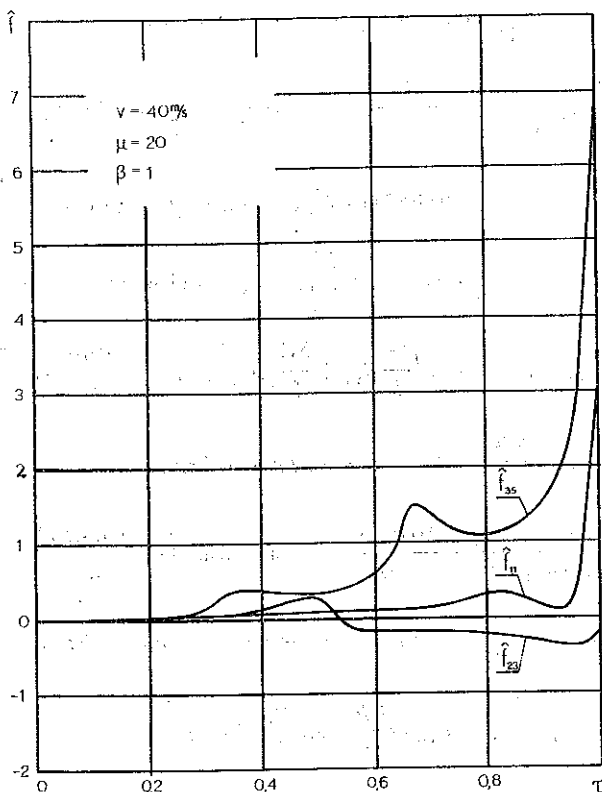
$$(2.2) \quad \int_0^a \int_0^b L \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \begin{cases} \int_0^{\frac{vt}{2} + c} \int_{\frac{b}{2} - c}^{\frac{b}{2} + c} q(x, y, t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy, & \text{jeżeli } 0 \leq t \leq \frac{a}{v}, \\ \int_0^{\frac{b}{2} + c} \int_{\frac{b}{2} - c}^{\frac{b}{2} + c} q(x, y, t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy, & \text{jeżeli } t > \frac{a}{v}. \end{cases}$$

Możemy wyróżnić dwa przedziały czasu rozgraniczone chwilą  $t = a/v$ , gdy czoło obciążenia osiągnie przeciwległy brzeg  $x = a$  powłoki. W rezultacie otrzymuje się następujący układ dwu równań różniczkowych:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \bar{a}_1 \frac{d^2 f_{11}}{d\tau^2} + \bar{a}_2 \frac{df_{11}}{d\tau} + \bar{a}_3 f_{11} + \bar{a}_4 f_{11}^2 + \bar{a}_5 f_{11}^3 + \bar{a}_6 \frac{d^2 f_{21}}{d\tau^2} + \bar{a}_7 \frac{df_{21}}{d\tau} + \\ + \bar{a}_8 f_{11} f_{21}^2 + \bar{a}_9 f_{21} + \bar{a}_{10} f_{21}^2 = \bar{a}_{11}, \end{aligned}$$



Rozwiązanie układów równań (1.8) i (2.3) przeprowadzono na maszynie cyfrowej ODRA-1304 metodą Rungego-Kutty. Poza uzyskaniem rozwiązania stanowiącego obraz deformacji powłoki pod działaniem poruszającego się obciążenia starano się przede wszystkim określić prędkości krytyczne  $v_{kr}$  i uzależnić je od wielkości obciążenia  $\mu$  oraz rozkładu  $\beta$ . Wartością krytyczną  $v_{kr}$  nazywamy najmniejszą prędkość  $v$ , której odpowiada utrata stateczności powłoki.

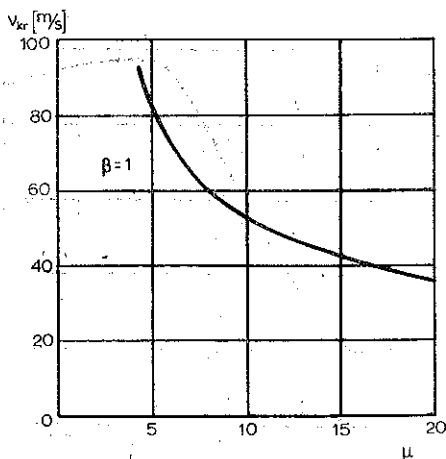


Rys. 3

Jako praktyczne kryterium stateczności przyjęto zgodnie z A. S. WOLMIREM [6], że w chwili utraty stateczności ugięcie zaczyna przewyższać grubość powłoki ( $f_{mn} \geq 1$ ). Na wykresie (rys. 3) przedstawiono przebieg ugięć powłoki w czasie otrzymany z rozwiązania układu (1.8), tj. dla pierwszego rodzaju obciążenia. Wartość  $\tau = 1$  odpowiada chwili, w której obciążenie osiąga przeciwny brzeg powłoki ( $x = a$ ). Pod koniec działania obciążenia obserwuje się gwałtowny wzrost ugięcia, równoznaczny z utratą stateczności. Największy udział ma tu jak widać trzeci wyraz funkcji ugięcia, a najmniejszy drugi. Dla niższych prędkości przebieg ugięcia jest znacznie łagodniejszy bez znamion gwałtownego wzrostu, przy czym dominował tu pierwszy wyraz  $f_{11}$  funkcji ugięcia. Prędkość krytyczna dla  $\mu = 20$  i  $\beta = 1$  wynosi około 37 m/s. Zmiana parametru obciążenia  $\mu$  pozwoliła na przeanalizowanie wpływu wielkości obciążenia na prędkość krytyczną. Wraz ze wzrostem obciążenia prędkość  $v_{kr}$

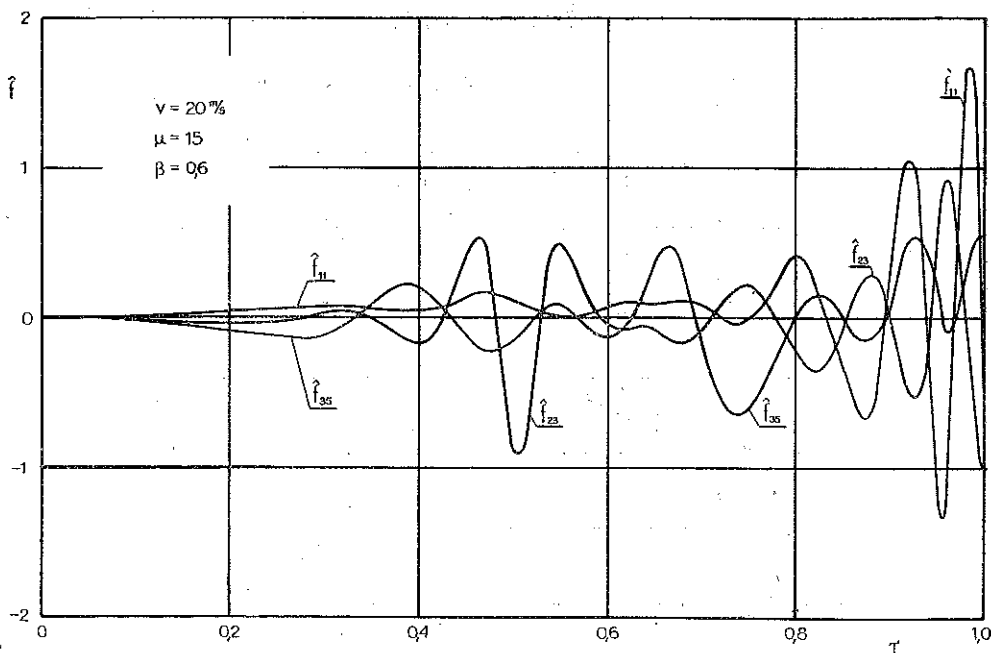


wyraźnie maleje, co ilustruje kolejny wykres (rys. 4). Następne rozwiązanie przedstawione na rys. 5 dotyczy przypadku większego skupienia obciążenia ( $\beta=0,6$ ). Zmiana ugięć w czasie ma charakter nieregularnych drgań o dość gwałtownie wzrastającej amplitudzie pod koniec działania obciążenia. Dominuje tu pierwszy wyraz funkcji ugięcia. Przedstawiony przebieg dotyczy prędkości nieznacznie przekraczającej wartość krytyczną ( $v=20$  m/s), która wynosi  $v_{kr}=18$  m/s. Częstota drgań pod koniec procesu obciążenia wzrasta i dąży do częstoty drgań swobodnych powłoki nieobciążonej. Zmiana parametru  $\beta$  pozwala przeanalizować zależność pomiędzy prędkością krytyczną a współczynnikiem rozkładu obciążenia. Zależność tę w formie wykresu  $v_{kr}(\beta)$  dla stałej wartości obciążenia ( $\mu=15$ ) przedstawiono na rys. 6. Skupienie obciążenia na mniejszym odcinku powoduje spadek prędkości krytycznej, jednak dla  $\beta$  w przedziale od 0,8 do 1 prędkość krytyczna  $v_{kr}$  prawie się nie zmienia.



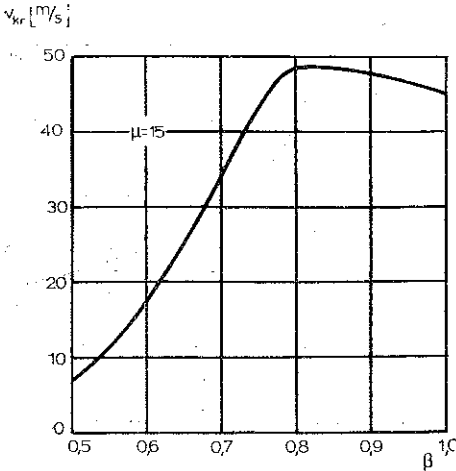
Rys. 4

Następny wykres (rys. 7) odnosi się do drugiego rodzaju obciążenia, tj. do obciążenia powierzchniowego i jest graficzną ilustracją rozwiązania układu równań (2.3) dla  $v=80$  m/s,  $\mu=30$  i  $\beta=1$ . Chwila, w której czoło obciążenia osiąga przeciw-



Rys. 5

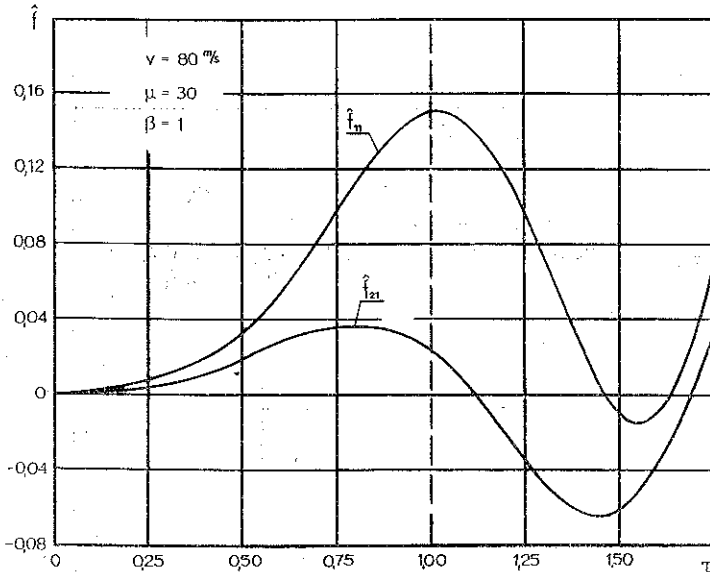
legły brzeg powłoki, odpowiada wartości  $\tau=1$ . Maksimum ugięcia występuje nieco później, przy czym dominuje wyraźnie pierwszy wyraz funkcji ugięcia. Widoczne jest jednak, że deformacje powłoki są małe ( $f_{\max} \approx 0,15$ ), a ugięcie rzędu grubości powłoki zostaje osiągnięte przy  $v=v_{kr}=110$  m/s. Na rys. 8 przedstawiono z kolei



Rys. 6

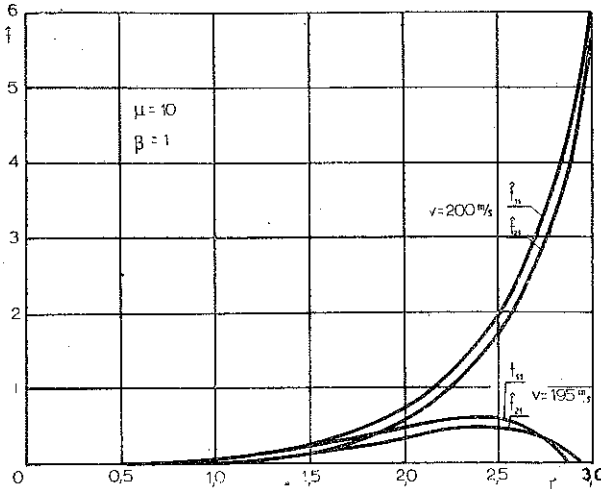
dwa rozwiązania uzyskane dla dwu różnych prędkości  $v=195$  m/s i  $v=200$  m/s przy  $\mu=10$  i  $\beta=1$ . Z rysunku tego wynika, że dla mniejszej prędkości deformacje powłoki są małe, natomiast przy nieznacznym jej wzroście ugięcie szybko rośnie i powłoka traci stateczność. Przykład ten dobrze ilustruje gwałtowność charakteru utraty stateczności przy przekroczeniu zakresu prędkości krytycznej. Zmieniając wartość parametru obciążenia  $\mu$  oraz analizując przebiegi ugięcia w czasie można ustalić zależność pomiędzy prędkością krytyczną i wielkością obciążenia. Krzywa ta dla obciążenia powierzchniowego pokazana jest na rys. 9.

Wyniki rozwiązań wskazują na to, że pod wpływem obciążeń ruchomych powłoka zachowuje się w taki sposób, iż przy małych prędkościach (podkrytycznych) deformacje są małe, a w pewnym niewielkim zakresie prędkości wyższych ugięcia gwałtownie wzrastają, co umożliwia dość dokładne ustalenie wartości krytycznej. Prędkość krytyczna zależy wyraźnie od wielkości obciążenia i stopnia jego skupienia. Porównu-



Rys. 7

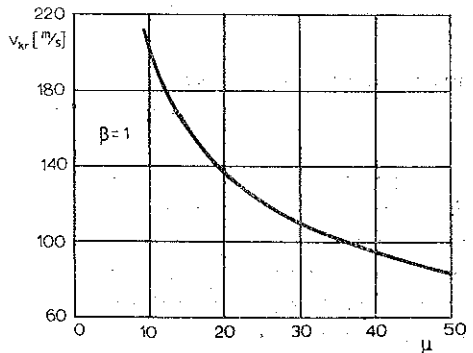
jąc oba rodzaje obciążeń analizowanych w pracy można wnioskować, że dla pierwszego rodzaju otrzymuje się prędkości krytyczne 3,5 do 4 razy mniejsze niż dla drugiego. Porównanie to dotyczy jednakowych ogólnych wartości obciążenia, co jest równoznaczne z jednakowym  $\mu$ .



Rys. 8

Spróbujmy na zakończenie dokonać merytorycznego sprawdzenia wyników przez porównanie z zagadnieniem liniowym obciążenia ruchomego dla płyty prostokątnej (przypadek obciążenia powierzchniowego). W tym celu w równaniu (2.3)<sub>1</sub> należy pominąć wyrazy nieliniowe, a ograniczając się do pierwszego przybliżenia uwzględnimy tylko wyrazy zawierające  $f_{11}$ . Prędkość krytyczną otrzymamy z warunku nieokreśloności rozwiązania tego równania, tj. z warunku, aby mianownik całki szczególnej równania niejednorodnego zdążył do zera (jeżeli  $f_{11} \rightarrow \infty$ , to  $v \rightarrow v_{kr}$ ). Analizę tę przeprowadzono dla  $\tau > 1$ . Po przekształceniach otrzymamy wzór określający prędkość krytyczną w postaci

$$(3.1) \quad v_{kr} = \frac{\pi}{\alpha} (\alpha^2 + 1) \left( \beta + \frac{1}{\pi} \sin \pi \beta \right)^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times \left[ \frac{D}{m_a} \left( 1 + \frac{12a^4 (1 - v^2)}{\pi^4 h^2 R^2 (\alpha^2 + 1)^4} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$



Rys. 9

Drugi wyraz w nawiasie znika dla płyty ( $1/R=0$ ) i wówczas powyższy wzór staje się identyczny ze związkiem podanym przez JAKUSZEWA [5]. Prędkości krytyczne otrzymane ze wzoru (3.1) są oczywiście nieco wyższe niż uzyskane na drodze

анализы нелинейной. Для принятых данных  $\mu$  и при  $\beta=1$  получаются следующие значения:

$$\text{для } \mu=10, \quad v_{kr}=258 \text{ м/с};$$

$$\text{для } \mu=50, \quad v_{kr}=115 \text{ м/с}.$$

Анализ нелинейный дает в этом диапазоне (рис. 9) значения около 25% меньше.

Приведенное решение следует считать приближенным. Более точные результаты могли бы быть получены на основании уравнений волновых; однако трудности несоразмерно большие и в работе настоящей работы оставлены.

#### ЛИТЕРАТУРА ЦИТИРОВАННАЯ В ТЕКСТЕ

1. Г. Ф. Някитин, *О динамическом эффекте подвижной нагрузки при больших переменных скоростях движения с учетом высших гармоник*; Сопротивление матер. и теория сооружений, вып. 6, Киев 1968.
2. М. Żyszek, *Drgania nieograniczonej płyty na sprężystym podłożu pod wpływem przesuających się obciążeń*; Arch. Inż. Lądowej, 14, 2, 1968.
3. Т. К. Кучма, А. Б. Моргаевский, *Расчет пластин на подвижные нагрузки*, Труды 7-ой Всес. конф. по теории оболочек и пластин, Изд. „Наука”, Москва 1970.
4. K. SCHIFFNER, C. R. STEEL, *The cylindrical shell with an axisymmetric moving load*, AIAA paper, No 18, 1970 or AIAA Journal, 9, No 1, 1971.
5. Н. З. Якушев, *Динамика строительных систем под воздействием движущихся нагрузок*, Иссл. по теории пластин и оболочек, сб. 8-9, Изд. Казанского ун-та, 1972.
6. А. С. Вольмир, *Нелинейная динамика пластинок и оболочек*, Изд. „Наука”, Москва 1972.

#### Резюме

#### ДИНАМИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ ВЫЗВАННЫЙ ДЕЙСТВИЕМ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ОБОЛОЧКУ

В работе представлено приближенное решение задачи конечных прогибов открытой цилиндрической оболочки, свободно опертой на края, вызванных нормальной нагрузкой движущейся с постоянной скоростью по поверхности оболочки в направлении образующей. При этом учитывается как собственная масса оболочки, так и масса связанная с нагрузкой. Исходной точкой являются нелинейные уравнения теории пологих цилиндрических оболочек, дополненные соответствующими динамическими членами. Эти уравнения решаются методом Бубнова — Галеркина, получая системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые в свою очередь решены методом Рунге-Кутты с использованием вычислительной цифровой машины.

Полученный таким образом ход изгибов во времени анализируется с целью исследования зависимости между критическими скоростями и параметрами нагрузки для двух ее случаев: распределенной на отрезке периметра и поверхностной.

## SUMMARY

## DYNAMIC EFFECT CAUSED BY THE LOAD MOVING ON THE CYLINDRICAL SHELL

In this paper the approximate solution of the problem of finite deformations of the open cylindrical shell, simply supported on the boundaries, caused by the normal load moving with a constant velocity on the shell surface in the direction of its generator is presented. The mass of shell as well as the mass connected with the load are taken into account. The starting point is the non-linear equations of a theory of shallow cylindrical shells completed by the corresponding dynamic terms. By the Bubnov-Galerkin method, from these equations the systems of ordinary differential equations were obtained, which by turn were solved numerically on the digital computer by the Runge-Kutta method. Diagrams of deflections changing in time obtained in this way are analyzed to examine the relations between critical velocities and loading parameters. Two special cases of the load are considered: the load distributed on the circumferential segment and on the surface.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA W POZNANIU

*Praca została złożona w Redakcji dnia 19 grudnia 1974 r.*

---