

## METODY SZACOWANIA DYSTRYBUANTY NOŚNOŚCI PŁYT O LOSOWYCH MOMENTACH GRANICZNYCH

KRZYSZTOF DOLIŃSKI (WARSZAWA)

Chcąc określić prawdopodobieństwo awarii płyty sztywno-plastycznej musimy znać rozkład prawdopodobieństwa nośności granicznej. Jednakże zależność funkcyjna pomiędzy momentami granicznymi a obciążeniem granicznym, wyznaczonym na przykład z teorii załomów, jest na tyle skomplikowana, że dokładne wyznaczenie dystrybuanty jest bardzo pracochłonne i wymaga często obliczeń numerycznych. W pracy udowodniono dwa twierdzenia, które przy wykorzystaniu aproksymujących funkcji pomocniczych dają możliwość szacowania dystrybuant dla szerokiej klasy funkcji zmiennych losowych. Stosując kombinacje liniowe losowych momentów granicznych jako funkcje aproksymujące nośność sztywno-plastycznej płyty o losowej ortotropii, oszacowano dystrybuanty mnożnika obciążenia granicznego i nie przeprowadzając skomplikowanych obliczeń uzyskano bardzo dobrą zbieżność.

### WSTĘP

Przy rozwiązywaniu wielu zagadnień, w których mamy do czynienia z wielkościami losowymi, musimy często znać rozkłady prawdopodobieństwa funkcji pewnych zmiennych losowych. Jeżeli chcemy na przykład określić prawdopodobieństwo tego, że konstrukcja o losowych własnościach mechanicznych nie ulegnie awarii przy danym obciążeniu, to niezbędna jest właśnie znajomość rozkładu prawdopodobieństwa nośności tej konstrukcji jako funkcji jej losowych własności.

Typ rozkładu prawdopodobieństwa możemy przewidzieć z góry jedynie dla prostych funkcji i pewnych szczególnych rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych [1]. Jeżeli funkcja jest iloczynem lub ilorazem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach logarytmiczno-normalnych, to jej rozkład też jest logarytmiczno-normalny. Podobnie, jeżeli funkcja jest sumą lub różnicą niezależnych zmiennych losowych o takim typie rozkładu, dla którego jest spełnione twierdzenie o dodawaniu (rozkłady normalny, gamma), to jej rozkład jest tego samego typu co typ rozkładu zmiennych. Parametry rozkładu wynikowego wyznaczamy w obu przypadkach na podstawie prostych obliczeń arytmetycznych. Nie zawsze jednak funkcja, której rozkładu poszukujemy, ma tak prostą postać, a wtedy dla znalezienia jej dystrybuanty musimy przeprowadzać żmudne, a czasem analitycznie nieosiągalne całkowania. Konieczne w takich przypadkach obliczenia numeryczne mogą być ekonomicznie nieuzasadnione; przyjęcie zaś *a priori* typu rozkładu prawdopodobieństwa funkcji może powodować trudne do oszacowania błędy.

Z tymi właśnie problemami spotykamy się przy wyznaczaniu rozkładów prawdopodobieństwa nośności płyt sztywno-plastycznych o losowych momentach granicznych. Obciążenie graniczne takich płyt, określone przy wykorzystaniu na przykład

teorii linii załomów, jest funkcją momentów granicznych i wymiarów płyty. Momenty graniczne, które zależą od takich losowych czynników jak wytrzymałość betonu, wytrzymałość stali czy ramię sił wewnętrznych w stanie granicznym, są wielkościami losowymi, czyli również i nośność jako funkcja zmiennych losowych też będzie zmienną losową.

Chcąc teraz określić prawdopodobieństwo awarii płyty przy danym obciążeniu, musimy znać rozkład prawdopodobieństwa nośności granicznej. Zależność funkcyjna pomiędzy momentami granicznymi a nośnością jest na tyle skomplikowana, że dokładne wyznaczenie dystrybuanty jest bardzo pracochłonne już dla najprostszych rozkładów prawdopodobieństwa, dla rozkładów zaś rzeczywiście występujących wymaga obliczeń numerycznych.

Wykorzystując aproksymacje liniowe funkcji zmiennych losowych możemy obliczyć co prawda dwa pierwsze momenty przybliżenia (wartość oczekiwaną i wariancję), ale trudno było z tego dotychczas cokolwiek wnioskować o samej dystrybuancie [2]. Celem więc niniejszej pracy jest podanie stosunkowo prostej metody szacowania dystrybuanty funkcji zmiennych losowych; metody, która dawałaby wystarczającą zgodność z rozkładami rzeczywistymi, a jednocześnie nie wymagałaby przeprowadzenia żmudnych całkowań.

W punkcie pierwszym udowodniono dwa twierdzenia, które, przy pewnych założeniach, dają możliwość szacowania dystrybuanty funkcji zmiennych losowych za pomocą dwóch innych funkcji.

Uproszczenia wynikające z zastosowania kombinacji liniowych zmiennych losowych jako funkcji pomocniczych są rozpatrywane w punkcie drugim. W punkcie trzecim wykorzystano twierdzenie o oszacowaniu dla określenia dystrybuanty obciążenia granicznego płyt sztywno-plastycznych o losowych momentach granicznych. Dyskusję dotyczącą efektywności metody zawiera rozdział czwarty.

## 1. TWIERDZENIA O OSZACOWANIACH DYSTRYBUANTY FUNKCJI ZMIENNYCH LOSOWYCH

Przypuśćmy, że poszukujemy dystrybuanty funkcji zmiennych losowych  $X_i$  postaci

$$(1.1) \quad Y_1 = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Niech funkcja  $\varphi$  będzie ciągła względem wszystkich zmiennych  $x_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  i ściśle monotoniczna względem jednej ze zmiennych  $x_k$  (w dalszych rozważaniach, dla ustalenia uwagi, przyjmujemy ściśłą monotoniczność względem współrzędnej  $x_1$ ) oraz będzie posiadała ciągłe wszystkie pochodne cząstkowe  $\partial\varphi/\partial x_i$ . Założenia te muszą być spełnione w obszarze

$$(1.2) \quad D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in [\alpha_i, \beta_i] \quad \text{dla } i=1, 2, \dots, n\}.$$

Dla obliczenia dystrybuanty zmiennej losowej  $Y_1$  należy [1] (przez dopisanie  $n-1$  tożsamości) zadanie sprowadzić do przekształcenia

$$(1.3) \quad \begin{aligned} X_1 &= \varphi^{-1}(Y_1, Y_2, \dots, Y_n), \\ X_2 &= Y_2, \\ &\dots \dots \dots \\ X_n &= Y_n. \end{aligned}$$

Jakobian tego przekształcenia jest równy

$$(1.4) \quad J = \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial y_1}.$$

Oznaczając

$$(1.5) \quad y_{\min} = \min_D \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

wyrazimy dystrybuantę zmiennej losowej  $Y_1$  w postaci

$$(1.6) \quad F_{Y_1}(y_1) = P[Y_1 \leq y_{\min}] + P[y_{\min} < Y_1 \leq y_1] = P[Y_1 \leq y_{\min}] + \tilde{F}_{Y_1}(y_1).$$

Jeżeli wielowymiarowa zmienna losowa  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  jest typu ciągłego o funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , to oznaczając

$$(1.7) \quad S = \{(x_2, \dots, x_n) : x_i \in [\alpha_i, \beta_i] \text{ dla } i=2,3, \dots, n\}$$

możemy obliczyć drugi składnik w (1.6) następująco:

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \tilde{F}_{Y_1}(y_1) &= \int_{y_{\min}}^{y_1} \int_S f[\varphi^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_n), y_2, \dots, y_n] \left| \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial y_1} \right| ds dy_1 = \\ &= \begin{cases} \int_S \int_{\varphi^{-1}(y_{\min}, x_2, \dots, x_n)}^{\varphi^{-1}(y_1, x_2, \dots, x_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 ds & \text{dla } \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} > 0, \\ \int_S \int_{\varphi^{-1}(y_1, x_2, \dots, x_n)}^{\varphi^{-1}(y_{\min}, x_2, \dots, x_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 ds & \text{dla } \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} < 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_S \int_{\alpha_1}^{\varphi^{-1}(y_1, x_2, \dots, x_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 ds & \text{dla } \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} > 0, \\ \int_S \int_{\varphi^{-1}(y_1, x_2, \dots, x_n)}^{\beta_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 ds & \text{dla } \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Dla oszacowania pierwszego składnika w (1.6) zauważmy, że uwzględniając (1.5) prawdziwą jest następująca relacja:

$$(1.9) \quad \{\omega : Y_1(\omega) \leq y_{\min}\} \subset \bigcup_{i=1}^n \{\omega : X_i \notin [\alpha_i, \beta_i]\},$$

czyli

$$(1.10) \quad P[Y_1 \leq y_{\min}] \leq P[X_1 \notin [\alpha_1, \beta_1] \vee X_2 \notin [\alpha_2, \beta_2] \vee \dots \vee X_n \notin [\alpha_n, \beta_n]],$$

gdzie  $\omega$  oznacza zdarzenie elementarne z przestrzeni probabilistycznej  $\Omega$ .

Weźmy pod uwagę pewną nową funkcję zmiennych losowych  $X_i$

$$(1.11) \quad Y_1^* = \psi(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

która spełniając wszystkie założenia przyjęte dla funkcji  $\varphi$  będzie ponadto spełniała nierówność

$$(1.12) \quad \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ w obszarze } D.$$

Oznaczając

$$(1.13) \quad y_{\min}^* = \min_D \psi(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

obliczamy następującą całkę:

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \bar{F}_{Y_1^*}(y_1) &= P[y_{\min}^* < Y_1^* \leq y_1] = \\ &= \int_{y_{\min}^*}^{y_1} \int_S f[\psi^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_n), y_2, \dots, y_n] \left| \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial y_1} \right| ds dy_1 = \\ &= \begin{cases} \int_S \int_{\alpha_1}^{\psi^{-1}(y_1, x_2, \dots, x_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 ds & \text{dla } \frac{\partial \psi}{\partial x_1} > 0, \\ \int_S \int_{\psi^{-1}(y_1, x_2, \dots, x_n)}^{\beta_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 ds & \text{dla } \frac{\partial \psi}{\partial x_1} < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Zauważmy, że jeżeli spełniona jest nierówność (1.12) to prawdziwe są następujące nierówności dla funkcji odwrotnych:

$$(1.15) \quad \psi^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_n) \leq \varphi^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad \text{dla } \frac{\partial \psi}{\partial x_1} > 0 \text{ i } \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} > 0$$

oraz

$$\psi^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_n) \geq \varphi^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad \text{dla } \frac{\partial \psi}{\partial x_1} < 0 \text{ i } \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} < 0.$$

Uwzględniając (1.15) w (1.14) i (1.8) i wykorzystując (1.6) i (1.10) możemy sformułować następujące

**TWIERDZENIE 1.** Jeżeli dwie funkcje zmiennych losowych  $X_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ,  $Y_1 = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,  $Y_1^* = \psi(X_1, X_2, \dots, X_n)$  spełniają w obszarze  $D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_i \in [\alpha_i, \beta_i] \text{ dla } i=1, 2, \dots, n\}$  następujące założenia: 1) są ciągle względem zmiennych  $x_x$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ; 2) są ściśle monotoniczne względem jednej ze zmiennych  $x_k$  (np.  $x_1$ ); 3) są ciągle wszystkie pochodne cząstkowe; 4)  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} > 0$  (np. dla  $k=1$ ); 5)  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , to dystrybuantę zmiennej losowej  $Y_1$  można oszacować od dołu następująco:

$$(1.16) \quad F_{Y_1}(y_1) \geq \begin{cases} 0 & \text{dla } y_1 \leq y_{\min}^* \\ \bar{F}_{Y_1^*}(y_1) = P[y_{\min}^* < Y_1^* \leq y_1] & \text{dla } y_{\min}^* < y_1 \leq y_{\max}^*, \\ \bar{F}_{Y_1^*}(y_{\max}^*) = P[y_{\min}^* < Y_1^* \leq y_{\max}^*] & \text{dla } y_1 > y_{\max}^*, \end{cases}$$

gdzie

$$(1.17) \quad y_{\min}^* = \min_D \psi(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y_{\max} = \max_D \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Podobne rozważania można przeprowadzić dla funkcji

$$(1.18) \quad Y_1^0 = \theta(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

Biorąc pod uwagę nierówność (1.10) otrzymujemy oszacowanie od góry dystrybuanty funkcji  $\varphi$  z twierdzenia:

**TWIERDZENIE 2.** *Jeżeli dwie funkcje zmiennych losowych  $X_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ,  $Y_1 = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,  $Y_1^0 = \theta(X_1, X_2, \dots, X_n)$  spełniają w obszarze*

$$D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in [\alpha_i, \beta_i] \text{ dla } i=1, 2, \dots, n\}$$

*następujące założenia: 1) są ciągle względem zmiennych  $x_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ; 2) są ściśle monotoniczne względem jednej ze zmiennych  $x_k$  (np.  $x_1$ ); 3) są ciągle wszystkie pochodne cząstkowe; 4)  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} > 0$  (np. dla  $k=1$ ); 5)  $\theta(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , to dystrybuantę zmiennej losowej  $Y_1$  można oszacować od góry następująco:*

$$(1.19) \quad F_{Y_1}(y_1) \leq \begin{cases} 1 - P[(X_1, X_2, \dots, X_n) \in D] & \text{dla } y_1 \leq y_{\min}^0, \\ P[y_{\min}^0 < Y_1^0 \leq y_1] + 1 - P[(X_1, X_2, \dots, X_n) \in D] & \text{dla } y_{\min}^0 < y_1 \leq y_{\max}^0, \\ 1 & \text{dla } y_1 > y_{\max}^0, \end{cases}$$

gdzie

$$(1.20) \quad y_{\min}^0 = \min_D \theta(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y_{\max}^0 = \max_D \theta(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Rozpatrzmy bardziej szczególny przypadek, w którym spełnione będą wszystkie założenia o funkcji  $\varphi$  podane na początku tego punktu, a ponadto w przestrzeni zmiennych losowych  $X_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , będzie istniał obszar

$$(1.21) \quad D_0 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) > y_{\min} \wedge (x_i \in [\alpha_i, b_i] \vee x_i \in [a_i, \beta_i]) \text{ dla } i=1, 2, \dots, n\},$$

gdzie  $a_i$ ,  $b_i$  oznaczają odpowiednio dolną i górną granicę określoności zmiennej losowej  $X_i$ .

Ponieważ prawdziwa jest relacja

$$(1.22) \quad \{\omega : Y_1(\omega) \leq y_{\min}\} \subset \Omega - \{\omega : (X_1, X_2, \dots, X_n) \in D_0\}$$

nierówność (1.10) przyjmie więc postać

$$(1.23) \quad P[Y_1 \leq y_{\min}] \leq 1 - P[(X_1, X_2, \dots, X_n) \in D_0].$$

Można więc sformułować następujące

**TWIERDZENIE 2a.** *Jeżeli spełnione są wszystkie założenia twierdzenia 2 i jeżeli dodatkowo istnieje w przestrzeni zmiennych losowych  $X_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , taki obszar  $D_0$ , że dla każdej ze zmiennych jest on ograniczony (przynajmniej jednostronnie)*

wartością granicy określoności odpowiedniej zmiennej losowej, a wartość funkcji  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  w tym obszarze będzie nie mniejsza niż minimalna jej wartość w obszarze  $D \subset D_0$ , to dystrybuenta zmiennej losowej  $Y_1 = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$  może być szacowana od góry przez następującą nierówność:

$$(1.24) \quad F_{Y_1}(y_1) \leq \begin{cases} 1 - P[(X_1, X_2, \dots, X_n) \in D_0] & \text{dla } y_1 \leq y_{\min}^0, \\ P[y_{\min}^0 < Y_1 \leq y_1] + 1 - P[(X_1, X_2, \dots, X_n) \in D_0] & \text{dla } y_{\min}^0 < y_1 \leq y_{\max}^0, \\ 1 & \text{dla } y_1 > y_{\max}^0, \end{cases}$$

gdzie  $y_{\min}^0 = \min_D \theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y_{\max}^0 = \max_D \theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Zauważmy, że ze względu na relację

$$(1.25) \quad D \subset D_0$$

spełniona jest następująca nierówność:

$$(1.26) \quad P[(X_1, X_2, \dots, X_n) \in D] \leq P[(X_1, X_2, \dots, X_n) \in D_0].$$

Porównując (1.24) z (1.19) oraz uwzględniając (1.26) widzimy, że istnienie obszaru  $D_0$  pozwala uzyskać dokładniejsze oszacowania górne dystrybuenty funkcji zmiennych losowych.

## 2. KOMBINACJE LINIOWE ZMIENNYCH LOSOWYCH JAKO FUNKCJE APROKSYMUJĄCE

Dzięki powyższym twierdzeniom otrzymaliśmy możliwość szacowania od góry i od dołu dystrybuenty funkcji zmiennych losowych. Nawet dla skomplikowanych funkcji i rozkładów prawdopodobieństwa, kiedy ściśle wyznaczenie dystrybuenty jest żmudne lub niemożliwe, dobierając odpowiednio funkcje  $\psi$  i  $\theta$  uzyskujemy możliwość oszacowania rozkładu wynikowego.

Najszersze zastosowanie może znaleźć ta metoda w takich przypadkach, w których za funkcje  $\psi$  i  $\theta$  można przyjmować kombinacje liniowe zmiennych losowych  $X_i$  jako dobrze aproksymujące funkcję  $\varphi$  w obszarze  $x_i \in [\alpha_i, \beta_i]$   $i=1, 2, \dots, n$ . Wtedy dla pewnych szczególnych funkcji lub rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych  $X_i$  można wykorzystać następujące uproszczenia:

1) jeżeli  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} > 0$  ( $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} < 0$ ) dla  $i=1, 2, \dots, n$ , to jako jedną z funkcji aproksymujących  $\theta(\psi)$  przyjmujemy hiperpłaszczyznę styczną, np. w punkcie  $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n)$  ( $\bar{X}_i$  oznacza wartość średnią zmiennej  $X_i$ ) do powierzchni utworzonej przez funkcję  $\varphi$ , czyli

$$(2.1) \quad \theta(\psi)(X_1, X_2, \dots, X_n) = \varphi(\bar{X}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(\bar{X})}{\partial \bar{X}_i} (X_i - \bar{X}_i),$$

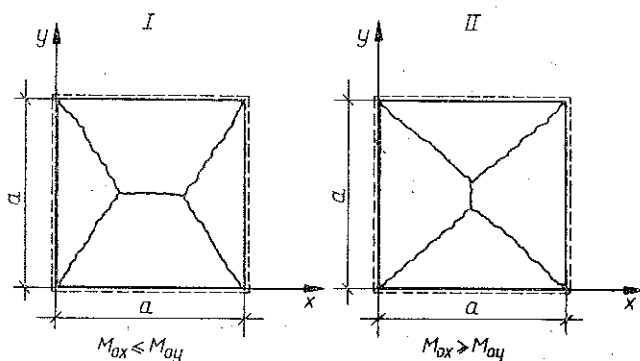
gdzie  $X$  oznacza wektor losowy, a  $\bar{X}$  — wektor  $[\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n]$ ;

2) jeżeli zmienne losowe  $X_i$  są niezależne o takim rozkładzie prawdopodobieństwa, dla którego prawdziwe jest twierdzenie o dodawaniu, to typ rozkładu szacującego jest taki sam, jak typ rozkładu zmiennych losowych  $X_i$ , a jego parametry obliczamy na podstawie prostych obliczeń arytmetycznych.

## 3. PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ

Przedstawioną w poprzednim punkcie metodę szacowania dystrybuanty funkcji zmiennych losowych przy pomocy ich kombinacji liniowych wykorzystano dla określenia prawdopodobieństwa awarii płyt sztywno-plastycznych o losowych momentach granicznych  $M_{0i}$ ,  $i=x, y$ .

Chcąc ściśle określić dystrybuantę obciążenia granicznego wyznaczonego z teorii linii załomów w przypadku losowej ortotropii, musimy uwzględnić w obliczeniach niejednoznaczność mechanizmów zniszczenia. Na przykład dla płyty kwadratowej swobodnie podpartej, obciążonej równomiernym ciśnieniem mogą realizować się dwa typy mechanizmów [3]:



Rys. 1

Przy obliczaniu dystrybuanty niejednoznaczność tę uwzględniamy obliczając prawdopodobieństwo:

$$(3.1) \quad P [Q \leq q] = P [Q_I \leq q \vee Q_{II} \leq q],$$

gdzie  $Q$  oznacza losowe obciążenie graniczne,  $Q_I$ ,  $Q_{II}$  — losowe obciążenia graniczne odpowiednio dla I i II mechanizmu zniszczenia.

Jeżeli szacujemy dystrybuantę obciążenia korzystając z kombinacji liniowych, to możemy tak dobrać jej współczynniki, aby mieć jedną funkcję dla całego obszaru określoności momentów.

*Przykład 1*

Płyta kwadratowa, swobodnie podparta na czterech krawędziach, jest obciążona równomiernym ciśnieniem. Momenty graniczne  $M_{0x}$  i  $M_{0y}$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowych rozkładach.

Obciążenie graniczne wyznaczone za pomocą teorii linii załomów wyraża się dla poszczególnych mechanizmów (rys. 1) następująco [3]:

dla mechanizmu I

$$(3.2) \quad Q_I = \varphi_I (M_{0x}, M_{0y}) = \frac{24M_{0y}^2}{a^2 (\sqrt{M_{0x} + 3M_{0y}} - \sqrt{M_{0x}})^2};$$

dla mechanizmu II

$$(3.3) \quad Q_{II} = \varphi_{II}(M_{0x}, M_{0y}) = \frac{24M_{0x}^2}{a^2 (\sqrt{M_{0y}} + 3M_{0x} - \sqrt{M_{0y}})^2}.$$

Przyjęto następujące funkcje aproksymujące:

od góry, ze względu na ujemny znak drugich pochodnych zgodnie z p. 2.1., płaszczyzną styczną

$$(3.4) \quad Q^* = \psi(M_{0x}, M_{0y}) = \frac{12}{a^2} (M_{0x} + M_{0y});$$

od dołu płaszczyzną przechodzącą przez punkty  $\varphi_I(\alpha, \alpha)$ ,  $\varphi_I(\alpha, \beta) = \varphi_{II}(\beta, \alpha)$  spełniającą nierówność (1.18)

$$(3.5) \quad Q^0 = \theta(M_{0x}, M_{0y}) = \frac{1}{\beta - \alpha} [q_A(\beta + \alpha) - 2q_B\alpha + (q_B - q_A)(M_{0x} + M_{0y})],$$

gdzie  $\alpha$  i  $\beta$  oznaczają granice obszaru

$$(3.6) \quad D = \{(M_{0x}, M_{0y}) : M_{0x} \in [\alpha, \beta], M_{0y} \in [\alpha, \beta]\},$$

oraz

$$q_A = \varphi_I(\alpha, \alpha), \quad q_B = \varphi_I(\alpha, \beta).$$

Obliczenia przeprowadzono dla dwóch typów rozkładów prawdopodobieństwa momentów granicznych.

1. Momenty graniczne mają taki sam rozkład równomierny o parametrach

$$\bar{M}_{0x} = \bar{M}_{0y} = M_0,$$

$$\text{Var } M_{0x} = \text{Var } M_{0y} = (0,1M_0)^2 = \sigma^2 M_0^2.$$

Granice obszaru  $D$  pokrywają się z granicami określoności momentów granicznych, czyli

$$(3.7) \quad \alpha = M_0(1 - \sqrt{3}\sigma), \quad \beta = M_0(1 + \sqrt{3}\sigma).$$

Graniczne punkty zmienności oszacowań obliczamy ze wzorów

$$(3.8) \quad \begin{aligned} q_{\min}^* &= \psi(\alpha, \alpha), & q_{\min}^0 &= \theta(\alpha, \alpha), \\ q_{\max}^* &= \psi(\beta, \beta), & q_{\max}^0 &= \theta(\beta, \beta). \end{aligned}$$

Przy powyższych założeniach wyznaczono dystrybuantę dokładną i funkcje szacujące dystrybuantę bezwymiarowego obciążenia granicznego określonego następująco:  $\Xi = Q/\bar{Q}$ , gdzie  $\bar{Q} = \varphi_I(\bar{M}_{0x}, \bar{M}_{0y})$ .

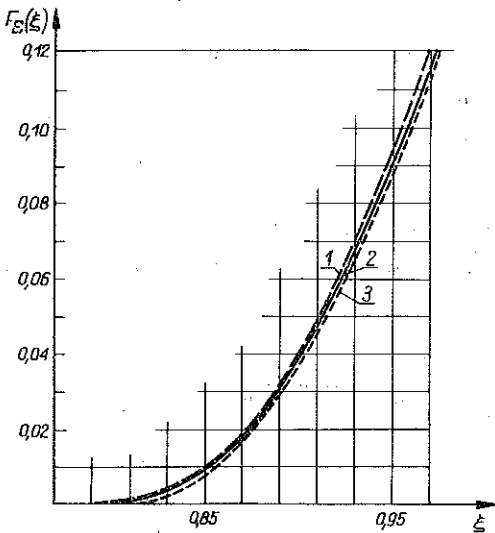
W przykładzie przyjęto rozkład równomierny jedynie dlatego, aby można było uzyskać dystrybuantę dla ścisłej postaci obciążenia granicznego. Wyniki dla małych wartości prawdopodobieństwa awarii przedstawiono na rys. 2. (1 — rozwiązanie wykorzystujące (3.5), 2 — rozwiązanie dokładne, 3 — rozwiązanie wykorzystujące (3.4)).



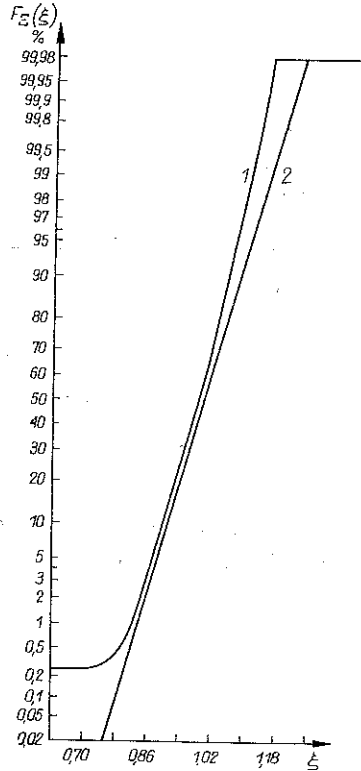
2. Momenty graniczne mają rozkłady normalne o parametrach jak w p. 1. Granice obszaru  $D$  określonego w (3.6) przyjęto

$$(3.9) \quad \alpha = M_0(1 - 3\sigma), \quad \beta = M_0(1 + 3\sigma).$$

Graniczne punkty zmienności oszacowań obliczamy ze wzorów (3.8), wykorzystując granice obszaru (3.9). Ze względu na ścisłą monotoniczność obciążenia granicznego



Rys. 2



Rys. 3

względem obu momentów (dla  $M_{0x} > 0, M_{0y} > 0$ ) można wykorzystać przy wyznaczaniu oszacowania górnego dystrybuanty twierdzenie 2a, a obszar  $D_0$  określamy następująco:

$$(3.10) \quad D_0 = \{(M_{0x}, M_{0y}) : M_{0x} \in [\alpha, \infty), M_{0y} \in [\alpha, \infty)\}.$$

Wyznaczono jedynie oszacowanie dystrybuanty bezwymiarowego obciążenia granicznego, ponieważ uzyskanie rozwiązania ścisłego dla tego typu rozkładu jest niemożliwe. Wyniki przedstawiono na rys. 3 (1 — rozwiązanie wykorzystujące (3.5.), 2 — rozwiązanie wykorzystujące (3.4.))

*Przykład 2*

Płyta kwadratowa, swobodnie podparta na trzech krawędziach z czwartą krawędzią swobodną, jest obciążona równomiernym ciśnieniem. Momenty graniczne  $M_{0x}$

i:  $M_{0y}$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o tak dobranych parametrach rozkładów, aby realizował się tylko jeden mechanizm zniszczenia (rys. 4).

Obciążenie graniczne ma postać

$$(3.11) \quad Q = \varphi(M_{0x}, M_{0y}) = \frac{8}{3a^2} [2M_{0y} + \sqrt{M_{0y}(4M_{0y} + 9M_{0x})}].$$

Przyjęto następujące funkcje aproksymujące:

od góry, ze względu na ujemny znak drugich pochodnych zgodnie z p. 2.1, płaszczyzną styczną

$$(3.12) \quad Q^* = \psi(M_{0x}, M_{0y}) = \frac{\partial \varphi(\bar{M}_{0x}, \bar{M}_{0y})}{\partial \bar{M}_{0x}} M_{0x} + \frac{\partial \varphi(\bar{M}_{0x}, \bar{M}_{0y})}{\partial \bar{M}_{0y}} M_{0y};$$

od dołu płaszczyzną przechodzącą przez punkty  $q_A, q_B, q_D$ , która spełnia nierówność (1.18),

$$(3.13) \quad Q = \theta(M_{0x}, M_{0y}) = \frac{1}{(\beta - \alpha)(\delta - \gamma)} [q_A(\beta\delta - \alpha\gamma) - q_B\alpha(\delta - \gamma) - q_D\gamma(\beta - \alpha) + (q_B - q_A)(\delta - \gamma)M_{0x} + (q_D - q_A)(\beta - \alpha)M_{0y}],$$

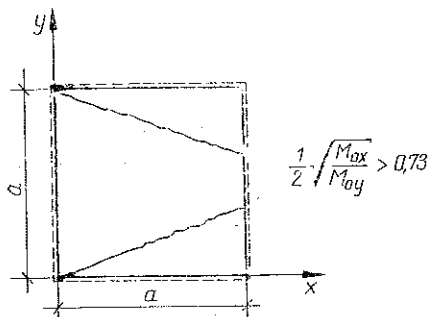
gdzie  $\alpha, \beta$  i  $\gamma, \delta$  oznaczają granice obszaru

$$(3.14) \quad D = \{(M_{0x}, M_{0y}) : M_{0x} \in [\alpha, \beta], M_{0y} \in [\gamma, \delta]\},$$

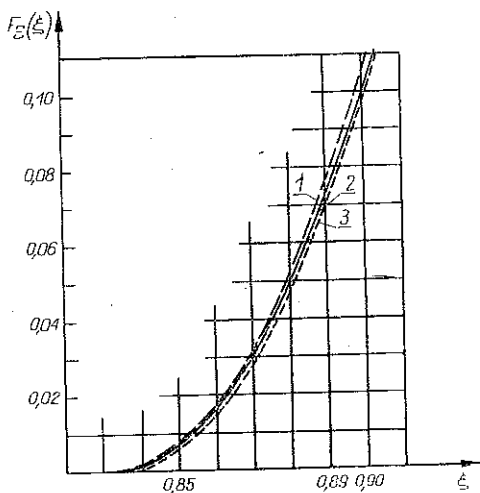
oraz

$$q_A = \varphi(\alpha, \gamma), \quad q_B = \varphi(\beta, \gamma), \quad q_D = \varphi(\alpha, \delta).$$

Obliczenia przeprowadzono dla dwóch typów rozkładów prawdopodobieństwa momentów granicznych.



Rys. 4



Rys. 5

1. Oba momenty mają rozkład równomierny o parametrach

$$\bar{M}_{0x} = 3M_0, \quad \bar{M}_{0y} = M_0,$$

$$\text{Var } M_{0x} = (0,09M_0)^2, \quad \text{Var } M_{0y} = (0,1M_0)^2.$$

Granice obszaru  $D$  pokrywają się z granicami określoności momentów:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \alpha &= M_0 (3 - 0,09 \sqrt{3}), & \gamma &= M_0 (1 - 0,10 \sqrt{3}), \\ \beta &= M_0 (3 + 0,09 \sqrt{3}), & \delta &= M_0 (1 + 0,10 \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Graniczne punkty zmienności oszacowań obliczamy ze wzorów

$$(3.16) \quad \begin{aligned} y_{\min}^* &= \psi(\alpha, \gamma), & y_{\min}^0 &= \theta(\alpha, \gamma), \\ y_{\max}^* &= \psi(\beta, \delta), & y_{\max}^0 &= \theta(\beta, \delta). \end{aligned}$$

Przy powyższych założeniach wyznaczono dystrybuantę dokładną i funkcje szacujące dystrybuantę bezwymiarowego obciążenia granicznego określonego następująco:  $\Xi = Q/\bar{Q}$ , gdzie  $\bar{Q} = \varphi(\bar{M}_{0x}, \bar{M}_{0y})$ .

Rozkład równomierny przyjęto podobnie jak w przykładzie 1.1 (jedynie dlatego, aby można było uzyskać dystrybuantę dla ścisłej postaci obciążenia granicznego). Wyniki dla małych wartości prawdopodobieństwa awarii przedstawiono na rys. 5 (1 — rozwiązanie wykorzystujące (3.13.), 2 — rozwiązanie dokładne, 3 — rozwiązanie wykorzystujące (3.12)).

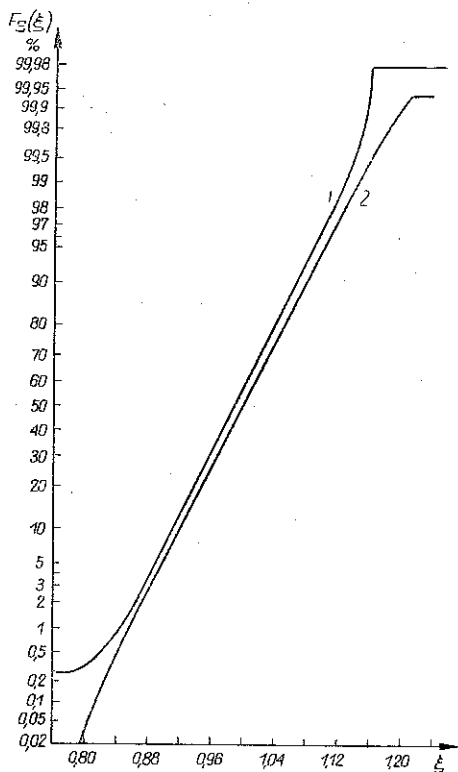
2. Momenty graniczne mają rozkłady normalne o parametrach

$$\bar{M}_{0x} = 3M_0, \quad \bar{M}_{0y} = M_0,$$

$$\begin{aligned} \text{Var } M_{0x} &= \text{Var } M_{0y} = \\ &= (0,09 M_0)^2 = \sigma^2 M_0^2. \end{aligned}$$

Granice obszaru określonego w (3.14) są następujące:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \alpha &= M_0 (3 - 3\sigma), \\ \gamma &= M_0 (1 - 3\sigma), \\ \beta &= M_0 (3 + 3\sigma), \\ \delta &= M_0 (1 + 3\sigma). \end{aligned}$$



Rys. 6

Granice zmienności funkcji szacujących obliczamy z zależności (3.16) wykorzystując granice obszaru (3.17). Dalsze postępowanie jest analogiczne do zastosowanego w przykładzie 1.

Oszacowania dystrybuanty bezwymiarowego obciążenia granicznego przedstawiono na rys. 6 (1 — rozwiązanie wykorzystujące (3.13), 2 — rozwiązanie wykorzystujące (3.12)).

## 4. WNIOSKI

Przykłady przedstawione w p. 3 zdają się potwierdzać przydatność proponowanej metody szacowania dystrybuanty funkcji zmiennych losowych.

Oczywiście korzystanie z aproksymacji liniowych, bardzo upraszczających zadanie, może dawać dobre rezultaty tylko wtedy, gdy zmienność pochodnych cząstkowych funkcji, której dystrybuanty poszukujemy, jest dostatecznie mała w obszarze  $D$  określonym w p. 1 przez (1.2). Nie można jednak zdefiniować żadnej konkretnej wartości wyznaczającej dopuszczalną zmienność, ponieważ jakość oszacowań zależna jest nie tylko od samej funkcji, ale także od rozkładów prawdopodobieństwa losowych argumentów tej funkcji. Możemy to dokładnie zaobserwować w przedstawionych przykładach. Dla równomiernych rozkładów momentów granicznych różnice pomiędzy oszacowaniami górnym i dolnym dystrybuanty bezwymiarowego obciążenia granicznego były pomijalnie małe, dla rozkładów zaś normalnych dochodziły one do 7%.

Dobre oszacowania przy wykorzystaniu aproksymacji liniowych uzyskujemy wtedy, gdy funkcja mało różni się od postaci liniowej lub gdy obszar  $D$  jest mały. Zwiększenie dokładności oszacowania górnego przez zmniejszanie obszaru  $D$  jest możliwe tylko wtedy, gdy możemy stosować twierdzenie 2a. Dokładność ta zwiększa się w przedziale  $y_1 \in [y_{\min}, y_{\max}]$ , który wraz ze zmniejszaniem obszaru  $D$  także maleje. Dla  $y_1 > y_{\max}$  oszacowanie równe jest jedności, a więc nie dostarcza nam żadnej informacji o dystrybuancie. Jednak w przypadkach, gdy interesuje nas prawdopodobieństwo dla małych wartości  $y_1$ , taka właśnie metoda może być z powodzeniem stosowana.

Przedstawiona w dwóch pierwszych punktach metoda daje często jedyną możliwość określania dystrybuanty. Właśnie w rozważanych przykładach płyt z momentami granicznymi w postaci zmiennych losowych o rozkładach normalnych ścisłe obliczenia były niewykonalne, zastosowanie zaś aproksymacji liniowych dało stosunkowo dobrą zgodność oszacowań, a wymagało przy tym jedynie elementarnych rachunków.

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. FISZ, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1969.
2. C. A. CORNELL, *Metody probabilistyczne pierwszego rzędu w Stochastyczna mechanika konstrukcji*, Ossolineum, Wrocław 1973.
3. A. SAWCZUK, TH. JAEGER, *Grenztragfähigkeits-Theorie der Platten*, Springer-Verlag, Berlin 1963.

## Резюме

## МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ДИСТРИБУАНТЫ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПЛИТ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПРЕДЕЛЬНЫМИ МОМЕНТАМИ

Чтобы определить вероятность аварии жестко-пластической плиты мы должны знать распределение вероятности предельной несущей способности. Однако функциональная зависимость между предельными моментами и предельной нагрузкой, определенная напри-

мер из теории изломов, настолько сложная, что точное определение дистрибуанты очень трудоемкое и часто требует численных расчетов.

В работе доказаны две теоремы, которые при использовании аппроксимирующих вспомогательных функций дают возможность оценки дистрибуанты для широкого класса функций случайной переменной.

Применяя линейные комбинации случайных предельных моментов, как функции аппроксимирующие несущую способность жестко-пластической плиты со случайной ортотропией, оценены дистрибуанты множителя продольной нагрузки и, не проводя сложных расчетов, получено отличное совпадение.

#### SUMMARY

#### METHOD OF ESTIMATION OF THE DISTRIBUTION FUNCTION OF BEARING CAPACITY OF PLATES WITH RANDOM YIELD MOMENTS

To determine the probability of damage of a rigid-plastic plate the probability distribution of the bearing capacity must be known. However, the relation between yield moments and load, evaluated for example from a theory of yield lines, is so complicated that the exact evaluation of the distribution is very laborious and frequently requires numerical computation.

In this paper two theorems were demonstrated which, by use of the approximate auxiliary functions, give the possibility of the estimation of the distribution functions for a broad class of random variable functions.

Applying linear combinations of the random yield moments as the functions approximating the bearing capacity of the rigid-plastic plate with random orthotropy, the distribution function of the limit load factor was estimated and without complicated computation very good convergence was obtained.

POLSKA AKADEMIA NAUK

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

*Praca została złożona w Redakcji dnia 29 września 1974 r.*

---