ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 23, 3, 483—499, 1975
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

TECHNICZNA TEORIA PŁYT ŚREDNIEJ GRUBOŚCI

GRZEGORZ JEMIELITA (WARSZAWA)

W pracy podano teorię, w której równania ruchu i warunki brzegowe na powierzchni bocznej płyty są spełnione w sposób całkowy, natomiast pozostałe równania teorii sprężystości i warunki brzegowe na płaszczyznach ograniczających płytę są spełnione ściśle. Punktem wyjścia jest hipoteza kinematyczna (2.2). Układ równań różniczkowych (2.10) doprowadzono do bardzo prostej postaci (3.3) lub (3.5). Proponowaną teorię porównano z innymi teoriami (np. E. REISSNERA, Z. KĄCZKOWSKIEGO i innych) oraz wykazano, że dla płyty obciążonej wyłącznie wzdłuż brzegów otrzymuje się ścisłe rozwiązanie A. E. LOVE'A (punkt 4). Pracę kończy przykład liczbowy. Dokonano porównania wyników otrzymanych na podstawie różnych teorii (tablica 2) z wynikiem ścisłym [8].

1. WSTĘP

Znane teorie płyt możemy podzielić na dwie zasadnicze grupy: 1) teorie pozwalające określić stan płytowy(1) dowolnie bliski stanowi rzeczywistemu, tj. takiemu, jaki otrzymalibyśmy po rozwiązaniu trójwymiarowego zagadnienia wg teorii sprężystości; 2) teorie techniczne.

Teorie z grupy pierwszej są na ogół wyprowadzane z pełnego układu równań teorii sprężystości. Stopień trudności rozwiązania stanu płytowego wg tych teorii jest prawie taki sam, na jaki napotykamy przy rozwiązaniu pełnego układu równań teorii sprężystości. Do powyższej grupy możemy zaliczyć teorie podane w pracach [1–6, 23].

Teorie techniczne otrzymywane są przez wprowadzenie pewnych założeń upraszczających. Założenia te najczęściej sprowadzają się do przyjęcia *a priori* pewnych hipotez kinematycznych lub statycznych. Płyta, która w rzeczywistości jest continuum trójwymiarowym, zastąpiona zostaje tworem dwuwymiarowym. Literatura dotycząca technicznych teorii płyt jest bardzo bogata i dlatego wymienimy tylko te pozycje, które zdaniem autora tej pracy są najważniejsze.

G. KIRCHHOFF sprowadził trójwymiarowy problem płytowy do dwuwymiarowego przez wprowadzenie dwóch znanych hipotez: geometrycznej i statycznej. Teoria ta znana jest jako teoria płyt cienkich [7]. Teoria Kirchhoffa nie uwzględnia wpływu naprężeń stycznych na ugięcia płyty, co dla płyt o średniej grubości prowadzić może do bardzo dużych błędów [8].

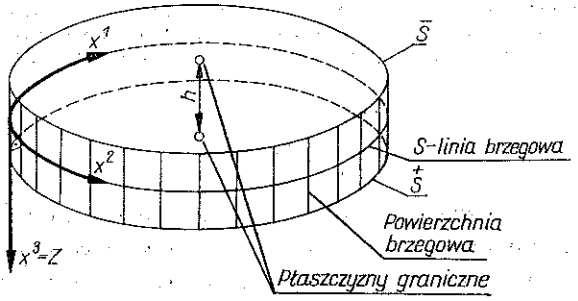
Te niedostatki usuwa teoria REISSNERA [9]. W pracach Reissnera założono liniowy rozkład naprężeń $\sigma_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) wzdłuż grubości płyty. Od czasu ukazania prac Reissnera literatura teorii płyt uległa znacznemu zwiększeniu. Różne

1) Określenie stanu płytowego na str. 484.

założenia kinematyczne lub statyczne leżą u podstaw teroii: H. HENCKY'EGO [10], Z. KĄCZKOWSKIEGO [11, s. 73], V. PANCA [12], B. WŁASOWA [13], A. GOLDENWEJZERA [14], A. KROMMA [15], S. AMBARCUMJANA [16 i 17], S. FERSHTA [18] i innych. Prawie we wszystkich wyżej wymienionych teoriach technicznych podstawowymi równaniami równowagi są równania równowagi płyty jako tworu dwuwymiarowego.

W dalszym ciągu przez «równania równowagi płyty» lub «równania ruchu płyty», będziemy rozumieć odpowiednio scałkowane różniczkowe równania równowagi (ruchu) ośrodka ciągłego.

W niniejszej pracy przyjmujemy założenia liniowej teorii sprężystości. Rozpatruje się płyty z materiału liniowo sprężystego, izotropowego i jednorodnego. Zakładamy, że grubość płyty jest stała, równa h. W proponowanej teorii zakłada się, że przemieszczenia punktów płyty są małe w porównaniu z jej grubością, a gradienty tych przemieszczeń małe w porównaniu z jednością.



Rys. 1.

W pracy stosuje się rachunek tensorowy. Konwencja sumacyjna dotyczy tylko wskaźników znajdujących się na różnych poziomach. Wszystkie wskaźniki łacińskie (np. i, j, k) przebiegają ciąg 1, 2, 3, a wskaźniki oznaczone małymi literami greckimi — α, β, γ, ciąg 1, 2. Wprowadza się prawoskrętny układ współrzędnych normalnych $\{x^\alpha, x^3=z\}$ [19, s. 21, 129–130] (rys. 1). Pochodne cząstkowe względem zmiennej $x^3=z$ w takim układzie współrzędnych możemy oznaczać następująco:

$$\frac{\partial(\ )}{\partial z}=(\ )'.$$

Inne pochodne będziemy oznaczać przecinkiem. Pochodną względem czasu oznaczamy kropką.

Rozpatruje się wyłącznie stan płytowy, a więc taki stan naprężeń i odkształceń, który powstaje w ograniczonej (lub nieograniczonej) warstwie sprężystej, poddanej działaniu obciążeń antysymetrycznych względem płaszczyzny środkowej warstwy -płyty.

Celem niniejszej pracy jest opracowanie teorii, która spełnia następujące równania i warunki:

1) równania ruchu płyty

$$Q^\alpha_{,\alpha}+\hat{p}_3=\ddot{U}_3, \quad M^\beta_{,\alpha,\beta}-Q_\alpha+\hat{m}_\alpha=\ddot{\Phi}_\alpha; \tag{1.1}$$

2) równania konstytutywne continuum trójwymiarowego

$$\sigma_{ji}=2\mu\varepsilon_{ji}+\lambda\varepsilon^{k}{}_{k}\delta_{ji}; \tag{1.2}$$

3) równania wiążące stan przemieszczenia i odkształcenia

$$\varepsilon_{ji}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}); \tag{1.3}$$

4) równania nierozdzielności

$$\in_{p}^{nr}\in_{l}^{sm}\varepsilon_{rs,mn}=0; \tag{1.4}$$

5) ścisłe warunki brzegowe na płaszczyznach granicznych (rys. 1);

6) całkowe warunki brzegowe na powierzchniach brzegowych (rys. 1).

Oczywisty jest fakt, że licząc odkształcenia z (1.3), (tak będzie w przypadku założeń kinematycznych) równania nierozdzielności (1.4) spełniamy tożsamościowo. Jeżeli punktem wyjścia technicznej teorii jest hipoteza statyczna, to odkształcenia liczymy z (1.2) i wtedy równania (1.4) mogą nie być spełnione tożsamościowo.

We wzorach (1.1)–(1.4) wprowadzono następujące oznaczenia:

siły poprzeczne

$$Q_{\alpha}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{\alpha 3}\,dz;$$

momenty zginające i skręcające

$$M_{\beta\alpha}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}z\sigma_{\beta\alpha}\,dz;$$

$$\ddot{U}_{3}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho\ddot{u}_{3}\,dz,\qquad \ddot{\Phi}_{\alpha}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho z\ddot{u}_{\alpha}\,dz, \tag{1.5}$$

$$\hat{p}_{3}=\sigma_{33}\left(x^{\alpha},\tau,\frac{h}{2}\right)-\sigma_{33}\left(x^{\alpha},\tau,-\frac{h}{2}\right)+\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}X_{3}\,dz=\overset{+}{p}_{3}+\overset{*}{p}_{3},$$

$$\hat{m}_{\alpha}=\frac{h}{2}\left(\sigma_{3\alpha}\left(x^{\alpha},\tau,\frac{h}{2}\right)+\sigma_{3\alpha}\left(x^{\alpha},\tau,-\frac{h}{2}\right)\right)+\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}zX_{\alpha}\,dz=p_{\alpha}h+\overset{*}{p}_{\alpha},$$

gdzie σ_{ji} oznaczają składowe tensora naprężenia, u_i składowe wektora przemieszczenia, ε_{ji} składowe tensora odkształcenia, $p_3=\overset{+}{p}_3+\bar{p}_3$, $hp_{\alpha}=\frac{h}{2}(\overset{+}{p}_{\alpha}-\bar{p}_{\alpha})$, $\overset{+}{p}_i,\bar{p}_i$ składowe wektora obciążenia odpowiednio na dolnej i górnej płaszczyźnie płyty, $\in_{\alpha\beta}$ symbol Ricciego, X_i składowe wektora siły masowej,

$$\overset{*}{p}_{3}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}X_{3}\,dz;\qquad \overset{*}{p}_{\alpha}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}zX_{\alpha}\,dz.$$

Dla uproszczenia zapisu nie będziemy wyszczególniać argumentu czasu τ.

2. Hipoteza kinematyczna. Stan naprężenia. Siły wewnętrzne

W stanie płytowym spełnione są następujące równości:

$$u_\alpha(x^\beta, z) = -u(x^\beta, -z), \qquad u_3(x^\alpha, z) = u_3(x^\alpha, -z). \tag{2.1}$$

We wszystkich teoriach opisujących zagadnienie trójwymiarowe za pomocą wielkości zależnych tylko od dwóch zmiennych wszystkie wyrażenia powinny być znanymi funkcjami jednej ze zmiennych, w naszym przypadku zmiennej z. Dotyczy to również funkcji (2.1), które należy przedstawić jako znane funkcje zmiennej z. Można tego dokonać różnymi sposobami, np. rozkładając funkcje (2.1) w szeregi potęgowe, szeregi wielomianów Legendre'a itp. [4 i 20]. W niniejszej pracy zastosujemy sposób polegający na przedstawieniu funkcji (2.1) w postaci

$$u_\alpha(x^i) = -t'(z)\, w(x^\beta)_{,\alpha} + s'(z)\,\theta_\alpha(x^\beta) + \frac{f'(z)}{\mu} p_\alpha(x^\beta), \quad u_3(x^i) = w(x^\beta) - \Gamma(x^\beta, z), \tag{2.2}$$

gdzie

$$\Gamma(x^\beta, z) = \frac{\nu}{1-\nu}\left[s(z)\,\theta^\alpha_{,\alpha}(x^\beta) - t(z)\,\nabla^2 w(x^\beta) + \frac{f(z)}{\mu} p^\alpha{}_{,\alpha}(x^\beta)\right] - \tag{2.3}$$

$$- \frac{1}{2\mu+\lambda}\left[g_1(z) p_3(x^\beta) + g_2(z) \overset{*}{p}_3(x^\beta)\right].$$

We wzorach tych μ, λ oznaczają stałe Lamégo, ν współczynnik Poissona,

$$\nabla^2(\ ) = \delta^{\alpha\beta}(\ )_{,\alpha\beta}.$$

W powyższej hipotezie odnajdujemy analogiczne założenia Z. Kączkowskiego na $u_\alpha(x^i)$ [11, s. 75] z tą różnicą, że u nas funkcja $w(x^\alpha)$ w jest funkcją przemieszczenia płaszczyzn granicznych.

Hipotezy na $u_3(x^i)$ w takiej postaci autor niniejszej pracy nie napotkał w znanej literaturze. Wzór $(2.2)_2$ jest wynikiem założenia *à priori* rozkładu naprężeń σ_{33} wzdłuż grubości płyty [por. wzory $(2.4)_3$] oraz odpowiedniego scałkowania równania konstytutywnego (1.2) dla $i=j=3$.

Jak na razie pozostaje sprawa otwarta doboru funkcji $t(z)$, $s(z)$, $f(z)$, $g_1(z)$, $g_2(z)$. Wymiar funkcji t, s, f wynosi [cm^2], g_1, g_2 – [cm].

Korzystając z (2.2), (2.3), (1.3) i (1.2) otrzymuje się następujące wzory na naprężenia w dowolnym punkcie płyty:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \mu\left[-2t'(z) w_{,\alpha\beta} + s'(z)(\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha}) + \frac{f'(z)}{\mu}(p_{\alpha,\beta} + p_{\beta,\alpha})\right] +$$

$$+ 2\mu\Gamma'(x^\alpha, z)\,\delta_{\alpha\beta} + (g_1'(z) p_3 + g_2'(z) \overset{*}{p}_3)\,\delta_{\alpha\beta}, \tag{2.4}$$

$$\sigma_{\alpha 3} = \sigma_{3\alpha} = \mu[s''(z)\,\theta_\alpha - \Gamma(x^\alpha, z)_{,\alpha}] + f''(z) p_\alpha(x^\beta),$$

$$\sigma_{33} = g_1'(z) p_3(x^\beta) + g_2'(z) \overset{*}{p}_3(x^\beta),$$

gdzie $\delta_{\alpha\beta}$ oznacza deltę Kroneckera oraz $\Gamma'(x^\alpha, z) = \partial_z \Gamma(x^\alpha, z)$.

Naprężenia $\sigma_{3\alpha}$, σ_{33} muszą spełniać odpowiednie warunki brzegowe na płaszczyznach granicznych $z=\pm h/2$:

$$\sigma_{3\alpha}\left(x^\beta, \pm\frac{h}{2}\right)=p_\alpha(x^\beta), \qquad \sigma_{33}\left(x^\beta, \pm\frac{h}{2}\right)=\pm\frac{p_3(x^\beta)}{2}. \tag{2.5}$$

Przyjmując we wzorach $(2.4)_{2,3}$ $z=\pm h/2$ i przyrównując do (2.5) otrzymujemy następujące warunki na funkcje zmiennej z:

$$t\left(\pm\frac{h}{2}\right)=s\left(\pm\frac{h}{2}\right)=s''\left(\pm\frac{h}{2}\right)=f\left(\pm\frac{h}{2}\right)=g_1\left(\pm\frac{h}{2}\right)=$$
$$=g_2\left(\pm\frac{h}{2}\right)=g_2'\left(\pm\frac{h}{2}\right)=0, \tag{2.6}$$
$$f''\left(\pm\frac{h}{2}\right)=t''\left(\pm\frac{h}{2}\right)=1, \qquad g_1'\left(\pm\frac{h}{2}\right)=\pm\frac{1}{2}.$$

Obliczmy ze wzoru $(2.2)_2$ wielkość przemieszczenia $u_3(x^\alpha, \pm h/2)$:

$$u_3\left(x^\alpha, \pm\frac{h}{2}\right)=w(x^\alpha)-\Gamma\left(x^\alpha, \pm\frac{h}{2}\right)=w(x^\alpha),$$

ponieważ

$$\Gamma\left(x, \pm\frac{h}{2}\right)=0 \qquad \text{[por. warunki (2.6)]}.$$

Tak więc funkcja $w(x^\alpha)$ określa nam ugięcie płaszczyzn ograniczających płytę. Łatwo zauważyć, że $u_3(x^\alpha, 0)\neq u_3(x^\alpha, \pm h/2)=w(x^\alpha)$. Widać wyraźną różnicę pomiędzy naszymi założeniami a przeważnie używanymi hipotezami, w których zakłada się, że przemieszczenie $w(x^\alpha)$ jest przemieszczeniem płaszczyzny środkowej płyty.

Wstawiając naprężenia (2.4) do wzorów określających siły wewnętrzne $(1.5)_{1,2}$ i uwzględniając (2.6), otrzymujemy

$$Q_\alpha=2\mu h\,[k_1\,\theta_\alpha(x^\beta)-\hat{\Gamma}(x^\beta)_{,\alpha}]+2hk_6\,p_\alpha,$$
$$M_{\beta\alpha}=2h^3\,\mu\,[-2k_4\,w_{,\beta\alpha}+k_2\,(\theta_{\alpha,\beta}+\theta_{\beta,\alpha})]+4\mu hT(x^\gamma)\,\delta_{\alpha\beta}+ \tag{2.7}$$
$$+2h^3\,k_7\,(p_{\alpha,\beta}+p_{\beta,\alpha})+2h^2\,(k_3\,p_3+k_5\,\overset{*}{p}_3)\,\delta_{\alpha\beta},$$

gdzie

$$\hat{\Gamma}(x^\alpha)=\frac{1}{h}\int_0^{\frac{h}{2}}\Gamma(x^\alpha, z)\,dz=\frac{\nu h^2}{1-\nu}\left(\bar{k}_2\,\theta^\beta_{,\beta}-\bar{k}_4\,\nabla^2\,w+\frac{\bar{k}_7}{\mu}\,p^\beta_{,\beta}\right)-$$
$$-\frac{h}{2\mu+\lambda}\,(\bar{k}_3\,p_3+\bar{k}_5\,\overset{*}{p}_3), \tag{2.8}$$

$$T(x^\alpha)=\frac{1}{h}\int_0^{\frac{h}{2}} z\Gamma'(x^\alpha, z)\,dz=\frac{\nu h^2}{1-\nu}\left(k_2\,\theta^\beta_{,\beta}-k_4\,\nabla^2\,w+\frac{k_7}{\mu}\,p^\beta_{,\beta}\right)-$$
$$-\frac{h}{2\mu+\lambda}\,(k_3\,p_3+k_5\,\overset{*}{p}_3).$$

Bezwymiarowe współczynniki $k_1, ..., k_8, \bar{k}_2, ..., \bar{k}_5, \bar{k}_7$ wynoszą:

$$k_1 = \frac{1}{h}\int_0^{\frac{h}{2}} s''(z)\,dz, \quad k_2 = \frac{1}{h^3}\int_0^{\frac{h}{2}} zs'(z)\,dz,$$

$$k_3 = \frac{1}{h^2}\int_0^{\frac{h}{2}} zg_1'(z)\,dz, \quad k_4 = \frac{1}{h^3}\int_0^{\frac{h}{2}} zt'(z)\,dz,$$

$$k_5 = \frac{1}{h^2}\int_0^{\frac{h}{2}} zg_2'(z)\,dz, \quad k_6 = \frac{1}{h}\int_0^{\frac{h}{2}} f''(z)\,dz, \tag{2.9}$$

$$k_7 = \frac{1}{h^3}\int_0^{\frac{h}{2}} zf'(z)\,dz, \quad \bar{k}_2 = \frac{1}{h^3}\int_0^{\frac{h}{2}} s(z)\,dz, \quad \bar{k}_3 = \frac{1}{h^2}\int_0^{\frac{h}{2}} g_1(z)\,dz,$$

$$\bar{k}_4 = \frac{1}{h^3}\int_0^{\frac{h}{2}} t(z)\,dz, \quad \bar{k}_5 = \frac{1}{h^2}\int_0^{\frac{h}{2}} g_2(z)\,dz, \quad \bar{k}_7 = \frac{1}{h^3}\int_0^{\frac{h}{2}} f(z)\,dz.$$

Łatwo sprawdzić, że spełnione są następujące równości:

$$\bar{k}_i = -k_i, \quad i = 2, ..., 5, 7.$$

Wprowadzenie współczynników $\bar{k}_i$ tłumaczy się tym, że będziemy rozpatrywać pewne szczególne przypadki założeń kinematycznych (2.2); w założeniach tych $k_i \neq 0$, ale $\bar{k}_i = 0$ (por. p. 4).

Równania przemieszczeniowe otrzymujemy wstawiając wielkości sił wewnętrznych (2.7) do równań (1.1). Po pewnych przekształceniach równania te zapisujemy w postaci

$$\begin{aligned}
&2\mu h k_1 \theta^{\beta}_{,\beta} - \frac{\nu D}{2k_4}(\bar{k}_2 \nabla^2 \theta^{\beta}_{,\beta} - \bar{k}_4 \nabla^2 \nabla^2 w) = -\hat{p}_3 - \\
&- \frac{1-2\nu}{1-\nu} h^2 (\bar{k}_3 \nabla^2 p_3 + \bar{k}_5 \nabla^2 \overset{*}{p}_3) + \frac{2\nu h^3 \bar{k}_7}{1-\nu} \nabla^2 p^{\beta}_{,\beta} - 2hk_6 p^{\beta}_{,\beta} + \dot{U}_3, \\
&-D\left(1 + \frac{\nu}{2}\frac{\bar{k}_4}{k_4}\right)\nabla^2 w_{,\alpha} - 2\mu k_1 h \theta_{\alpha} + \frac{k_2}{2k_4} D\left(1 + \nu\left(1 + \frac{\bar{k}_2}{k_2}\right)\right)\theta^{\beta}_{,\beta\alpha} + \\
&+ \frac{k_2}{2k_4} D(1-\nu)\nabla^2 \theta_{\alpha} = -\hat{m}_{\alpha} - \frac{h^2}{1-\nu}\left\{k_3\left[2\nu\left(1 + \frac{\bar{k}_3}{k_3}\right) - \frac{\bar{k}_3}{k_3}\right]p_{3,\alpha} + \right. \\
&\left. + k_5\left[2\nu\left(1 + \frac{\bar{k}_5}{k_5}\right) - \frac{\bar{k}_5}{k_5}\right]\overset{*}{p}_{3,\alpha}\right\} - 2h^3 k_7 \nabla^2 p_{\alpha} + 2hk_6 p_{\alpha} - \\
&- \frac{2h^3 k_7}{1-\nu}\left(1 + \nu\left(1 + \frac{\bar{k}_7}{k_7}\right)\right)p^{\beta}_{,\beta\alpha} + \ddot{\Phi}_{\alpha},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

gdzie $D=\frac{4\mu h^3 k_4}{1-\nu}$ oznacza sztywność płyty oraz

$$\ddot{U}_3=\rho h(\ddot{w}-2\ddot{\Gamma}),\quad \ddot{\Phi}_\alpha=2\rho h^3\left(k_2\ddot{\theta}_\alpha-k_4\ddot{w}_{,\alpha}+\frac{k_7}{\mu}\ddot{p}_\alpha\right). \tag{2.11}$$

W teoriach technicznych na ogół pomija się składowe $\ddot{\Phi}_\alpha$, a w składowej $\ddot{U}_3$ pomija się wielkość $\ddot{\Gamma}$; wtedy mamy

$$\ddot{U}_3=\rho h\ddot{w},\quad \ddot{\Phi}_\alpha=0. \tag{2.12}$$

Możemy teraz przystąpić do określenia funkcji zmiennej z. Przyjmujemy dwa kryteria doboru tych funkcji: 1) wszystkie te funkcje muszą spełniać warunki (2.6); 2) żądamy, aby dla obciążeń statycznych $p_i=\text{const}_i$ poszukiwane funkcje spełniały różniczkowe równania równowagi ośrodka ciągłego.

Nie będziemy przytaczali wyprowadzenia wzorów na te funkcje, lecz tylko podamy, że powyższe kryteria spełniają następujące funkcje (por. p. 4):

$$t(z)=-\frac{h^2}{8}\left(1-4\left(\frac{z}{h}\right)^2\right),\quad s(z)=-\frac{h^2}{48}\left(5-4\left(\frac{z}{h}\right)^2\right)\left(1-4\left(\frac{z}{h}\right)^2\right),$$

$$f(z)=t(z)-C_1 s(z),\quad g_1(z)=\frac{3}{2h}s(z), \tag{2.13}$$

$$g_2(z)=g_1(z)-\frac{t(z)}{h}=-\frac{h}{32}\left(1-4\left(\frac{z}{h}\right)^2\right)^2.$$

Funkcja $g_2(z)$ została wyznaczona z układu równań przemieszczeniowych trójwymiarowej teorii przy założeniu, że płyta poddana jest zginaniu ciężarem własnym. Komentarza wymaga funkcja $f(z)$, która została wyznaczona w zależności od stałej C_1. Dla $C_1=3/2$ otrzymuje się funkcję, która występuje w teorii Z. KĄCZKOWSKIEGO [11, s. 74]. Najprostszą funkcję $f(z)$ spełniającą warunki (2.6) otrzymuje się dla

Tablica 1

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6		k_7	
						$C_1=\frac{3}{2}$	$C_1=0$	$C_1=\frac{3}{2}$	$C_1=0$
k_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{24}$
$\bar{k}_i$		$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{120}$			$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{24}$

$C_1=0$. Wpływ stałej C_1 na stan naprężenia i odkształcenia dla obciążeń $p_\alpha\neq\text{const}_\alpha$ wymaga dalszego badania. Bezwymiarowe współczynniki k_i i $\bar{k}_i$ dla funkcji określonych wzorami (2.13) zestawiono w tablicy pierwszej.

3. Podstawowe równania różniczkowe proponowanej teorii. Warunki brzegowe i początkowe

W niniejszym punkcie podamy dwa sposoby sprowadzenia układu równń (2.10) do prostszej postaci. Pierwszy sposób jest analogiczny do znanej metody Helmholtza [21, s. 165]. Dwuwymiarową wersję twierdzenia Helmholtza [22, s. 86] dla funkcji θ_α napiszemy następująco:

$$\theta_\alpha = \Phi_{,\alpha} + \epsilon_\alpha^{\ \beta} \psi_{,\beta}. \tag{3.1}$$

Wielkości dane p_α i m_α przedstawiamy analogicznie do (3.1) w postaci

$$p_\alpha = \overset{1}{p}_{,\alpha} + \epsilon_\alpha^{\ \beta} \overset{2}{p}_{,\beta}, \qquad m_\alpha = \overset{1}{m}_{,\alpha} + \epsilon_\alpha^{\ \beta} \overset{2}{m}_{,\beta}. \tag{3.2}$$

Wstawiając (3.1) i (3.2) do równań $(2.10)_2$ otrzymuje się równania Cauchy'ego-Riemanna na dwie funkcje Λ_α $\alpha = 1, 2$. Dalej można wykazać (bez straty na ogólności rozważań), że te dwie harmoniczne funkcje można przyjąć za równe zeru. Ostatecznie układ równań (2.10) redukuje się do postaci

$$\begin{aligned} &\nabla^2 \Phi = -\frac{\vartheta(x^\beta)}{4\mu h k_1}, \qquad \nabla^2 \psi - \frac{k_1}{h^2 k_2} \psi = -\frac{k_4 \left(2 + \nu \dfrac{\bar{k}_4}{k_4}\right)}{k_2 (1-\nu)} \tilde{\tilde{\Lambda}}_2(x^\beta), \\ &\nabla^2 \chi = \frac{k_1 (1-\nu)}{h^2 k_4 \left(2 + \nu \dfrac{\bar{k}_4}{k_4}\right)} \Phi - \tilde{\tilde{\Lambda}}_1(x^\beta), \end{aligned} \tag{3.3}$$

gdzie

$$\chi = \frac{k_2}{k_4} \Phi - w, \qquad \tilde{\tilde{\Lambda}}_2 = \frac{2}{D\left(2 + \nu \dfrac{\bar{k}_4}{k_4}\right)} \left(\overset{2}{m} - 2hk_6 \overset{2}{p} + 2h^3 k_7 \nabla^2 \overset{2}{p} - \ddot{V}_2\right),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\Lambda}}_1 = \frac{2}{D\left(2 + \nu \dfrac{\bar{k}_4}{k_4}\right)} \Bigg\{ &\overset{1}{m} + \frac{h^2}{1-\nu} \left[k_3 \left(2\nu - \frac{\bar{k}_3}{k_3}(1-2\nu)\right) p_3 + \right. \\ &\left. + k_5 \left(2\nu - \frac{\bar{k}_5}{k_5}(1-2\nu)\right) \overset{*}{p}_3 \right] - 2hk_6 \overset{1}{p} + \frac{2h^3 k_7}{1-\nu} \left(2 + \nu \frac{\bar{k}_7}{k_7}\right) \nabla^2 \overset{1}{p} - \ddot{V}_1 \Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\ddot{V}_1 = 2\rho h^3 \left(k_4 \ddot{\chi} + \frac{k_7}{\mu} \ddot{\overset{1}{p}}\right), \qquad \ddot{V}_2 = 2\rho h^3 \left(k_2 \ddot{\psi} + \frac{k_7}{\mu} \ddot{\overset{2}{p}}\right),$$

$$\begin{aligned} \vartheta = \hat{p}_3 \left(2 + \nu \frac{\bar{k}_4}{k_4}\right) + \frac{\nu \bar{k}_4}{k_4} \hat{m}^\alpha_{,\alpha} + 2h^2 (1-\nu)(\bar{k}_3 \nabla^2 p_3 + \bar{k}_5 \nabla^2 \overset{*}{p}_3) + \\ + 4hk_6 p^\alpha_{,\alpha} - \ddot{U}_3 \left(2 + \nu \frac{\bar{k}_4}{k_4}\right) - \nu \frac{\bar{k}_4}{k_4} \ddot{\Phi}^\alpha_{,\alpha}. \end{aligned}$$

Mamy więc trzy równania drugiego rzędu. W przypadku statycznym układ równań (3.3) jest układem rozdzielonym, składającym się z jednego równania HELMHOLTZA $(3.3)_2$ i dwóch równań POISSONA $(3.3)_{1,3}$. W przypadku dynamicznym układ (3.3) ma prostą strukturę, jeżeli przyjąć równości (2.12).

Wykonajmy na równaniach (2.10) następujące operacje: 1) mnożymy równania $(2.10)_2$ przez $\delta^{\alpha\beta}$ i różniczkujemy względem β; 2) mnożymy równania $(2.10)_2$ przez $\epsilon^{\alpha\beta}$ i różniczkujemy względem β. Po drobnych przekształceniach otrzymujemy następujący układ równań:

$$(3.5)\qquad D\nabla^2\nabla^2 w=q,\qquad \theta^{\alpha}_{,\alpha}=-\frac{\vartheta(x^\beta)}{4\mu h k_1},\qquad \nabla^2\epsilon^{\alpha\beta}\theta_{\alpha,\beta}-\frac{1}{h^2}\frac{k_1}{k_2}\epsilon^{\alpha\beta}\theta_{\alpha,\beta}=-L_3(x^\gamma),$$

gdzie

$$(3.6)\qquad \begin{aligned} q(x^\alpha)=\hat{p}_3-\frac{h^2k_2}{(1-\nu)k_1}\left(2+\nu\frac{\bar{k}_4}{k_4}\right)\nabla^2\hat{p}_3+\frac{2\nu h^2}{1+\nu}(k_3\nabla^2 p_3+k_5\nabla^2\overset{*}{p}_3)-\\ -\frac{2h^4k_2}{k_1}(\bar{k}_3\nabla^2\nabla^2 p_3+\bar{k}_5\nabla^2\nabla^2\overset{*}{p}_3)+\hat{m}^{\alpha}_{,\alpha}+\\ +\frac{4h^3k_7}{1-\nu}\left(1-\frac{k_2\bar{k}_4}{4k_1k_4k_7}\nu-\frac{k_2}{k_1}\frac{k_6}{k_7}\right)\nabla^2 p^{\alpha}_{,\alpha}-\frac{\nu h^2k_2\bar{k}_4}{(1-\nu)k_1k_4}\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\nabla^2 X^{\alpha}_{,\alpha}zdz-\\ -\dot{U}_3-\ddot{\Phi}^{\alpha}_{,\alpha}+\frac{h^2k_2}{(1-\nu)k_1}\nabla^2\left(\left(2+\nu\frac{\bar{k}_4}{k_4}\right)\dot{U}_3+\frac{\nu\bar{k}_4}{k_4}\ddot{\Phi}^{\alpha}_{,\alpha}\right),\end{aligned}$$

$$\hat{p}_3=p_3+\overset{*}{p}_3,$$

$$L_3=\frac{1}{2\mu h^3k_2}\epsilon^{\alpha\beta}\left[h(1-2k_6)p_{\alpha,\beta}+\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}X_{\alpha,\beta}zdz+2h^3k_7\nabla^2 p_{\alpha,\beta}-\ddot{\Phi}_{\alpha,\beta}\right].$$

Łatwo sprawdzić, że na funkcję $q(x^\alpha)$ nie ma wpływu stała C_1 [por. $(2.13)_2$]. Dalej przyjęto $C_1=0$. Można też wykazać równoważność układów równań (3.3) i (3.5).

Do tego, aby nasza teoria była kompletna, należy określić warunki brzegowe tylko na powierzchni brzegowej, bo na płaszczyznach granicznych warunki brzegowe są spełnione ściśle dzięki odpowiedniemu doborowi funkcji zmiennej z. Warunki brzegowe na powierzchni brzegowej spełniamy w sposób całkowy [11, s. 78].

Rząd układu równań (3.3) wynosi sześć. W każdym punkcie linii brzegowej S (lub $\overset{+}{S}$, $\bar{S}$; rys. 1) można więc spełnić trzy warunki brzegowe spośród sześciu następujących wielkości (rys. 2):

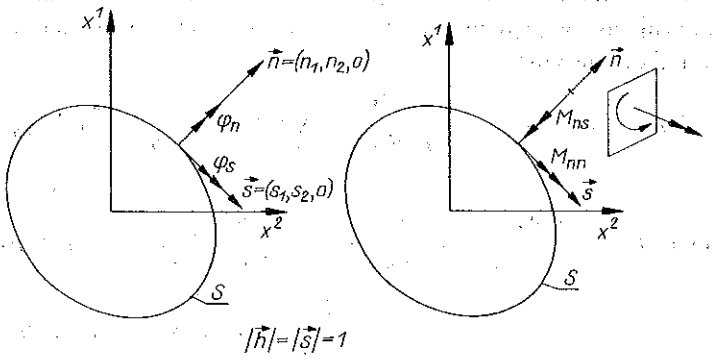
$$(3.7)\qquad M_{nn},\ M_{ns},\ Q_n,\ w,\ \varphi_n,\ \varphi_s,$$

gdzie

$$(3.8)\qquad \varphi_n=\varphi^\alpha n_\alpha,\qquad \varphi_s=\varphi^\alpha\epsilon^{\beta}_{\cdot\alpha}n_\beta,\qquad \varphi_\alpha=\epsilon^{\beta}_{\alpha}(w_{,\beta}-\xi\theta_\beta).$$

We wzorach tych n_α oznaczają składowe wektora zewnętrznie normalnego (rys. 2). Ostatni ze wzorów (3.8) wynika stąd, że uśrednione przemieszczenie $u_\alpha(x^i)$ przy pominięciu wyrazu $(f'(z)p_\alpha)/\mu$ można przedstawić następująco:

$$u_\alpha(x^i) = z\epsilon_\alpha^{\cdot\beta}\varphi_\beta. \tag{3.9}$$



Rys. 2

Współczynnik liczbowy ξ wyznaczamy metodą najmniejszych kwadratów z równania

$$\frac{d}{d\xi}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(s'(z)-\xi t'(z))^2\,dz=0,$$

a stąd

$$\xi=\frac{k_2}{k_4}=\frac{4}{5}. \tag{3.10}$$

Korzystając z twierdzenia wariacyjnego o minimum całkowitej energii płyty (dla uśrednionych przemieszczeń) otrzymuje się równania równowagi płyty (1.1) (przy pominięciu wyrazów inercyjnych), naturalne warunki brzegowe:

$$M_{nn}=M^{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta, \quad M_{ns}=\epsilon^{\gamma}_{\cdot\beta}M^{\alpha\beta}n_\alpha n_\gamma, \quad Q_n=Q^\alpha n_\alpha \tag{3.11}$$

oraz następujące możliwe kombinacje jednorodnych warunków brzegowych:

$$\begin{aligned}
&1)\ w=\varphi_s=\varphi_n=0, \quad &&3)\ w=\varphi_n=M_{nn}=0,\\
&2)\ w=\varphi_s=M_{ns}=0, \quad &&4)\ w=M_{ns}=M_{nn}=0,\\
&5)\ \varphi_s=\varphi_n=Q_n=0, \quad &&7)\ M_{nn}=M_{ns}=Q_n=0,\\
&6)\ \varphi_s=M_{ns}=Q_n=0, \quad &&8)\ \varphi_n=M_{nn}=Q_n=0.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Warunki początkowe formułujemy następująco: w chwili $\tau=\tau_0$ mamy dane wielkości

$$w(x^\alpha,\tau_0); \quad \overset{\circ}{w}(x^\alpha,\tau_0); \quad \theta_\alpha(x^\beta,\tau_0); \quad \overset{\circ}{\theta}_\alpha(x^\beta,\tau_0). \tag{3.13}$$

Tak więc nasza teoria jest już kompletna. Wszystkie wzory i równania tej teorii będą prawdziwe w dowolnym dopuszczalnym układzie współrzędnych normalnych, jeżeli dokonamy następujących zmian:

$$(3.14)\qquad (\ )_{,\alpha}\leftrightarrow(\ )|_{\alpha},\quad \in_{\alpha}^{\cdot\beta}\leftrightarrow e_{\alpha}^{\cdot\beta},\quad \delta_{\alpha\beta}\leftrightarrow g_{\alpha\beta},$$

gdzie symbol | oznacza pochodną kowariantną, $e_{\alpha\beta}$ dwuwektor Ricciego oraz $g_{\alpha\beta}$ tensor metryczny płaszczyzny środkowej.

4. Trójwymiarowe rozwiązania Love'a. Proponowana teoria a inne teorie

Niech na płytę działają obciążenia statyczne $p_i=\text{const}$. Przy braku sił masowych równania (3.5) dla powyższych obciążeń są następujące:

$$(4.1)\qquad D\nabla^2\nabla^2 w(x^{\alpha})=p_3,\quad \theta^{\alpha}_{,\alpha}=-\frac{3}{4}(2-\nu)\frac{p_3}{\mu h},\quad \in^{\alpha\beta}\left(\frac{h^2}{10}\nabla^2\theta_{\alpha,\beta}-\theta_{\alpha,\beta}\right)=0.$$

Równania $(4.1)_{2,3}$ będą spełnione, jeżeli przyjąć

$$(4.2)\qquad \theta_{\alpha}=-\frac{h^2(2-\nu)}{8(1-\nu)}\nabla^2 w_{,\alpha}+C_1\frac{p_{\alpha}}{\mu}.$$

Wstawiając (4.2) do (2.2) przy uwzględnieniu (2.13) otrzymamy

$$(4.3)\qquad \begin{aligned} u_{\alpha}(x^i)&=-z\left[w_{,\alpha}+\frac{h^2}{8}\frac{2-\nu}{1-\nu}\left(1-\frac{4}{3}\frac{z^2}{h^2}\right)\nabla^2 w_{,\alpha}-\frac{p_{\alpha}}{\mu}\right],\\ u_3(x^i)&=w(x^{\beta})-\frac{h^2}{8}\frac{\nu}{1-\nu}\left(1-4\frac{z^2}{h^2}\right)\nabla^2 w-\frac{hp_3}{64\mu}(1+\nu)\left(5-4\frac{z^2}{h^2}\right)\left(1-4\frac{z^2}{h^2}\right).\end{aligned}$$

Przemieszczenie płaszczyzny środkowej wynosi

$$(4.4)\qquad u_3(x^{\alpha},0)=w(x^{\alpha})-\frac{h^2}{8}\frac{\nu}{1-\nu}\nabla^2 w-\frac{5}{64}\frac{hp_3(1+\nu)}{\mu}.$$

Wprowadzając oznaczenie

$$(4.5)\qquad u=u(x^{\alpha})=u_3(x^{\alpha},0),$$

na podstawie (4.4) i $(4.1)_1$ znajdziemy

$$(4.6)\qquad \nabla^2 u=\nabla^2 w-\frac{3}{4}\nu\frac{p_3}{\mu h},\qquad w=u+\frac{h^2}{8}\frac{\nu}{1-\nu}\nabla^2 u+\frac{5+\nu^2}{1-\nu}\frac{hp_3}{64\mu}.$$

Korzystając z powyższych równości, wzory na przemieszczenia, naprężenia i siły wewnętrzne można doprowadzić do postaci

$$(4.7)\qquad \begin{aligned} u_{\alpha}(x^i)&=-z\left[u_{,\alpha}+\frac{h^2}{4(1-\nu)}\left(1-\frac{2}{3}(2-\nu)\frac{z^2}{h^2}\right)\nabla^2 u_{,\alpha}-\frac{p_{\alpha}}{\mu}\right],\\ u_3(x^i)&=u+\frac{\nu}{2(1-\nu)}z^2\nabla^2 u+\frac{hp_3}{8(1-\nu)\mu}\frac{z^2}{h^2}\left(3-2(1-\nu^2)\frac{z^2}{h^2}\right),\end{aligned}$$

$$(4.7)\quad \sigma_{\alpha\beta}(x^i)=-\frac{2z\mu}{1-\nu}\left[(1-\nu)u_{,\alpha\beta}+\nu\nabla^2 u\,\delta_{\alpha\beta}+\frac{h^2}{4}\left(1-\frac{2(2-\nu)}{3}\frac{z^2}{h^2}\right)\nabla^2 u_{,\alpha\beta}\right]-$$

[c.d.]

$$-\frac{3}{2}\frac{z}{h}\frac{\nu}{1-\nu}\left(1-(1-\nu)\frac{4}{3}\frac{z^2}{h^2}\right)p_3\,\delta_{\alpha\beta},$$

$$\sigma_{\alpha 3}(x^i)=-\frac{\mu h^2}{4(1-\nu)}\left(1-4\frac{z^2}{h^2}\right)\nabla^2 u_{,\alpha}+p_\alpha,\quad \sigma_{33}(x^i)=\frac{3}{2}\frac{z}{h}\left(1-\frac{4}{3}\frac{z^2}{h^2}\right)p_3,$$

$$M_{\beta\alpha}(x^\alpha)=-D\left\{(1-\nu)u_{,\alpha\beta}+\nu\nabla^2 u\delta_{\alpha\beta}+\frac{h^2(8+\nu)}{40}\nabla^2 u_{,\alpha\beta}\right\}-\frac{\nu(4+\nu)}{40(1-\nu)}h^2 p_3\delta_{\alpha\beta},$$

$$Q_\alpha=-D\nabla^2 u_{,\alpha}+hp_\alpha.$$

Wszystkie powyższe wzory dla $p_i=0$ są identyczne z tymi, jakie uzyskał Love, gdy przyjmiemy płytę o grubości $2h$ i zmienimy konwencję dotyczącą znakowania momentów $M_{\alpha\beta}$ $\alpha\neq\beta$ ([23], artykuł 303, s. 473 wzory (49)–(53)). Podobnie można wykazać, że nasza teoria daje też ścisłe rozwiązanie Love'a dla $p_\alpha=0$, $p_3=\text{const}$ (artykuł 307, s. 477) oraz dla płyty poddanej zginaniu ciężarem własnym (artykuł 312, s. 486). Zwraca się uwagę na to, że powyższe przypadki zginania płyt były analizowane bez uwzględnienia warunków brzegowych na powierzchni brzegowej.

Korzystając z (4.6) i $(4.7)_{5,6}$ dla $p_i=0$, otrzymujemy:

$$M_{\alpha\beta}\,\delta^{\alpha\beta}=\frac{4\mu h(1+\nu)}{3\nu}(u-w)=\frac{2hE}{3\nu}(u-w),$$

$$Q_\alpha=\frac{4\mu h}{3\nu}(u-w)_{,\alpha},$$

gdzie E oznacza moduł Younga.

Z powyższych wzorów wynika, że suma momentów zginających w danym punkcie płyty jest proporcjonalna do różnicy przemieszczeń płaszczyzny środkowej i granicznej, a siły poprzeczne są proporcjonalne do gradientu różnicy tych przemieszczeń. Powyższe jest słuszne dla wszystkich płyt obciążonych wyłącznie na powierzchni brzegowej, przy braku sił masowych. Takiej interpretacji pierwszego niezmiennika stanu naprężenia oraz siły poprzecznej autor niniejszej pracy nie napotkał w znanej literaturze.

Wszystkie wzory i równania proponowanej teorii można przekształcić tak, aby zamiast funkcji $w(x^\alpha)$ (ugięcie płaszczyzn granicznych) występowała funkcja ugięcia płaszczyzny środkowej: $u(x^\alpha)$.

Podamy tylko równanie na funkcję $u(x^\alpha)$ w przypadku statycznym dla $X_i=0$, $p_\alpha=0$, $p_3\neq 0$. Wykorzystując $(2.2)_2$, (2.3), (2.13), $(3.5)_{1,2}$ i $(3.6)_1$, otrzymamy

$$(4.8)\quad D\nabla^2\nabla^2 u=p_3-\frac{h^2(8-3\nu)}{40(1-\nu)}\nabla^2 p_3-$$

$$-\frac{h^4}{9600(1-\nu)}(29-19\nu)\nabla^2\nabla^2 p_3+\frac{\nu h^6}{19200(1-\nu)}\nabla^2\nabla^2\nabla^2 p_3.$$

E. KOPPE [6] podaje ścisłe równanie, jakie powinna spełniać funkcja $u(x^\alpha)$ dla obciążeń, dla których mamy $\nabla^2\nabla^2 p_3=0$. Otrzymane przez tego autora równanie jest identyczne z naszym równaniem (4.8) ([6], s. 49, wzór (26)).

Równanie $(3.5)_1$ w przypadku statycznym dla $X_i=0$, $p_\alpha=0$, $p_3\neq 0$ jest następujące:

$$D\nabla^2\nabla^2 w=p_3-\frac{h^2 k_2}{(1-\nu)k_1}\left(2+\nu\frac{\bar{k}_4}{k_4}-2\nu\frac{k_1 k_3}{k_2}\right)\nabla^2 p_3-\frac{2h^4 k_2\bar{k}_3}{k_1}\nabla^2\nabla^2 p_3. \tag{4.9}$$

Jeżeli teraz przyjmiemy $\bar{k}_i=0$, to otrzymamy równanie występujące w teorii REISSNERA ([24], s. 165, wzór 1)

$$D\nabla^2\nabla^2 w=p_3-\frac{h^2(2-\nu)}{10(1-\nu)}\nabla^2 p_3. \tag{4.10}$$

Przyjmując $\bar{k}_i=0$ i $k_3=0$, otrzymujemy równanie występujące w teorii Z. KĄCZKOWSKIEGO ([11], s. 77):

$$D\nabla^2\nabla^2 w=p_3-\frac{h^2}{5(1-\nu)}\nabla^2 p_3. \tag{4.11}$$

Jak z powyższego wynika, w obu teoriach nie uwzględnia się wpływu wielkości $\hat{f}(x^\alpha, z)$ na stan naprężenia i przemieszczenia. Inaczej mówiąc, równania E. REISSNERA otrzymamy zakładając $u_3(x^i)$ postaci $(2.2)_2$ przy warunku, że całki z funkcji $t(z)$, $f(z)$, $s(z)$, $g_1(z)$ i $g_2(z)$ w granicach od 0 do $h/2$ są równe zeru, lub przyjmując, że $u_3(x^i)=w(x^\alpha)$. W teorii Z. Kączkowskiego dodatkowo pomija się wpływ naprężeń σ_{33}. Nasze równanie $(3.5)_3$ dla rozpatrywanego przypadku jest takie samo jak w wyżej wymienionych teoriach.

Przyjmując rozmaite założenia dotyczące funkcji zmiennej z, możemy z naszej teorii otrzymać inne teorie, np. Kirchhoffa, Hencky'ego, Ambarcumjana, Własowa i innych.

5. PRZYKŁAD

Rozpatrzmy płytę prostokątną przegubowo podpartą (por. trzecia kombinacja warunków brzegowych (3.12)) poddaną zginaniu obciążeniem

$$p_3=p\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}, \tag{5.1}$$

gdzie $x=x^1$, $y=x^2$ oraz a, b oznaczają długości boków płyty.

Funkcja ugięcia płaszczyzn granicznych określona jest następującym wzorem:

$$w(x^\alpha)=w(x,y)= \tag{5.2}$$

$$=\frac{pa^4}{D\pi^4(1+\eta^2)^2}\left(1+\frac{\pi^2}{5}\xi^2(1+\eta^2)+\frac{\pi^4}{100}\xi^4(1+\eta^2)^2\right)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},$$

a funkcje θ_α wzorami

$$\theta_1=B_1\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},\qquad \theta_2=B_2\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}, \tag{5.3}$$

gdzie

$$B_1=\frac{pah^2}{8\pi D(1-\nu)(1+\eta^2)}\left(2-\nu+\frac{\pi^2}{10}(1-\nu)\xi^2(1+\eta^2)\right),$$

$$B_2=B_1\eta, \quad \eta=\frac{a}{b}, \quad \xi=\frac{h}{a}. \tag{5.4}$$

Łatwo sprawdzić, że spełnione są wszystkie równania (3.5) oraz następujące warunki brzegowe:

$$u_3(0,y,z)=u_3(a,y,z)=u_3(x,0,z)=u_3(x,b,z)=u_1(x,0,z)=u_1(x,b,z)= \tag{5.5}$$
$$=u_2(0,y,z)=u_2(a,y,z)=\sigma_{11}(0,y,z)=\sigma_{11}(a,y,z)=\sigma_{22}(x,0,z)=\sigma_{22}(x,b,z)=0.$$

Wzory na maksymalne przemieszczenie płaszczyzny środkowej według różnych teorii dla płyty kwadratowej ($\eta=a/b=1$) są następujące:

1) wg trójwymiarowej teorii L. H. DONNELLA [5, 25]:

$$u_{\max}=\frac{pa^4}{4\pi^4 D}\left(1+\frac{8-3\nu}{20(1-\nu)}\pi^2\xi^2-\frac{227-157\nu}{16800(1-\nu)}\pi^4\xi^4+\ldots\right); \tag{5.6}$$

2) wg proponowanej teorii:

$$u_{\max}=\frac{pa^4}{4\pi^4 D}\left(1+\frac{8-3\nu}{20(1-\nu)}\pi^2\xi^2-\frac{203-133\nu}{16800(1-\nu)}\pi^4\xi^4-\frac{\nu}{2400(1-\nu)}\pi^6\xi^6\right); \tag{5.7}$$

3) wg teorii H. M. MUSZTARIEGO [26]:

$$u_{\max}=\frac{pa^4}{4\pi^4 D}\left(1+\frac{8-3\nu}{20(1-\nu)}\xi^2\pi^2\frac{1}{1-\frac{1}{20}\frac{\nu}{1-\nu}\pi^2\xi^2}\right)= \tag{5.8}$$
$$=\frac{pa^4}{4\pi^4 D}\frac{1+\frac{2-\nu}{5(1-\nu)}\xi^2\pi^2}{1-\frac{1}{20}\frac{\nu}{1-\nu}\pi^2\xi^2};$$

4) wg teorii E. REISSNERA ([9 i 24]; por. [17], s. 115, 118):

$$u_{\max}=\frac{pa^4}{4\pi^4 D}\left(1+\frac{2-\nu}{5(1-\nu)}\pi^2\xi^2\right); \tag{5.9}$$

5) wg teorii Z. KĄCZKOWSKIEGO ([11], s. 73; por. [12, 16], i [17], s. 115):

$$u_{\max}=\frac{pa^4}{4\pi^4 D}\left(1+\frac{2}{5(1-\nu)}\pi^2\xi^2\right); \tag{5.10}$$

6) wg teorii G. KIRCHHOFFA:

$$u_{\max}=\frac{pa^4}{4\pi^4 D}. \tag{5.11}$$

Maksymalne ugięcie płaszczyzn granicznych i maksymalne naprężenie normalne wynoszą (dla $\eta=a/b=1$):

1) wg teorii L. H. DONNELLA [5]

$$w_{\max}=\frac{pa^4}{4\pi^4 D}\left(1+\frac{2\pi^2\xi^2}{5}+\frac{27}{28}\frac{\pi^4\xi^4}{25}+\ldots\right),$$

$$\sigma_{\max}=\frac{3}{2}\frac{p(1+\nu)}{\pi^2\xi^2}\left(1+\frac{1}{30}\frac{2+7\nu}{1+\nu}\pi^2\xi^2+\frac{11}{14}\frac{\pi^4\xi^4}{150}+\ldots\right); \tag{5.12}$$

2) wg proponowanej teorii

$$w_{\max}=\frac{pa^4}{4\pi^4 D}\left(1+\frac{2\pi^2\xi^2}{5}+\frac{\pi^4\xi^4}{25}\right),$$

$$\sigma_{\max}=\frac{3}{2}\frac{p(1+\nu)}{\pi^2\xi^2}\left(1+\frac{1}{30}\frac{2+7\nu}{1+\nu}\pi^2\xi^2+\frac{\pi^4\xi^4}{150}\right). \tag{5.13}$$

W tablicy drugiej podano wartości liczbowe maksymalnych ugięć i naprężeń normalnych obliczonych dla płyty grubej według różnych teorii przy założeniu $\eta=a/b=1$, $\xi=h/a=1/3$, $\nu=0{,}3$.

W pierwszej kolumnie podano ścisłe wartości obliczone na podstawie pracy B. F. WŁASOWA [8]. Rezultaty otrzymane według teorii L. H. DONNELLA (kolumna 2) powinny być identyczne z wynikami WŁASOWA. Nieznaczne różnice

Tablica 2

$\frac{h}{a}=\frac{1}{3}$, $\nu=0{,}3$	Teorie trójwymiarowe		Teorie techniczne					
	Według ścisłej teorii [8]	Teoria L.H. DONNELLA [5,25]	Proponowana teoria	Teoria MUSZTARIEGO [26]	Teoria REISSNERA [9]	Teoria KĄCZKOWSKIEGO [11]	Teoria AMBARCUMIANA [17]	Klasyczna teoria płyt cienkich
$\frac{Eu_{\max}}{ph}$	3,492	3,491	3,494	3,56	3,479	3,693	3,479	2,270
$\frac{Ew_{\max}}{ph}$	3,371	3,371	3,375	3,14	3,479	3,693	3,479	2,270
$\frac{\sigma_{\max}}{p}$	1,995	1,994	1,997	2,01	1,868	1,964	2,011	1,778

wynikają stąd, że w obliczeniach uwzględnialiśmy tylko trzy pierwsze składniki, występujące w sumach określonych wzorami (5.6) i (5.12). Z porównania wzorów (5.6)–(5.13) oraz z podanych wartości liczbowych wynika, że z teorii technicznych nasza teoria w omawianym przypadku zginania płyty grubej daje rezultaty najbliższe ścisłym.

Gdy płyta jest obciążona wyłącznie na powierzchni brzegowej, to otrzymane rezultaty według proponowanej teorii są identyczne z rozwiązaniami ścisłymi Love'a (por. p. 4). Oczywiście słowo «ścisłe» ma wtedy sens, gdy rozkład naprężeń na powierzchni brzegowej (wzdłuż osi z) jest taki, jaki wynika ze wzorów $(4.7)_{3,4}$.

Proponowana teoria opisana jest układem równań różniczkowych (3.3) bądź (3.5). W przypadku statycznym układ (3.3) ma bardzo prostą strukturę, dogodną do rozwiązywania analitycznego i numerycznego.

Na koniec warto zwrócić uwagę na fakt, że żadna ze znanych teorii technicznych nie spełnia pełnego układu równań i warunków 1–6 ze strony 484, np. we wszystkich teoriach, w których zakłada się, że przemieszczenie $u_3(x^i)$ jest stałe na grubości płyty, rezygnuje się ze spełnienia równania konstytutywnego (1.2) dla $i=j=3$ lub nie są spełnione warunki brzegowe na płaszczyznach granicznych. W naszej teorii wszystkie równania i warunki 1–6 są spełnione.

Wykaz literatury cytowanej w tekście

1. A. Ł. Goldenweizer, *Postrojenie približennoj teorii izgiba plastinki metodom asimptoticzeskogo integrirowania urawnień teorii uprugosti*, Prikł. Mat. Mech., **26**, 668–686, 1962.
2. J. Sułocki, *Zastosowanie operatorów różniczkowych do zadań z teorii sprężystości*, Rozpr. Inż., **12**, 2, 339–395, 1964.
3. R. Tiffen, F. P. Sayer, *A moment theory of elastic plates*, Mathematika, 9, 11–24, 1962.
4. M. Haimovici, *On the bending of elastic plates*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., **16**, 11–12, 605–615, 1966.
5. L. H. Donnell, *A theory for thick plates*, Proc. Second U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. Amer. Soc. Mech. Eng., New York, N. Y., 369–373, 1955.
6. E. Koppe, *Die dicke Platte mit nichtlinearer Spannungsverteilung*, ZAMM, 1/2, **37**, 38–44. 1957.
7. S. P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, *Teoria płyt i powłok*, Arkady, Warszawa 1962.
8. B. F. Własow, *Ob odnom słuczaje izgiba prjamougolnoj tolstoj plity*, V. Moskovskogo Univ., 2, 25–34, 1957.
9. E. Reissner, *On the theory of bending of elastic plates*, J. Math. Physics, **23**, 184–191, 1944.
10. H. Hencky, *Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten*, Ing. Arch., **16**, 72–76, 1947.
11. Z. Kączkowski, *Płyty. Obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1968.
12. V. Panc, *Verschärfte Theorie der elastischen Platte*, Ing. Arch., **33**, 351–371, 1964.
13. B. F. Własow, *Ob urawnieniach tieorii izgiba plastinok*, Izv. Akad. Nauk SSSR, 4, 102–109, 1958.
14. A. Ł. Goldenweizer, *O tieorii izgiba plastinok Rajsnera*, Izv. Akad. Nauk SSSR, 5, 69–77, 1958.
15. A. Kromm, *Verallgemeinerte Theorie der Plattenstatik*, Ing. Arch., 21, 266–286, 1953.
16. S. A. Ambarcumjan, *K tieorii izgiba anizotropnych plastinok*, Izv. Akad. Nauk SSSR, 5, 69–77, 1958.
17. S. A. Ambarcumjan, *Tieoria anizotropnych plastin*, Nauka, Moskwa 1967.
18. S. Fersht, *An extended Reissner thin plate theory*, Israel J. of Technology, **2**, 3, 312–317, 1964.
19. Cz. Woźniak, *Nieliniowa teoria powłok*, PWN, Warszawa 1966.
20. W. W. Poniatowskij, *K tieorii plastin sredniej tolszczyny*, Prikł. Mat. Mech., 26, 335–341, 1962.
21. W. Nowacki, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.
22. P. Moon, D. E. Spencer, *Teoria pola*, PWN, Warszawa 1966.
23. A. E. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Fourth edition, Oxford 1927.

24. M. SCHÄFER, *Über eine Verfeinerung der klassischen Theorie dünner schwach gebogener Platten*, ZAMM, 6, 32, 161–171, 1952.
25. C. W. LEE, *A three-dimensional solution for simply supported thick rectangular plates*, Nuclear Engineering and Design, 6, 155–162, 1967.
26. H. M. MUSZTARI, *Tieoria izgiba plit sredniej tolszcziny*, Izv. Akad. Nauk SSSR OTN, 2, 1959, 107–113.

Резюме

ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЛИТ СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ

В работе приведена теория, в которой уравнения движения и граничные условия на боковой поверхности плиты удовлетворены интегральным образом, остальные же уравнения теории упругости и граничные условия на плоскостях ограничивающих плиту удовлетворены точно.

Исходной точкой является кинематическая гипотеза (2.2). Система дифференциалсных уравнений (2.10) приведена к очень простому виду (3.3) или (3.5). Предложенная теория сравнена с другими теориями (например Э. Рейснера, З. Кончковского и других), а также показано, что для плиты нагруженной исключительно вдоль краев плиты получается точное решение А. Э. Лява [23] (пункт 4). Работу окончивает числовой пример. Проведены сравнения результатов полученных на основе разных теорий (таблица 2) с точным результатом [8].

SUMMARY

TECHNICAL THEORY OF PLATES WITH MODERATE THICKNESS

A theory is presented in which the equations of motions and the boundary conditions desscribed on the lateral surface of the plate are satisfied integrally while the remaining equation for the theory of elasticity are satisfied exactly.

The starting point of the theory is the kinematical hypothesis (2.2). The system of differential equations (2.10) was reduced to the simple form (3.3) or (3.5). The elaborated theory was compared with other known theories (given for example by E. Reissner, Z. Kączkowski, etc.). It was shown that for the plate loaded solely along its boundaries the A. E. Love's exact theory was obtained. The numerical example was given. The comparison of the results obtained on the basis of the approximate theories and exact theory [8] was made.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 listopada 1974 r.