ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 23, 3, 473—482, 1975
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

OBROTOWO SYMETRYCZNY STAN NAPRĘŻENIA W GRUBYCH TARCZACH O ORTOTROPII CYLINDRYCZNEJ

JERZY KUJAWSKI (BIAŁYSTOK)

W pracy przedstawiono kinematyczny sposób uściślonego obliczania tarcz kołowych lub pierścieniowych o ortotropii cylindrycznej, poddanych działaniu możliwie ogólnego obrotowo symetrycznego obciążenia. Odstąpiono przy tym od założenia, że naprężenia i pole temperatury są stałe na grubości tarczy. Problem rozwiązano w przemieszczeniach, co umożliwia ścisłe spełnienie przestrzennych związków teorii sprężystości z wyjątkiem równań równowagi, które zostaną spełnione w sensie całkowym. W efekcie otrzymano układ dwóch równań różniczkowych łącznie szóstego rzędu do wyznaczenia nieznanych funkcji przemieszczenia. Pozwala to na spełnienie trzech warunków brzegowych na pobocznicy walca ograniczającej tarczę. Pracę zilustrowano przykładem.

1. Wstęp

Uściśloną teorię tarcz izotropowych opracował Z. Kączkowski [1]. Zgodnie z tą teorią stan naprężenia i odkształcenia w tarczy grubej można określić za pomocą funkcji naprężenia, analogicznej do funkcji Airy'ego oraz funkcji przemieszczenia pionowego powierzchni zewnętrznych tarczy.

W pracy [2] przedstawiono kinematyczny sposób uściślonego obliczania grubych tarcz kołowych, znajdujących się w obrotowo symetrycznym stanie naprężenia. Sposób ten zastosujemy w pracy niniejszej do analizy stanu naprężenia i odkształcenia w tarczach o ortotropii cylindrycznej, obciążonych obrotowo symetrycznie.

2. Podstawowe związki teorii sprężystości

Rozpatrzmy tarczę kołową lub pierścieniową wykonaną z materiału jednorodnego, cylindrycznie ortotropowego i idealnie liniowo sprężystego. Tarcza jest obciążona obrotowo symetrycznie.

Rozważania przeprowadzimy przyjmując, że osie r, φ biegunowego układu współrzędnych leżą w płaszczyźnie środkowej tarczy, a płaszczyzny ograniczające tarczę mają równania $z=\pm h/2$.

W każdym punkcie tarczy muszą być spełnione podstawowe związki teorii sprężystości, tj. związki Cauchy'ego

$$(2.1)\qquad \varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r},\quad \varepsilon_\varphi=\frac{u}{r},\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\quad \gamma_{zr}=\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z},\quad \gamma_{z\varphi}=\gamma_{r\varphi}=0,$$

równania konstytutywne

$$
(2.2)\qquad \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\varphi \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\varphi \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \tau_{zr} = A_{55}\gamma_{zr}, \\ T, \tau_{z\varphi} = \tau_{r\varphi} = 0 \end{matrix}
$$

oraz równania równowagi

$$
(2.3)\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} - \frac{1}{r}\sigma_\varphi + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + R = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\tau_{zr})}{\partial r} + Z = 0.
$$

Tutaj A_{ik} $(i, k=1, 2, 3)$ i A_α $(\alpha = r, \varphi, z)$ są współczynnikami sprężystości materiału. Współczynnik A_α jest uzależniony tak od własności mechanicznych, jak i termicznych materiału tarczy.

3. Równania podstawowe

3.1. *Obciążenie*

Obciążenie tarczy stanowią siły przyłożone na jej powierzchniach zewnętrznych $z = \pm h/2$

$$
(3.1)\qquad \tau_{zr} = \pm p_r^s, \qquad \sigma_z = p_z^s
$$

oraz siły masowe

$$
(3.2)\qquad R = R(r), \qquad \Phi = 0, \qquad Z = 0.
$$

Na pobocznicy walca ograniczającej tarczę są przyłożone symetrycznie względem płaszczyzny środkowej siły rozciągające ciągłe wzdłuż grubości tarczy

$$
(3.3)\qquad \sigma_r|_{r=a} = n_z^s.
$$

W celu możliwie dokładnego spełnienia warunków brzegowych na pobocznicy walca siły n_z^s aproksymujemy funkcją o postaci

$$
(3.4)\qquad n_z^s \approx n = n^0 + n^1(1 - 12\zeta^2),
$$

gdzie $\zeta = z/h$, a n^0 i n^1 są to stałe, które wyznaczamy z następujących warunków:

$$
(3.5)\qquad \int_{-h/2}^{h/2} (n_z^s - n)\, dz = 0, \qquad \int_{-h/2}^{h/2} (n_z^s - n)^2\, dz = \text{minimum}.
$$

Stąd po podstawieniu (3.3) i (3.4) oraz wykorzystaniu faktu, że

$$
(3.6)\qquad \int_{-h/2}^{h/2} \left(1 - 12\frac{z^2}{h^2}\right) dz = 0, \qquad \int_{-h/2}^{h/2} \left(1 - 12\frac{z^2}{h^2}\right)^2 dz = 4h/5,
$$

otrzymujemy

$$
(3.7)\qquad n^0 = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} n_z^s\, dz, \qquad n^1 = \frac{5}{4h}\int_{-h/2}^{h/2} n_z^s \left(1 - 12\frac{z^2}{h^2}\right) dz.
$$

Ponadto na powierzchniach zewnętrznych panuje temperatura

$$T|_{z=\pm h/2}=T^s. \tag{3.8}$$

Pole temperatury w obszarze tarczy wyrażamy funkcją o następującej budowie [1]:

$$T(r,z)=T^0(r)+T^1(r)(1-12\zeta^2), \tag{3.9}$$

gdzie $T^0(r)$ i $T^1(r)$ są to nieznane funkcje.

Na podstawie warunku brzegowego (3.8) otrzymujemy

$$T^1=\frac{1}{2}(T^0-T^s). \tag{3.10}$$

Nieznaną funkcję T^0 wyznaczamy korzystając z równania różniczkowego przewodnictwa cieplnego, które przy ustalonym polu temperatury i braku źródeł ciepła ma postać

$$\lambda_r \nabla_r^2 T+\lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0, \tag{3.11}$$

gdzie $\nabla_r^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)$, a λ_r i λ_z są współczynnikami przewodności cieplnej.

Ze względu na założone pole temperatury (3.9) równanie różniczkowe (3.11) spełnimy w sensie całkowym:

$$\int_{-h/2}^{h/2}\left(\lambda_r \nabla_r^2+\lambda_z\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)T\,dz=0. \tag{3.12}$$

Stąd po podstawieniu (3.9), wykorzystaniu warunku brzegowego (3.10) oraz zależności $(3.6)_1$ wynika równanie różniczkowe

$$\left(\nabla_r^2-\frac{12}{h^2}\frac{\lambda_z}{\lambda_r}\right)T^0=-\frac{12}{h^2}\frac{\lambda_z}{\lambda_r}T^s. \tag{3.13}$$

Rozwiązaniem równania (3.13) są funkcje:

$$T=C_1 I_0(k\rho)+C_2 K_0(k\rho)+T_r, \tag{3.14}$$

gdzie

$$k=\frac{a}{h}\sqrt{12\frac{\lambda_z}{\lambda_r}},\qquad \rho=r/a,\qquad \rho\in\langle\rho_0,1\rangle;$$

a oznacza promień tarczy, $\rho_0=r_0/a$, r_0 — wewnętrzny promień tarczy pierścieniowej.

Funkcje $I_0(k\rho)$ i $K_0(k\rho)$ są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela rzędu zerowego, pierwszego i drugiego rodzaju, a T_r jest całką szczególną równania różniczkowego niejednorodnego (3.13)

Stałe całkowania C_i wyznaczamy z warunków brzegowych pola temperatury.

3.2. Pola odkształcenia i naprężenia

Pole odkształcenia w tarczy przyjmujemy podobnie jak przyjął to Z. KĄCZKOWSKI [1]:

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha^0 + \varepsilon_\alpha^1 (1-12\zeta^2), \qquad \alpha = r, \varphi, z, \tag{3.15}$$

stąd na podstawie (2.1) przemieszczenia mają postać

$$u = u^0 + u^1(1-12\zeta^2), \qquad w = [\varepsilon_z^0 + \varepsilon_z^1(1-4\zeta^2)]\, h\zeta, \tag{3.16}$$

tutaj u^0, u^1, ε_z^0 i ε_z^1 są nieznanymi funkcjami zmiennej r. Z warunków brzegowych (3.1) po podstawieniu (3.16) otrzymujemy

$$u^1 = \frac{h^2}{24}\frac{d\varepsilon_z^0}{dr} - \frac{h}{12 A_{55}} p_r^s,$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_z^1 = {} & \frac{1}{2}\varepsilon_z^0 - \frac{A_{31}}{A_{33}}\frac{h^2}{24}\nabla_r^2\varepsilon_z^0 - \frac{h^2}{24}\frac{A_{32}-A_{31}}{A_{33}}\frac{1}{r}\frac{d\varepsilon_z^0}{dr} + \\ & + \frac{1}{2}\frac{A_{31}}{A_{33}}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru^0) + \frac{1}{2}\frac{A_{32}-A_{31}}{A_{33}}\frac{u^0}{r} - \frac{1}{2}\frac{p_z^s}{A_{33}} + \\ & + \frac{h}{12}\frac{A_{31}}{A_{33}}\frac{1}{A_{55}}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rp_r^s) + \frac{h}{12}\frac{A_{32}-A_{31}}{A_{33}}\frac{1}{A_{55}}\frac{1}{r}p_r^s + \frac{1}{2}\frac{A_z}{A_{33}}T^s.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Ze względu na przyjęte pole przemieszczenia pole naprężenia przedstawimy w postaci

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \sigma_\alpha^0 + \sigma_\alpha^1(1-12\zeta^2), \qquad \alpha = r, \varphi, z, \\ \tau_{zr} &= A_{55}h\frac{d\varepsilon_z^1}{dr}(1-4\zeta^2)\zeta + 2p_r^s\zeta,\end{aligned} \tag{3.18}$$

gdzie składowe stanu naprężenia σ_α^n ($n=0, 1$) określone są przez wzory (2.2).

Siły wewnętrzne odniesione do płaszczyzny środkowej tarczy są określone wzorami

$$N_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz, \qquad N_\varphi = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\varphi dz, \tag{3.19}$$

stąd po podstawieniu (3.18) i wykorzystaniu zależności $(3.6)_1$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}N_r &= (A_{11}\varepsilon_r^0 + A_{12}\varepsilon_\varphi^0 + A_{13}\varepsilon_z^0 + A_r T^0)h, \\ N_\varphi &= (A_{21}\varepsilon_r^0 + A_{22}\varepsilon_\varphi^0 + A_{23}\varepsilon_z^0 + A_\varphi T^0)h.\end{aligned} \tag{3.20}$$

3.3. Układ równań różniczkowych

Ze względu na założone pole przemieszczeń (3.16) równania równowagi zostaną spełnione jedynie w sensie całkowym.

Równanie równowagi sił poziomych spełnimy w następującej postaci całkowej:

$$\int_{-h/2}^{h/2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r}-\frac{1}{r}\sigma_\varphi+\frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z}+R\right]dz=0. \tag{3.21}$$

Równanie równowagi sił pionowych można spełnić w różny sposób [1 i 2]. Wybierzemy spośród nich sposób przyjęty w pracy [2]:

$$\int_{0}^{h/2}\left[\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{zr})\right]dz=0. \tag{3.22}$$

Spełniając równanie w tej postaci przyjęto, że warstwa sprężysta o grubości $h/2$ spoczywa bez tarcia w płaszczyźnie $z=0$ na niepodatnym podłożu.

Na podstawie (3.18), (3.21) i (3.22) dochodzimy do układu równań różniczkowych:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12}\\ L_{21} & L_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u^0\\ \varepsilon_z^0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_r\\ f_z\end{bmatrix}, \tag{3.23}$$

gdzie

$$L_{11}=A_{11}\nabla_r^2-A_{22}\frac{1}{r^2},\qquad L_{12}=A_{13}\frac{d}{dr}+(A_{13}-A_{23})\frac{1}{r},$$

$$L_{21}=-\frac{h^2}{48}\frac{A_{31}}{A_{33}}A_{55}\nabla_r^2\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r)\right]-\frac{h^2}{48}\frac{A_{32}-A_{31}}{A_{33}}A_{55}\nabla_r^2\times$$
$$\times\left(\frac{1}{r}\right)+A_{31}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r)+(A_{23}-A_{13})\frac{1}{r},$$

$$L_{22}=\frac{h^4}{576}\frac{A_{31}}{A_{33}}A_{55}\nabla_r^2\nabla_r^2+\frac{h^4}{576}\frac{A_{32}-A_{31}}{A_{33}}A_{55}\nabla_r^2\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)-$$
$$-\frac{h^2}{48}A_{55}\nabla_r^2+A_{33}, \tag{3.24}$$

$$f_r=-\left[\frac{2}{h}p_r^s+A_r\frac{dT^0}{dr}+(A_r-A_\varphi)\frac{1}{r}T^0+R\right],$$

$$f_z=-\left\{\frac{h^2}{48}\frac{A_{55}}{A_{33}}\nabla_r^2p_z^s-p_z^s-\frac{h^3}{288}\frac{A_{31}}{A_{33}}\nabla_r^2\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rp_r^s)\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{h^3}{288}\frac{A_{32}-A_{31}}{A_{33}}\nabla_r^2\left(\frac{1}{r}p_r^s\right)-\frac{h}{6}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rp_r^s)-\frac{h^2}{48}\frac{A_{55}}{A_{33}}A_z\nabla_r^2T^s+A_zT^0\right\},$$

$$\nabla_r^2\nabla_r^2=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)\right]\right\}.$$

Jest to uwikłany układ równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach łącznie szóstego rzędu. Sposób postępowania przy rozwiązywaniu takich układów równań podał S. KALISKI [3]. Formalnie ścisłego rozwiązania układu równań można poszukiwać metodami wariacyjnymi, z których najbardziej efektywna wydaje się być metoda ortogonalizacyjna Bubnowa-Galerkina.

Uzyskanie ścisłego czy formalnego rozwiązania układu równań może nastręczać duże trudności. Z tego względu rozwiązanie układu najwygodniej jest znaleźć sposobem numerycznym, np. metodą różnic skończonych. Równaniami różnic skończonych we współrzędnych biegunowych zajmował się J. BENDA [4].

W ramach niniejszej pracy zajmiemy się rozwiązaniem pewnych szczególnych przypadków układu równań (3.23), dla których w łatwy sposób uzyskać można ścisłe rozwiązanie.

Rozpatrzmy tarczę o współczynnikach Poissona $\nu_{i3}=\nu_{3j}=0$ $(i,j=1,2)$. W tarczy tej stałe sprężystości $A_{i3}=A_{3j}$ $(i,j=1,2)$ są równe zeru.

Układ równań (3.23) przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}-\frac{\kappa^2}{\rho^2}\right)u^0=\frac{a^2}{A_{11}}f_r, \\ &\left(\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}-k^2\right)\varepsilon_z^0=-\frac{48}{A_{55}}\left(\frac{a}{h}\right)^2 f_z, \end{aligned} \tag{3.25}$$

gdzie

$$\kappa^2=A_{22}/A_{11}=E_\varphi/E_r, \qquad k^2=48\left(\frac{d}{h}\right)^2\frac{A_{33}}{A_{55}}.$$

Tutaj E_r i E_φ są modułami sprężystości podłużnej w kierunku promieniowym i obwodowym.

Rozwiązaniem równań (3.25) są funkcje:

$$u^0=C_1\rho^\kappa+C_2\rho^{-\kappa}+u_r, \qquad \varepsilon_z^0=C_3 I_0(k\rho)+C_4 K_0(k\rho)+\varepsilon_z^r, \tag{3.26}$$

gdzie u_r i ε_z^r są całkami szczególnymi równań różniczkowych niejednorodnych (3.25).

Nie nastręcza większych trudności rozwiązanie układu równań (3.23) w tarczy poprzecznie izotropowej o płaszczyznach izotropii równoległych do płaszczyzny $r\varphi$.

Stałe sprężystości mają wtedy postać (por. [5], s. 117)

$$\begin{aligned} &A_{11}=\frac{1}{DE'}\left(\frac{1}{E}-\frac{\nu'^2}{E'}\right), \quad A_{12}=\frac{1}{DE'}\left(\frac{\nu}{E}+\frac{\nu'^2}{E'}\right), \quad A_{13}=\frac{\nu'(1+\nu)}{EE'D}, \\ &A_{33}=\frac{1-\nu^2}{DE^2}, \quad A_{55}=G', \quad A_r=A_\varphi=\beta=\frac{1+\nu}{EE'D}(\alpha+\nu'\alpha'), \\ &A_z=\beta'=\frac{1+\nu}{ED}\left(2\frac{\nu'}{E'}\alpha+\frac{1-\nu}{E}\alpha'\right), \quad D=\frac{1+\nu}{EE'}\left(\frac{1-\nu}{E}-2\frac{\nu'^2}{E'}\right). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Tutaj E, ν i α oznaczają moduł sprężystości podłużnej, liczbę Poissona i współczynnik odkształcalności termicznej dla kierunków r i φ, a E', ν' i α' te same wielkości dla kierunku z.

Po uwzględnieniu wzorów (3.27) układ równań (3.23) można doprowadzić do postaci:

(3.28)
$$\varepsilon_z^0 = -\frac{A_{11}}{A_{13}}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru^0)+\frac{1}{A_{13}}\int f_r\,dr+C_1',$$
$$\nabla_0^2\nabla_0^2\nabla_0^2u^0-2\gamma\nabla_0^2\nabla_0^2u^0+\delta^2\nabla_0^2u^0=-\frac{576}{A_{55}}\frac{A_{33}}{A_{11}}\left(\frac{a}{h}\right)^4a^2f_z';$$

gdzie

$$2\gamma=-12\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{A_{13}}{A_{11}}-\frac{A_{33}}{A_{13}}\right),\quad \delta^2=-576\left(\frac{a}{h}\right)^4\frac{A_{33}}{A_{55}}\left(\frac{A_{13}}{A_{11}}-\frac{A_{33}}{A_{13}}\right),$$
$$f_z'=\frac{df_z}{dr}-\frac{h^4}{576}\frac{A_{55}}{A_{33}}\nabla_0^2\nabla_0^2f_r+\frac{h^2}{48}\frac{A_{55}}{A_{13}}\nabla_0^2f_r-\frac{A_{33}}{A_{13}}f_r,$$
$$\nabla_0^2=\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r)\right]=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{1}{r^2}.$$

W rozwikłanym w ten sposób układzie równań przyjęto założenie, że funkcja f_r jest całkowalna w obszarze rozwiązania. Stałą C_1' wyznaczamy po rozwiązaniu równania $(3.28)_2$ z warunku spełnienia równania (3.22) lub $(3.23)_2$.

Chcąc znaleźć całkę ogólną równania różniczkowego $(3.28)_2$ zajmiemy się najpierw rozwiązaniem równania jednorodnego. Równanie to, pomijając przypadek szczególny $\delta^2=\gamma^2$, można zastąpić układem trzech równań różniczkowych rzędu drugiego:

(3.29)
$$\nabla_0^2u_1^0=0,$$
$$\frac{d^2u_i^0}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{du_i^0}{d\rho}-\left(\frac{1}{\rho^2}+k_i^2\right)u_i^0=0,\qquad i=2,3.$$

Pierwsze z równań (3.29) rozwiązujemy przez kwadratury. Pozostałe dwa równania są równaniami Bessela. Postać całki ogólnej tego równania zależy od tego, czy parametr k_i^2 jest liczbą rzeczywistą dodatnią lub ujemną, czy też liczbą zespoloną. Na przykład, gdy $0<\delta^2<\gamma^2$ i $\gamma>0$, to parametry k_i są liczbami rzeczywistymi i dodatnimi. Rozwiązanie równania $(3.28)_2$ ma postać

(3.30)
$$u^0=C_1\rho+C_2\rho^{-1}+C_3I_1(k_1\rho)+C_4K_1(k_1\rho)+C_5I_1(k_2\rho)+$$
$$+C_6K_1(k_2\rho)+u_r.$$

Symbole I_1 i K_1 oznaczają zmodyfikowane funkcje Bessela pierwszego rzędu, pierwszego i drugiego rodzaju, u_r jest całką szczególną równania niejednorodnego $(3.28)_2$ oraz

$$k_1=\sqrt{\gamma+\sqrt{\gamma^2-\delta^2}},\qquad k_2=\sqrt{\gamma-\sqrt{\gamma^2-\delta^2}}.$$

W przypadku $\delta^2<0$ rozwiązaniami $(3.28)_2$ są funkcje

(3.31)
$$u^0=C_1\rho+C_2\rho^{-1}+C_3I_1(k_1\rho)+C_4K_1(k_1\rho)+$$
$$+C_5J_1(k_2\rho)+C_6Y_1(k_2\rho)+u_r,$$

gdzie J_1 i Y_1 są funkcjami Bessela pierwszego rzędu, pierwszego i drugiego rodzaju, oraz

$$k_1 = \sqrt{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \delta^2}}, \quad k_2 = \sqrt{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \delta^2}}.$$

Wszystkie możliwe postacie całki ogólnej układu równań o budowie $(3.29)_2$ można znaleźć w pracach [6 i 7] z tego względu nie będziemy ich tutaj podawać.

Stałe całkowania C_i występujące w rozwiązaniach równań różniczkowych grubej tarczy wyznaczamy z warunków brzegowych.

W warunkach brzegowych na pobocznicy walca ograniczającej tarczę mogą występować w różnych kombinacjach trzy wielkości geometryczne

$$(3.32) \qquad u^0, \quad u^1, \quad w^0$$

i trzy statyczne

$$(3.33) \qquad \sigma_r^0, \quad \sigma_r^1, \quad \tau_{zr},$$

gdzie $w^0 = \frac{1}{2} h\varepsilon_z^0$ jest funkcją przemieszczenia punktów leżących pierwotnie na płaszczyźnie $z = h/2$ w kierunku prostopadłym do tej płaszczyzny. Ponadto w środku tarczy $\rho = 0$ żadna z wielkości statycznych i geometrycznych nie może przyjmować nieskończonych wartości, jeżeli nie ma obciążenia skupionego.

4. Przykład

Przeprowadzone rozważania zilustrujemy następującym przykładem. Wyznaczymy stan naprężenia w tarczy kołowej obciążonej na pobocznicy walca ograniczającej tarczę obciążeniem $n_z^s = n(1 - 4\zeta^2)$. Obciążenie to można przedstawić w postaci $n_z^s = \frac{2}{3} n + \frac{1}{3} n (1 - 12\zeta^2)$.

Zadanie rozwiążemy dla tarczy, w której stałe sprężystości $A_{i3} = A_{3j} = 0$ $(i, j = 1, 2)$. Równanie różniczkowe do wyznaczenia nieznanych funkcji przemieszczenia u^0 i ε_z^0 ma postać (3.25). Rozwiązaniem równania są funkcje

$$u^0 = C_1 \rho^\kappa + C_2 \rho^{-\kappa}, \quad \varepsilon_z^0 = C_3 I_0(k\rho) + C_4 K_0(k\rho).$$

Z uwagi na fakt, że przemieszczenia w środku tarczy nie mogą przyjmować nieskończonych wartości $C_2 = C_4 = 0$.

Pozostałe stałe całkowania wyznaczamy z następujących warunków brzegowych:

$$\text{dla } \rho = 1 \qquad \sigma_r^0 = \frac{2}{3} n, \quad \sigma_r^1 = \frac{1}{3} n.$$

Po podstawieniu $(3.18)_1$ otrzymujemy

$$C_1 = \frac{2}{3} \frac{na}{E_r(\kappa + \nu_\varphi)}, \quad C_3 = \frac{1}{3} n \frac{(1 - \nu^2)}{E_r} \frac{G_{zr}}{E_z} \frac{1}{(1 + \nu_\varphi) I_0(k) + (1 - \nu_\varphi) I_2(k)},$$

a zatem składowe stanu naprężenia mają następującą postać:

$$\sigma_r = \frac{2}{3} n \left[\rho^{\kappa-1} + \frac{1}{2} \frac{(1+\nu_\varphi) I_0(k\rho) + (1-\nu_\varphi) I_2(k\rho)}{(1+\nu_\varphi) I_0(k) + (1-\nu_\varphi) I_2(k)} (1-12\zeta^2) \right],$$

$$\sigma_\varphi = \frac{2}{3} n\kappa \left[\rho^{\kappa-1} + \frac{1}{2} \kappa \frac{(1+\nu_r) I_0(k\rho) - (1-\nu_r) I_2(k\rho)}{(1+\nu_\varphi) I_0(k) + (1-\nu_\varphi) I_2(k)} (1-12\zeta^2) \right],$$

$$\sigma_z = \frac{1}{2} n (1-\nu^2) \frac{G_{zr}}{E_r} \frac{I_0(k\rho)}{(1+\nu_\varphi) I_0(k) + (1-\nu_\varphi) I_2(k)} (1-4\zeta^2),$$

$$\tau_{zr} = \frac{2}{\sqrt{3}} n (1-\nu^2) \frac{G_{zr}}{E_r} \sqrt{\frac{G_{zr}}{E_z}} \frac{I_1(k\rho)}{(1+\nu_\varphi) I_0(k) + (1-\nu_\varphi) I_2(k)} (1-4\zeta^2)\zeta;$$

tutaj E_r, E_φ, E_z i G_{zr} są technicznymi stałymi sprężystości, a $\nu^2 = \nu_r \nu_\varphi$.

Łatwo zauważyć, że w rozpatrywanym przypadku tarczy wpływ przyłożonego na pobocznicy walca obciążenia samozrównoważonego $\frac{1}{3} n (1-12\zeta^2)$ zanika bardzo szybko przy oddalaniu się od brzegu dla dużych wartości k. Ma to miejsce w tarczach o dużych stosunkach promienia do grubości tarczy a/h i modułu sprężystości podłużnej do modułu sprężystości poprzecznej E_z/G_{zr}.

5. Uwagi końcowe

W pracy przedstawiono kinematyczny sposób obliczania grubych tarcz kołowych lub pierścieniowych o ortotropii cylindrycznej znajdujących się w możliwie ogólnym obrotowo symetrycznym stanie naprężenia.

Uściślone związki prowadzą do układu dwóch równań różniczkowych łącznie szóstego rzędu. Umożliwia to spełnienie trzech warunków brzegowych na pobocznicy walca, ograniczającej tarczę.

W ogólnym przypadku ortotropii cylindrycznej układ równań różniczkowych jest układem uwikłanym o zmiennych współczynnikach. Rozwiązanie układu najwygodniej jest znaleźć sposobem numerycznym.

W tarczy poprzecznie izotropowej układ równań różniczkowych można rozwiązać w sposób ścisły. Rozwiązanie układu składa się z funkcji elementarnych i różnych postaci funkcji Bessela. Funkcje elementarne są identyczne jak w rozwiązaniu płaskiego stanu naprężenia. Gdy współczynnik Poissona $\nu_{i3} = \nu_{3j} = 0$ $(i, j = 1, 2)$, to układ równań rozpada się na dwa równania drugiego rzędu. Rozwiązanie układu składa się z funkcji podobnych jak w tarczy poprzecznie izotropowej.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. Kączkowski, *Theory of thick plats*, Arch. Mech. Stos., 6, 23, 867–874, 1971.
2. J. Kujawski, *Grube tarcze kołowe w obrotowo symetrycznym stanie naprężenia*, Arch. Budowy Maszyn [w druku].
3. S. Kaliski, *Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych*. Biul. WAT, 6, 28, 3–306, 1957.

4. J. Benda, *Řešeni kruhových desek metodou siti v polařnich suřadnicich*, Sbornik Vysokého Učeni Technického v Brné, 4, 175–189, 1964.
5. W. Nowacki, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.
6. Z. Kączkowski, *Płyty. Obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1968.
7. A. Gomuliński, *Determination of eigenvalues for circular plates on elastic foundation with two moduli*, Arch. Inżyn. Lądow., **13** 2, 183–203, 1967.

Резюме

ВРАЩАТЕЛЬНОСИММЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЛСТЫХ ДИСКАХ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОРТОТРОПИЕЙ

В работе представлен кинематический способ уточненного расчета круговых или кольцевых дисков с цилиндрической ортотропией, подвергнитых действию возможно общей вращательносимметричной нагрузки. При этом пришлось отойти от предположения, что напряжения и поле температур постоянны вдоль толщины диска. Проблема решена в перемещениях, что дало возможность точно удовлетворить пространственным отношениям теории упругости, за исключением уравнений равновесия, которые будут удовлетворены в интегральном смысле. В результате получена система двух дифференциальных уравнений совместни шестого порядка для определения неизвестных функций перемещения. Это позволяет удовлетворить трем гранижным условиям на боковой поверхности цилиндра ограничивающей диск. Работа иллюстрируется примером.

Summary

ROTARY SYMMETRIC STRESS STATE IN THE THICK TARGETS OF CYLINDRICAL ORTHOTROPY

The kinematical approach to a more calculation of the circular or ring targets with a cylindrical orthotropy, under the action of a general rotary symmetry load is presented. We resisted the assumption that the stress and temperature fields are constant across the target thickness. The problem was solved in terms of the displacements which exactly satisfies the spatial equations of the theory of elasticity except the equilibrium equations which are satisfied in an integral way. Finally the system of two six-order differential equations was obtained for the evaluation of the unknown displacement functions. It satisfies three boundary conditions on the lateral of the cylinder confining the target. An example illustrating the theory is given.

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 października 1974 r.