

ANALIZA RAM Z ELEMENTÓW CIENKOŚCIENNYCH

JAN KAZIMIERZ SZMIDT (SZCZECIN)

Udoskonalono stosowaną dotychczas metodę analizy ram cienkościennych. W przekonaniu autora daje ona wyniki bardziej dokładne. Obydwie składowe ramy — elementy cienkościenne i naroża — są rozważane oddzielnie. Do elementów cienkościennych wykorzystano teorię skręcania z paczeniem Własowa. Do analizy naroży ramy o skończonych wymiarach posłużono się metodą elementów skończonych. Podano macierz sztywności elementu cienkościennego o przekroju otwartym z siedmioma stopniami swobody. Element cienkościenny może być odniesiony do dowolnego kartezjańskiego ortogonalnego układu współrzędnych. Określono również macierze sztywności elementów składowych naroża. Pokazano sposób obliczania macierzy sztywności naroża ramy. Elementy macierzy zawierają przemieszczenia członów zbiegających się w danym narożu. Badania modelowe wykazują zgodność z wynikami obliczeń otrzymanymi metodą przedstawioną w tej pracy.

1. WSTĘP

Rozszerzenie metod mechaniki budowli, stosowanych przy obliczaniu ram z prętów o przekrojach zwartych, na ramy z prętów cienkościennych napotyka na pewne trudności związane z charakterem pracy tych ostatnich. W istniejących pracach [2-12] ze względu na specyfikę pracy skręcanego cienkościennego układu ramowego (dodatkový, w stosunku do prętów zwartych, stopień swobody — spłaszczenie przekroju pręta i nowa uogólniona siła w tym przekroju — bimoment), wprowadza się do obliczeń pewne założenia upraszczające, nakładając jednocześnie na ramy pewne warunki konstrukcyjne. W ogólności rozpatruje się ramy płaskie, których wszystkie pręty przecinają się pod kątami prostymi i posiadają jednakowe przekroje poprzeczne pod względem kształtu. Rozważa się przy tym przekroje dwuteowe i ceowe, ustawione swoimi półkami równoległe do płaszczyzny ramy. Szczegółowa dyskusja takich przypadków przeprowadzona została w pracy [2]. Dla pewnej klasy płaskich ram można sprowadzić węzeł do teoretycznego punktu bezwymiarowego i podać równanie równowagi bimomentów w takim węźle [2, 4, 7, 8, 9, 10 i 12]. Charakter obciążenia zewnętrznego ma wpływ na przyjęcie liczby stopni swobody w węźle ramy cienkościennej [4]. Obciążenie to przedstawia się zwykle w postaci dwóch składowych: równoległej i prostopadłej do płaszczyzny ramy. Jeżeli płaszczyzna obciążenia zewnętrznego jest równoległa do płaszczyzny ramy, to według I. W. URBANA [4] można pominąć w rozważaniach wpływ wyjścia węzłów ramy z jej płaszczyzny. Uzyskuje się przez to rozdzielenie zginania i skręcania ramy. Obliczenia przeprowadza się w tym przypadku w dwóch etapach: etap zwykłego obliczania ramy na zginanie w jej płaszczyźnie i etap, w którym rama obciążona jest wyłącznie momentami skręcającymi. W przypadku gdy obciąż-

zenie działa w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny ramy, takie wydzielenie skręcania nie jest już możliwe, nie można tu bowiem pominąć wpływu wyjścia węzłów ramy z jej płaszczyzny na wielkości sił i przemieszczeń. Należy więc uwzględnić cztery stopnie swobody w węźle (trzy pozostałe pomija się jako związane ze zginaniem ramy w jej płaszczyźnie). Zakłada się przy tym, że konstrukcja węzłów ramy zapewnia równość spaczeń przekrojów przywęzłowych prętów zbiegających się w takim węźle.

Tak więc zastosowanie klasycznych metod mechaniki budowli ogranicza się w efekcie tylko do pewnej klasy tych ram. W ogólności nie można sprowadzić węzła ramy cienkościennej do teoretycznego punktu bezwymiarowego i przyrównać sumy bimomentów w węźle do zera. Bimoment bowiem, jako samozrównoważony stan naprężeń zanika, ma więc charakter lokalny; przekazywanie się bimomentów w węźle ramy zależy w sposób istotny od jego konstrukcji. Na przykład przy traktowaniu węzła ramy jako bryły doskonale sztywnej bimomenty w ogóle nie przeniosą się na sąsiednie pręty.

W ogólnym przypadku ramy z prętów cienkościennych nie muszą spełniać przytoczonych wyżej założeń. Półki prętów ramy płaskiej nie muszą leżeć w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny ramy. Ramy mogą być przestrzenne o dowolnym układzie prętów. Także przekroje poszczególnych prętów mogą być różne, różne zatem mogą też być charakterystyki przekrojów tych prętów. Pręty ram poddane są w ogólności zginaniu ukośnemu i skręcaniu skrępowanemu. Naprężenia spowodowane skręcaniem skrępowanym są istotne, ale w zasadzie mają charakter naprężeń dodatkowych względem naprężeń wywołanych zginaniem, ścisaniem i ścinaniem, ponieważ bezpośrednie obciążenia zewnętrzne konstrukcji ramowych występują najczęściej w postaci obciążeń ciągłych lub sił skupionych, rzadziej w postaci momentów skręcających, jeśli pominąć mimośrodowość obciążeń, która praktycznie zawsze ma miejsce.

W niniejszej pracy podejmuje się próbę możliwie ogólnego potraktowania problemu analizy statycznej ram z prętów cienkościennych, jakkolwiek ze względu na jego obszerność bada się wyłącznie ramy z prętów o przekrojach otwartych: takie ramy spotyka się najczęściej w praktyce konstrukcyjnej. Zagadnienie traktuje się jako liniowe. Rozważania szczegółowe opierają się na metodzie elementów skończonych. Dyskusję prowadzi się dla ramy płaskiej, chociaż ogólne wywody odnoszą się również do ram przestrzennych.

2. OGÓLNA ANALIZA RAMY CIENKOŚCIENNEJ

Jak wiadomo, klasyczna rama stanowi konstrukcję składającą się z prętów (tworów liniowych) i bezwymiarowych węzłów. W niniejszej analizie przyjmuje się węzły o określonych wymiarach, przy czym jako pręty uważa się elementy ramy zawarte między właściwymi przekrojami przywęzłowymi. Obie kategorie elementów ramy, pręty i węzły, analizuje się oddzielnie, uwzględniając oczywiście wzajemne oddziaływanie tych elementów na siebie. W odniesieniu do prętów wykorzystuje się w całej rozciągłości techniczną teorię prętów cienkościennych W. Z. WŁASOWA [1], węzły natomiast bada się metodami teorii sprężystości.

2.1. Macierz sztywności dla pręta cienkościemnego

Korzystając z terminologii metody elementów skończonych [13], pręt określa się również jako element sprężysty, jego zaś końce jako węzły. Przy braku obciążeń zewnętrznych, jak również braku sił wywołanych odkształceniami wstępnymi elementu, charakterystyczną relację między siłami i przemieszczeniami węzłów zapisuje się następująco:

$$(2.1) \quad \{F\} = [K] \{\delta\},$$

gdzie $\{F\}$ oznacza wektor sił węzłowych elementu, $[K]$ macierz sztywności elementu oraz $\{\delta\}$ wektor przemieszczeń węzłowych elementu. Stan przemieszczeń elementu w lewym kartezjańskim układzie współrzędnych wyraża się funkcją przemieszczeń jak następuje:

$$(2.2) \quad \{f(z)\} = \begin{Bmatrix} u(z) \\ v(z) \\ w(z) \\ \theta^x(z) \\ \theta^y(z) \\ \theta(z) \\ \theta'(z) \end{Bmatrix}.$$

We wzorze (2.2) u , v , w oznaczają przemieszczenia liniowe odpowiednio wzdłuż osi x , y , z ; θ^x , θ^y obroty przekroju względem osi x , y ; θ kąt skręcenia przekroju oraz $\theta' = d\theta/dz$ miarę spaczenia przekroju.

Wykorzystując zapis (2.2), można wektor przemieszczeń węzłowych elementu $\{\delta\}$ przedstawić w formie

$$(2.3) \quad \{\delta\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_i\} \\ \{\delta_k\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(z)|_{z=z_i} \\ f(z)|_{z=z_k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(z)|_{z=0} \\ f(z)|_{z=l} \end{Bmatrix},$$

przy czym

$$(2.4) \quad \{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_i^x \\ \theta_i^y \\ \theta_i \\ \theta_i' \end{Bmatrix}, \quad \{\delta_k\} = \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \\ \theta_k^x \\ \theta_k^y \\ \theta_k \\ \theta_k' \end{Bmatrix}.$$

W podobny sposób można przedstawić wektor sił węzłowych elementu:

$$(2.5) \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} \{F_i\} \\ \{F_k\} \end{Bmatrix},$$

gdzie

$$(2.6) \quad \{F_i\} = \begin{Bmatrix} Q_i^x \\ Q_i^y \\ N_i \\ M_i^x \\ M_i^y \\ H_i \\ B_i \end{Bmatrix}, \quad \{F_k\} = \begin{Bmatrix} Q_k^x \\ Q_k^y \\ N_k \\ M_k^x \\ M_k^y \\ H_k \\ B_k \end{Bmatrix}.$$

We wzorach (2.6) Q^x , Q^y oznaczają siły poprzeczne wzdłuż osi x , y ; N siłę normalną; M^x , M^y momenty zginające względem osi x , y ; H moment skręcający oraz B bimotoent.

Dla wyznaczenia macierzy sztywności elementu $[K]$ wykorzystuje się zamieszczone w pracy [1] następujące równania różniczkowe:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} Fw^{II} - S_y u^{III} - S_x v^{III} - S_\omega \theta^{III} &= 0, \\ -S_y w^{III} + J_y u^{IV} + J_{xy} v^{IV} + J_{\omega_x} \theta^{IV} &= 0, \\ -S_x w^{III} + J_{xy} u^{IV} + J_x v^{IV} + J_{\omega_y} \theta^{IV} &= 0, \\ -S_\omega w^{III} + J_{\omega_x} u^{IV} + J_{\omega_y} v^{IV} + J_\omega \theta^{IV} - \frac{GJ_d}{E} \theta^{II} &= 0. \end{aligned}$$

W rozwiązaniach układu równań (2.7) występują pewne stałe, które dla zwięzłości zapisu oznaczają się następująco:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} J_{\omega_x} F - S_y S_\omega &= A^1, & S_x^2 - J_x F &= A^4, \\ J_{\omega_y} F - S_x S_\omega &= A^2, & S_y^2 - J_y F &= A^5, \\ J_{xy} F - S_x S_y &= A^3, & S_\omega^2 - J_\omega F &= A^6. \end{aligned}$$

Ponadto zachodzą związki

$$(2.8') \quad \begin{aligned} A^7 &= \frac{A^1 A^4 + A^2 A^3}{4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3}, & A^8 &= \frac{A^1 A^3 + A^2 A^5}{4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3}, & A^9 &= A \frac{S_y}{F} + A \frac{S_x}{F} + \frac{S_\omega}{F}, \\ & AA - AA & & AA - AA & & \end{aligned}$$

$$k^2 = \frac{GJ_d}{E \frac{1 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 6}{F} (AA + AA - A)}.$$

Nawiązując do układu równań (2.7) można funkcję przemieszczeń elementu (2.2) spełniającą warunki brzegowe (2.3), (2.4) wyrazić w postaci

$$(2.9) \quad \{f(z)\} = [P] [C]^{-1} \{\delta\}.$$

W dalszym ciągu wprowadza się następujące oznaczenia:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} R^1 &= 2 - 2 \operatorname{ch} kl + kl \operatorname{sh} kl, \\ R^2 &= 1 - \operatorname{ch} kl + kl \operatorname{sh} kl, \\ R^3 &= \operatorname{sh} kl - kl \operatorname{ch} kl, \\ R^4 &= kl - \operatorname{sh} kl, \\ R^5 &= \operatorname{ch} kl - 1. \end{aligned}$$

W celu wyznaczenia składowych sił (2.6) wykorzystuje się znane wzory [1]

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \sigma &= E(w^I - u^{II} x - v^{II} y - \theta^{II} \omega), \\ \tau &= \frac{E}{\delta} [-w^{III} F(s) + u^{III} S_y(s) + v^{III} S_x(s) + \theta^{III} S_\omega(s)] \end{aligned}$$

oraz

$$(2.11') \quad \begin{aligned} Q^x &= \int_F \tau \delta dx, & Q^y &= \int_F \tau \delta dy, \\ N &= \int_F \sigma dF, & M^x &= \int_F \sigma y dF, & M^y &= - \int_F \sigma x dF, \\ H &= H_k + H_\omega, & B &= \int_F \sigma \omega dF, \end{aligned}$$

przy czym

$$H_k = GJ_d \theta' \quad \text{i} \quad H_\omega = \int_F \tau \delta d\omega.$$

Wykorzystując związki (2.1)–(2.11) wyznacza się macierz sztywności elementu odniesioną od dowolnego lewego układu współrzędnych kartezjańskich (oś z jest równoległa do osi pręta). Ze względu na wymiary macierzy sztywności $[K]$ przedstawia się ją w formie

$$(2.12) \quad [K] = \frac{E}{Fl} \begin{bmatrix} [K_1] & [K_2] \\ s_{YM} & [K_3] \end{bmatrix}.$$

Odpowiednie podmacierze $[K_1]$, $[K_2]$ i $[K_3]$ zamieszczone są w kolejnych tablicach 1, 2 i 3. Jeżeli wektory 1 , $x(s)$, $y(s)$ i $\omega(s)$, wchodzące w wyrażenia elementów tych tablic dobrać w ten sposób, aby były parami ortogonalne po przekroju pręta, otrzymuje się tzw. główne współrzędne uogólnione [1]; macierz (2.12) ulegnie wówczas znacznemu uproszczeniu.

Tablica 1

1	2	3	4	5	6	7
$-12A/l^2$	$12A/l^2$	0	$-6A/l$	$-6A/l$	$12A/l^2$	$6A/l$
	$-12A/l^2$	0	$6A/l$	$6A/l$	$12A/l^2$	$6A/l$
		F^2	FS_x	$-FS_y$	0	$-FS_{\omega_0}$
			$4J_x F - 3S_x^2$	$3S_x S_y - 4J_{xy} F$	$-6A/l$	$3S_x S_{\omega_0} - 4J_{\omega_y} F$
			SYMMETRIA		$6A/l$	$4J_{\omega_x} F - 3S_y S_{\omega_0}$
					$-12(AA+AA)/l^2 + GJ_d FkI sh kI/ER$	$-6(AA+AA)/l + GJ_d FIR/ER$
						$S_{\omega_0}^2 - 4(AA+AA) - GJ_d FIR/ER$

Tablica 2

8	9	10	11	12	13	14
$12A/I^2$ ⁵	$-12A/I^2$ ³	0	$-6A/I$ ³	$-6A/I$ ⁵	$-12A/I^2$ ¹	$6A/I$ ¹
$-12A/I^2$ ³	$12A/I^2$ ⁴	0	$6A/I$ ⁴	$6A/I$ ³	$-12A/I^2$ ²	$6A/I$ ²
0	0	$-F^2$	$-FS_x$	FS_y	0	FS_o
$6A/I$ ³	$-6A/I$ ⁴	$-FS_x$	$2J_x F - 3S_x^2$	$3S_x S_y - 2J_{xy} F$	$6A/I$ ²	$3S_x S_o - 2J_{oy} F$
$6A/I$ ⁵	$-6A/I$ ³	FS_y	$3S_x S_y - 2J_{xy} F$	$2J_y F - 3S_y^2$	$-6A/I$ ¹	$2J_{ox} F - 3S_y S_o$
$-12A/I^2$ ¹	$-12A/I^2$ ²	0	$-6A/I$ ²	$6A/I$ ¹	$12(AA+AA)/I^2 - GJ_d FIR/ER$ ^{1 7 2 8}	$-6(AA+AA)/I + GJ_d FIR/ER$ ^{5 1}
$-6A/I$ ¹	$-6A/I$ ²	FS_o	$3S_x S_o - 2J_{oy} F$	$2J_{ox} F - 3S_y S_o$	$6(AA+AA)/I - GJ_d FIR/ER$ ^{1 7 2 8}	$-S_o^2 - 2(AA+AA) - GJ_d FIR/ER$ ^{4 1}

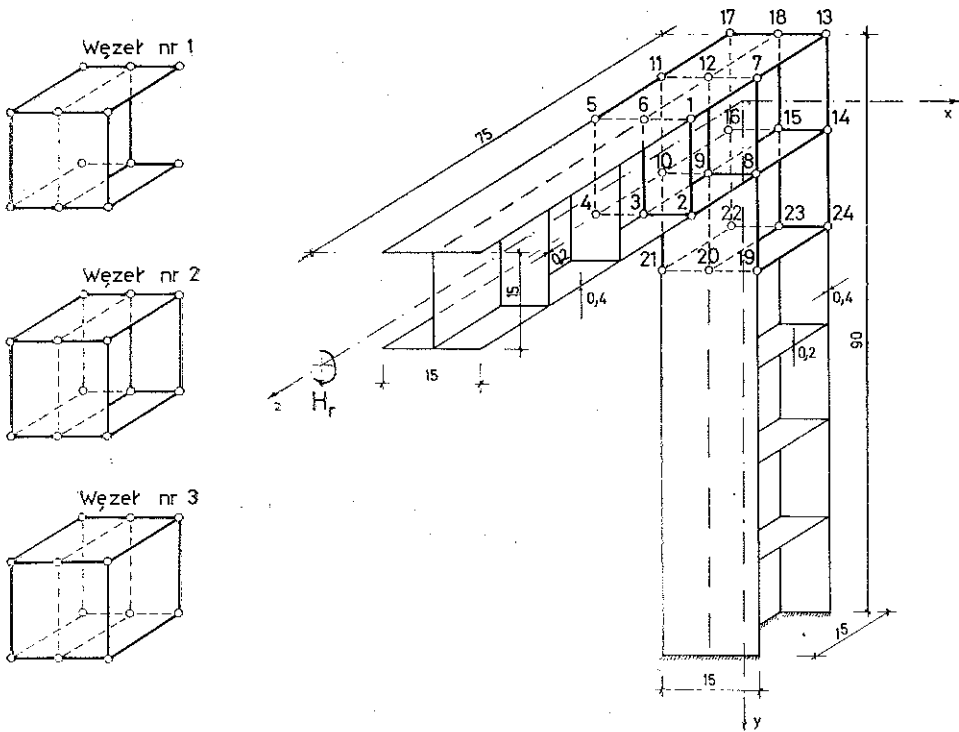
$[K_2] =$

Tablica 3

8	9	10	11	12	13	14
$-12A/l^2$	$12A/l^2$	0	$6A/l$	$6A/l$	$12A/l^2$	$-6A/l$
	$-12A/l^2$	0	$-6A/l$	$-6A/l$	$12A/l^2$	$-6A/l$
		F^2	FS_x	$-FS_y$	0	$-FS_{\omega}$
			$4J_x F - 3S_x^2$	$3S_x S_y - 4J_{xy} F$	$6A/l$	$3S_x S_{\omega} - 4J_{\omega y} F$
			SYMMETRIA	$4J_y F - 3S_y^2$	$-6A/l$	$4J_{\omega x} F - 3S_y S_{\omega}$
					$-12(AA+AA)/l^2 +$ $+ GJ_d F k l sh k l / ER +$	$6(AA+AA)/l -$ $- GJ_d FIR/ER$
						$S_{\omega}^2 - 4(AA+AA) -$ $GJ_d FIR/EkR$

2.2. Macierze sztywności elementów składowych węzła ramy cienkościennej

Dla określenia związków między siłami i przemieszczeniami w przekrojach przywęzłowych, wykorzystuje się metody teorii sprężystości. Ze względu na charakter konstrukcji węzła (układ płyt odpowiednio ze sobą połączonych) macierz sztywności węzła ramy wyznacza się na drodze przybliżonej za pomocą metody elementów skończonych. Pozwala to na rozwiązanie konkretnego zagadnienia, nie dając jednak możliwości podania ogólnego przepisu na budowę macierzy sztywności dla różnych możliwych przypadków konstrukcji węzłów. Tym niemniej można jednak podać ogólny sposób postępowania, który w niniejszej pracy przedstawiono na przykładzie prostej ramy wspornikowej (rys. 1).



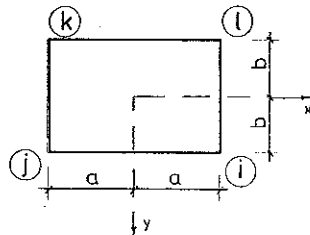
Rys. 1

Dla porównania rozpatruje się trzy podstawowe sposoby skonstruowania węzła. Uzyskane wyniki obliczeń numerycznych weryfikuje się doświadczalnie na modelu. W celu uniknięcia błędów związanych z odwzorowaniem rzeczywistej ramy na model konkretne obliczenia odnosi się do ramy stanowiącej model. Równocześnie przedmiotem przeprowadzonej tu analizy jest problem wielkości wpływu pracy płytowej elementów węzła na sztywność całego węzła. Dlatego też obliczenia dla każdego typu węzła prowadzi się w dwóch etapach: 1) traktując węzeł jako układ wyłącznie tarczowy oraz 2) traktując węzeł jako układ płytowo-tarczowy. Zagadnienie bada się jako liniowe i zakłada, że stan płytowy nie zależy od stanu tarczowego.

Poszczególne przypadki pracy węzła, wyłącznie w tarczach i układach złożonych z płyt i tarcz, oznacza się tu odpowiednio literami A i B . Tak więc rozpatruje się węzły $1A$, $1B$, $2A$, $2B$, $3A$, i $3B$ (rys. 1). Siatka układu dyskretnego jest naniesiona na rys. 1, a przynależne węzły siatki ponumerowane są liczbami 1–24. Dla uniknięcia osobliwości w odpowiednich węzłach siatki (punkty 8, 9, 10 na rys. 1) rozpatruje się węzeł ramy jako przedłużony w kierunku rygla i słupa o wielkości odpowiadającej jednemu oczku siatki. Węzły siatki wyznaczają tu elementy prostokątne i tylko takie są przedmiotem bliższej analizy w dalszej części pracy.

W dalszym ciągu do zestawienia globalnej macierzy sztywności węzła ramy potrzebne są macierze sztywności prostokątnych elementów tarczowych i płytowych. Macierze te wyznacza się tutaj na drodze energetycznej. Jako pierwszą wyznacza się *macierz sztywności dla elementu tarczowego*.

Niech dany będzie element tarczowy przedstawiony na rys. 2. Kolejność numeracji węzłów jest zgodna z ruchem wskazówek zegara: $i-j-k-l$. Grubość tarczy



Rys. 2

jest stała i wynosi t . Układ współrzędnych jest układem lokalnym, zaczepionym w geometrycznym środku elementu. Rozważa się płaski stan naprężeń. Stan przemieszczeń wewnątrz elementu opisuje funkcja

$$(2.13) \quad \{f(x, y)\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}.$$

Przemieszczenia dowolnego węzła elementu, np. i , uzyskuje się przez podstawienie do wzoru (2.13) współrzędnych tego węzła. Tak więc

$$(2.14) \quad \{\delta_i\} = \{f(x_i, y_i)\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}.$$

Funkcje $u(x, y)$ i $v(x, y)$ można wyrazić za pomocą wielomianów potęgowych w sposób następujący:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy, \\ v(x, y) &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy. \end{aligned}$$

Stałe α_i ($i=1, 2, \dots, 8$) w równaniach (2.15) należy określić przez parametry brzegowe, tj. przemieszczenia liniowe węzłów elementu. Warunki brzegowe można ująć następującym zapisem

$$(2.16) \quad \{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \\ u_l \\ v_l \end{Bmatrix} = [C] \{\alpha\},$$

gdzie $\{\alpha\}$ oznacza wektor stałych współczynników, $[C]$ zaś macierz, którą wyznacza się na podstawie wzoru (2.15).

Równanie (2.15) wygodniej jest zapisać w postaci macierzowej

$$(2.17) \quad \{f(x, y)\} = [P] \{\alpha\},$$

przy czym macierz $[P]$ [nie mylić z poprzednią macierzą $[P]$ (2.9)], przedstawiona jest następująco:

$$(2.18) \quad [P] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix}.$$

Podstawiając do macierzy $[P]$ kolejno współrzędne węzłów i, j, k, l uzyskuje się macierz $[C]$ wchodzącą do równania (2.16):

$$(2.19) \quad [C] = \begin{bmatrix} 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \\ 1 & -a & b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & b & -ab \\ 1 & -a & -b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & -b & ab \\ 1 & a & -b & -ab & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & -b & -ab \end{bmatrix}.$$

Odwracając następnie układ równań (2.16) otrzymuje się

$$(2.20) \quad \{\alpha\} = [C]^{-1} \{\delta\}.$$

Macierz $[C]^{-1}$ określona jest za pomocą wzoru (2.23).

Podstawienie (2.20) do (2.17) daje w wyniku

$$(2.21) \quad \{f(x, y)\} = [P][C]^{-1} \{\delta\}.$$

Ostatnie równanie określa stan przemieszczeń wewnątrz elementu, spełniający warunki brzegowe (2.16). Na podstawie (2.21) określa się całkowite odkształcenie elementu w sposób następujący:

$$(2.22) \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}.$$

Tablica 4

1	2	3	4	5	6	7	8
$b/3a$ $+(1-\nu) a/6b$	$\frac{1+\nu}{8}$	$-\frac{b}{3a}$ $+(1-\nu) a/12b$	$\frac{1-3\nu}{8}$	$-\frac{b}{6a}$ $-(1-\nu) a/12b$	$\frac{1+\nu}{8}$	$\frac{b}{6a}$ $-(1-\nu) a/6b$	$\frac{1-3\nu}{8}$
	$a/3b$ $+(1-\nu) b/6a$	$\frac{1-3\nu}{8}$	$a/6b$ $-(1-\nu) b/6a$	$\frac{1+\nu}{8}$	$-\frac{a}{6b}$ $-(1-\nu) b/12a$	$\frac{1-3\nu}{8}$	$-\frac{a}{3b}$ $+(1-\nu) b/12a$
		$b/3a$ $+(1-\nu) a/6b$	$\frac{1+\nu}{8}$	$b/6a$ $-(1-\nu) a/6b$	$\frac{1-3\nu}{8}$	$-\frac{b}{6a}$ $-(1-\nu) a/12b$	$\frac{1+\nu}{8}$
			$a/3b$ $+(1-\nu) b/6a$	$\frac{1-3\nu}{8}$	$-\frac{a}{3b}$ $+(1-\nu) b/12a$	$\frac{1+\nu}{8}$	$-\frac{a}{6b}$ $-(1-\nu) b/12a$
			SYMMETRIA		$\frac{1+\nu}{8}$	$-\frac{b}{3a}$ $+(1-\nu) a/12b$	$\frac{1-3\nu}{8}$
				$b/3a$ $+(1-\nu) a/6b$	$a/3b$ $+(1-\nu) b/6a$	$\frac{1-3\nu}{8}$	$a/6b$ $-(1-\nu) b/6a$
						$b/3a$ $+(1-\nu) a/6b$	$\frac{1+\nu}{8}$
							$a/3b$ $+(1-\nu) b/6a$

$$A = \frac{Et}{1-\nu^2}$$

$$(2.23) \quad [C]^{-1} = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} ab & 0 & ab & 0 & ab & 0 & ab & 0 \\ b & 0 & -b & 0 & -b & 0 & b & 0 \\ a & 0 & a & 0 & -a & 0 & -a & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & ab & 0 & ab & 0 & ab & 0 & ab \\ 0 & b & 0 & -b & 0 & -b & 0 & b \\ 0 & a & 0 & a & 0 & -a & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

W świetle wyrażeń (2.20) i (2.21) wzór (2.22) sprowadza się do postaci

$$(2.24) \quad \{\varepsilon\} = [B] \{\delta\},$$

gdzie macierz $[B]$ jest następująca:

$$(2.25) \quad [B] = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} b+y & 0 & -b-y & 0 & -b+y & 0 & b-y & 0 \\ 0 & a+x & 0 & a-x & 0 & -a+x & 0 & -a-x \\ a+x & b+y & a-x & -b-y & -a+x & -b+y & -a-x & b-y \end{bmatrix}$$

Na podstawie (2.24) można wyznaczyć energię potencjalną odkształcenia [14]

$$(2.26) \quad \Phi = \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \int_F \left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy}^2 \right) dF.$$

Wyrażenie (2.26) można przedstawić jako dodatnio określoną formę kwadratową w sposób następujący:

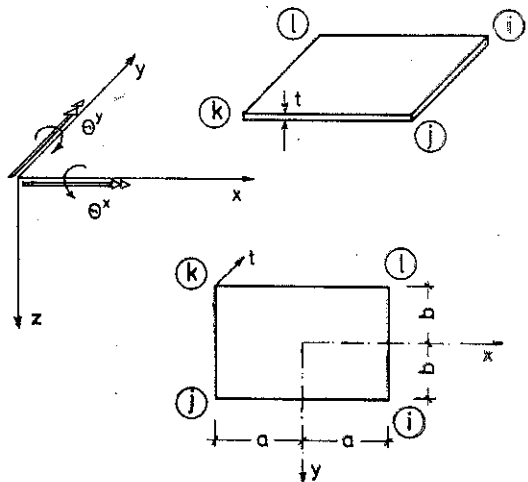
$$(2.27) \quad \Phi = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K] \{\delta\},$$

gdzie $[K]$ oznacza macierz sztywności elementu tarczy. Wykonując kolejno operacje określone przez wzory (2.24) i (2.26) dochodzi się do wzoru (2.27). Uzyskana w ten sposób macierz sztywności $[K]$ elementu tarczowego prostokątnego zamieszczona jest w tablicy 4.

W drugiej kolejności określa się macierze sztywności dla prostokątnych elementów płytowych.

Układ współrzędnych lokalnych, jak również funkcję opisującą stan przemieszczeń w takim elemencie,

przyjmuje się zgodnie z monografią [13] z tym, że w niniejszej pracy nieco inna jest kolejność numeracji poszczególnych węzłów elementu. Układ osi współrzędnych i dodatnie kąty obrotu zaznaczone są na rys. 3. Stan przemieszczeń w takim



Rys. 3

elemencie określa się za pomocą następującego wielomianu potęgowego dwunastoparametrowego:

$$(2.28) \quad w(x, y) = [P] \{\alpha\},$$

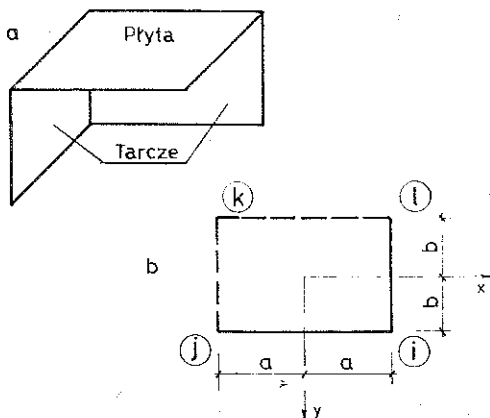
gdzie

$$(2.29) \quad [P] = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3],$$

$$\{\alpha\}^T = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}\}.$$

Macierz sztywności dla funkcji kształtu (2.28) i (2.29) jest zamieszczona w pracy [13] i z tego względu nie przytacza się jej tutaj.

W rozważanym węźle ramy cienkościennej przy obranej siatce występują elementy płytowe, które są oparte dwiema, trzema i czterema krawędziami na prostopadłych do nich tarczach (pod pojęciem oparcie rozumie się tu organiczne zespolenie płyty i tarczy wzdłuż ich wspólnej krawędzi).



Rys. 4

Można wyznaczyć bezpośrednio, np. na drodze energetycznej lub też, jak to czyni się w niniejszej pracy, wykorzystując dostępną macierz dla elementu płytowego dwunastoparametrowego. Poniżej, wyznacza się w pierwszej kolejności macierz sztywności dla elementu płytowego opartego dwiema swoimi krawędziami na prostopadłych do niego elementach tarczowych (rys. 4), czyli dla elementu płytowego ośmioparametrowego.

Element płytowy $i-j-k-l$ połączony jest z dolnymi elementami tarczowymi wzdłuż wspólnych kra-

wędzi. Przemieszczenia węzłów j, k, l płyty powinny być wspólne z przemieszczeniami tych węzłów dla dolnych tarcz. Przy przyjętych funkcjach kształtu dla tarcz, w celu zapewnienia ciągłości połączenia płyty z tarczą, należałoby przyjąć liniowy przebieg ugięcia płyty w miejscu połączenia. Osłabiając ten warunek, przyjmuje się następujące wzory na odpowiednie kąty obrotu płyty w węzłach:

$$(2.30) \quad \theta_j^x = \theta_k^x = \frac{w_k - w_j}{2b}, \quad \theta_k^y = \theta_l^y = \frac{w_l - w_k}{2a}.$$

Przyjęcie (2.30) zmniejsza liczbę niezależnych parametrów elementu płyty z dwunastu do ośmiu. Mając na uwadze (2.30), można wektor przemieszczeń węzłowych elementu dwunastoparametrowego zapisać następująco:

$$(2.31) \quad \{\delta\} = ([I] + [R]) \{\delta^*\} = \{\delta^*\} + [R] \{\delta^*\}.$$

We wzorze tym $[I]$ przedstawia macierz jednostkową, natomiast wektory przemieszczeń określają wzory

$$(2.32) \quad \begin{aligned} \{\delta\}^T &= \{w_i, \theta_i^x, \theta_i^y, w_j, \theta_j^x, \theta_j^y, w_k, \theta_k^x, \theta_k^y, w_l, \theta_l^x, \theta_l^y\}, \\ \{\delta^*\}^T &= \{w_i, \theta_i^x, \theta_i^y, w_j, 0, \theta_j^y, w_k, 0, 0, w_l, \theta_l^x, 0\}. \end{aligned}$$

Macierz $[R]$ we wzorze (2.31) określa się w prosty sposób na podstawie wzorów (2.30) i (2.31). Schemat tej macierzy ma następującą postać (jej elementy różne od zera zamieszczone są w specjalnie numerowanych wierszach i kolumnach):

$$(2.33) \quad [R] = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \\ \hline 8 \\ \hline \\ \hline 9 \\ \hline \\ \hline 12 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & 4 & & 7 & & 10 \\ \hline & \frac{-1}{2b} & & \frac{1}{2b} & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & \frac{-1}{2b} & & \frac{1}{2b} & & \\ \hline & & & \frac{-1}{2a} & & \frac{1}{2a} \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & \frac{-1}{2a} & & \frac{1}{2a} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Podstawiając (2.31) do (2.27), otrzymuje się

$$(2.34) \quad \Phi = \frac{1}{2} (\{\delta^*\}^T + \{\delta^*\}^T [R]^T) [K] (\{\delta^*\} + [R] \{\delta^*\}).$$

Po prostych przekształceniach wzór (2.34) sprowadza się do następującej postaci:

$$(2.35) \quad \Phi = \frac{1}{2} \{\delta^*\}^T [[K] + [R]^T [K] + [K] [R] + [R]^T [K] [R]] \{\delta^*\}.$$

Wyrażenie w nawiasach kwadratowych przedstawia poszukiwaną macierz sztywności:

$$(2.36) \quad [K^*] = [K] + [R]^T [K] + [K] [R] + [R]^T [K] [R].$$

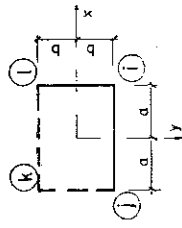
Macierz określona wzorem (2.36) jest kwadratowa o wymiarze 12×12 . Ze względu na to, że nowy wektor przemieszczeń węzłowych $\{\delta^*\}$ posiada pewne składowe równe zeru [wzór (2.32)], odpowiadające tym składowym wiersze i kolumny macierzy sztywności (2.36) można skreślić. W dyskutowanym przypadku są to wiersze i kolumny odpowiadające składowym (2.30), a więc piąty, ósmy, dziewiąty i dwunasty. Otrzymana na tej drodze macierz sztywności dla elementu płytowego ośmioparametrowego (rys. 4) przedstawiona jest w tabelicy 5.

Postępując podobnie jak wyżej, wyznacza się macierze sztywności dla elementu płytowego opartego trzema swoimi krawędziami na prostopadłych do niego tarczach,

Tabla 5

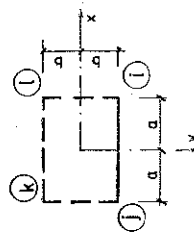
$8 [(a/b)^2 + (b/a)^2] + (28-8v)/5$	$8a^2/b + 4(1+4v)b/5$	$-8b^2/a - 4(1+4v)a/5$	$-8(b/a)^2 - 2(12-7v)/5$	$-8b^2/a - 4(1-v)a/5$	$4(1-v)$	$-8(a/b)^2 - 2(12-7v)/5$	$8a^2/b + 4(1-v)b/5$
	$32a^2/3 + 32(1-v)b^2/15$	$-8abv$	$-4bv$	0	0	$-8a^2/b - 4(1-v)b/5$	$16a^2/3 - 8(1-v)b^2/15$
	$32b^2/3 + 32(1-v)a^2/15$	$8b^2/a + 4(1-v)a/5$	$8b^2/a + 4(1-v)a/5$	$16b^2/3 - 8(1-v)a^2/15$	0	$4av$	0
		$8(b/a)^2 + 24(1-v)/5$		$8b^2/a + 4(1-v)a/5$	$-4(1-v)$	$2(2-v)$	0
		<i>SYMETRIA</i>		$32b^2/3 + 32(1-v)a^2/15$	0	0	0
					$4(1-v)$	$-4(1-v)$	0
						$8(a/b)^2 + 24(1-v)/5$	$-8a^2/b - 4(1-v)b/5$
							$32a^2/3 + 32(1-v)b^2/15$

$$A = \frac{1}{8ab} \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$



Tablica 6

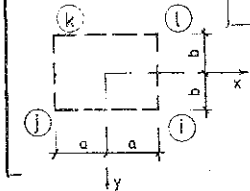
$8(b/a)^2 + 24(1-\nu)/5$	$-8b^2/a$ $-4(1-\nu)a/5$	$-8(b/a)^2$ $-24(1-\nu)/5$	$-8b^2/a$ $-4(1-\nu)a/5$	$4(1-\nu)$	$-4(1-\nu)$
	$32b^2/3$ $+32(1-\nu)a^2/15$	$8b^2/a$ $+4(1-\nu)a/5$	$16b^2/3$ $-8(1-\nu)a^2/15$	0	0
		$8(b/a)^2$ $+24(1-\nu)/5$	$8b^2/a$ $+4(1-\nu)a/5$	$-4(1-\nu)$	$4(1-\nu)$
SYMMETRIA				0	0
			$32b^2/3$ $+32(1-\nu)a^2/15$	$4(1-\nu)$	$-4(1-\nu)$
				A — JAK W TABL. 5	



$[K] = A$

czyli dla elementu płytowego sześcioparametrowego oraz dla elementu płytowego ópartego czterema swoimi krawędziami na tarczach, tj. elementu płytowego cztero-parametrowego. Wyznaczone w ten sposób macierze sztywności zamieszczone są w tablicach 6 i 7.

Tablica 7

$[K]=A$ 	$4(1-\nu)$	$-4(1-\nu)$	$4(1-\nu)$	$-4(1-\nu)$
	$4(1-\nu)$	$-4(1-\nu)$	$4(1-\nu)$	$-4(1-\nu)$
	$4(1-\nu)$	$-4(1-\nu)$	$4(1-\nu)$	$-4(1-\nu)$
	$4(1-\nu)$	$-4(1-\nu)$	$4(1-\nu)$	$-4(1-\nu)$

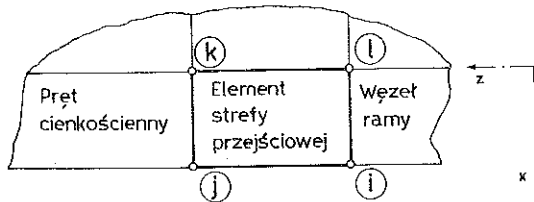
SYMETRIA

A — JAK W TABL. 5

Następną istotną sprawą opisywanej tu metody obliczeniowej ramy cienkościennej jest *analiza strefy przejściowej w układzie węzeł-pręt*.

W odniesieniu do węzła przedstawionego na rys. 1 parametrami są uogólnione przemieszczenia punktów węzłowych siatki. Idąc od strony rygła (słupa) interesującymi wielkościami są parametry związane z przekrojami prętów cienkościennych w miejscach połączenia z węzłem ramy (np. punkty węzłowe 1, 2, 3, 4, 5, 6 dla rygła; rys. 1). Przemieszczenia węzłów siatki w miejscu połączenia z prętem cienkościennym należy wyrazić przez składowe przemieszczeń pręta w przekroju przywęzłowym.

W tym celu rozpatruje się element strefy przejściowej $i-j-k-l$ na rys. 5. W poszczególnych przypadkach dotyczy to np. elementów 7-1-6-12, 9-3-6-12 i innych (rys. 1).



Rys. 5

Krawędź $j-k$ elementu strefy przejściowej stanowi, w danym przypadku, połączenie z półką pręta cienkościennego.

Niech wektor przemieszczeń węzłowych $\{\delta\}$ elementu strefy przejściowej będzie napisany w globalnym układzie współrzędnych. Składowe wektora przemieszczeń elementu $i-j-k-l$ (rys. 5) można tak uszeregować, aby najpierw napisać składowe przemieszczeń węzłów i, l (stykających się z węzłem ramy), a następnie składowe

węzłów j, k (stykających się z prętem cienkościennym). Wektor przemieszczeń elementu $i-j-k-l$ ma postać wobec tego następującą:

$$(2.37) \quad \{\delta\} = \begin{Bmatrix} \{\delta\} \\ \{\delta^*\} \end{Bmatrix},$$

gdzie

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_l \end{Bmatrix}, \quad \{\delta^*\} = \begin{Bmatrix} \delta_j \\ \delta_k \end{Bmatrix}.$$

Składowe $\{\delta^*\}$ wyraża się następnie przez składowe przemieszczeń przekroju pręta cienkościennego. Dla dowolnego punktu $i(x_i, y_i)$, leżącego w miejscu połączenia pręta i strefy przejściowej (np. krawędź $j-k$ na rys. 5), otrzymuje się

$$(2.38) \quad \begin{aligned} u_i &= u - \theta y_i, & v_i &= v + \theta x_i, \\ w_i &= w - \theta^x y_i + \theta^y x_i - \theta' \omega_i, & \theta_i^x &= \theta^x - \theta' x_i. \end{aligned}$$

We wzorach (2.38) $u, v, w, \theta^x, \theta^y, \theta$ i θ' przedstawiają składowe wektora przemieszczeń przekroju pręta cienkościennego, w tym przypadku rygła, przy czym uwzględnia się tu zmiany znaków kątów θ^x i θ^y zgodnie z rys. 3. Nie wypisuje się tu wyrażen dla θ_i^y i θ_i^z , ponieważ z uwagi na charakter warunków brzegowych wielkości te nie występują jako składowe w wektorze przemieszczeń węzłowych $\{\delta\}$ elementów strefy przejściowej. W dalszym ciągu odpowiednie zależności można napisać jak następuje:

$$(2.39) \quad \begin{Bmatrix} \delta \\ \delta^* \end{Bmatrix} = [R'] \begin{Bmatrix} \delta \\ \lambda \end{Bmatrix},$$

gdzie

$$[R'] = \begin{bmatrix} [I] & 0 \\ 0 & [R] \end{bmatrix}.$$

Tutaj $[R]$ oznacza macierz, którą określa się na podstawie wzorów (2.38), $[I]$ jest macierzą jednostkową, natomiast $\{\lambda\}$ jest wektorem przemieszczeń przekroju pręta cienkościennego.

2.3. Macierz sztywności dla węzła ramy cienkościennej

W poprzednim punkcie węzeł traktowany był jako układ tarczowy lub płyto-tarczowy. Zagadnienie sprowadzało się do badania przemieszczeń wybranych punktów węzła. Konstruktora w ogólnym przypadku nie interesują przemieszczenia całej siatki, interesują go przede wszystkim przemieszczenia przekrojów przywęzłowych i związki między siłami i przemieszczeniami w tych przekrojach. Poszukuje się zatem macierzy sztywności węzła ramy, której elementy odpowiadają składowym przemieszczeń przekrojów przywęzłowych.

Energię potencjalną sił wewnętrznych całego układu (pręty plus węzeł) można przedstawić w sposób następujący:

$$(2.40) \quad \Phi = \Phi_p + \Phi_w,$$

gdzie Φ_p oznacza energię odkształcenia nagromadzoną w prętach schodzących się w danym węźle, Φ_w zaś energię nagromadzoną w węźle.

Drugi składnik prawej strony równania (2.40) można przedstawić w postaci

$$(2.41) \quad \Phi_w = \frac{1}{2} \int_v \sigma_{ik} \varepsilon_{ik} d\omega.$$

Wyrażenie (2.41) jest całką objętościową, która przy danej konstrukcji węzła i danych warunkach brzegowych przedstawia pewną liczbę. Przy ustalonym wyrażeniu podcałkowym zależy ona tylko od warunków brzegowych, np. od narzuconych na brzegach przemieszczeń. Dla określenia tej energii wykorzystuje się w dalszym ciągu metodę elementów skończonych. Odpowiednio do zagęszczenia dyskretnej siatki i dla możliwie bogatych funkcji kształtu poszczególnych elementów skończonych będzie ona stosunkowo wiernie opisywała istniejący stan rzeczy. Całkę (2.41) można napisać w formie

$$(2.42) \quad \Phi = \frac{1}{2} \sum_i \{\delta_i\}^T [K_i] \{\delta_i\},$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich elementach składowych węzła. Dla węzła prawdziwy jest analogiczny wzór:

$$(2.43) \quad \Phi = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K] \{\delta\}.$$

Stąd

$$(2.44) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \{\delta\}} = [K] \{\delta\} = \{F\}.$$

Ostatni wzór ma następującą postać rozwiniętą:

$$(2.45) \quad \begin{bmatrix} K_{1,1} & \dots & K_{1,r} & K_{1,r+1} & \dots & K_{1,n} \\ & & [A] & & & [B] \\ K_{r,1} & \dots & K_{r,r} & K_{r,r+1} & \dots & K_{r,n} \\ \hline K_{r+1,1} & \dots & K_{r+1,r} & K_{r+1,r+1} & \dots & K_{r+1,n} \\ & & [B]^T & & & [C] \\ K_{n,1} & \dots & K_{n,r} & K_{n,r+1} & \dots & K_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_r \\ \delta_{r+1} \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_r \\ F_{r+1} \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix},$$

gdzie $\delta_1, \dots, \delta_r$ oznaczają składowe przemieszczeń węzłów siatki wewnątrz węzła ramy,

$\delta_{r+1}, \dots, \delta_n$ składowe przemieszczeń przekrojów przywęzłowych prętów cienkościennych,

F_1, \dots, F_r składowe sił zewnętrznych działających na wewnętrzne punkty siatki,

F_{r+1}, \dots, F_n składowe sił w przekrojach przywęzłowych.

Wprowadzając oznaczenia

$$(2.46) \quad \{\delta^*\} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_r \end{bmatrix}, \quad \{A\} = \begin{bmatrix} \delta_{r+1} \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_r \end{bmatrix}, \quad \{R\} = \begin{bmatrix} F_{r+1} \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix},$$

przedstawić można układ równań (2.45) w postaci następującej:

$$(2.47) \quad \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B]^T & [C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta^* \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ R \end{bmatrix}.$$

Korzystając następnie ze wzoru

$$(2.48) \quad \{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta^* \\ \vdots \\ A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ A \end{Bmatrix} = \{A_1\} + \{A_2\},$$

można zapis (2.47) przedstawić w formie

$$(2.49) \quad \begin{Bmatrix} [A] & [B] \\ [B]^T & [C] \end{Bmatrix} (\{A_1\} + \{A_2\}) = \begin{Bmatrix} F \\ R \end{Bmatrix}.$$

Biorąc pod uwagę tylko r pierwszych równań (2.49) otrzymuje się

$$(2.50) \quad [A] \{A_1\} + [B] \{A_2\} = \{F\}.$$

W świetle wzoru (2.48) równania (2.50) przyjmują postać

$$(2.51) \quad [A] \{\delta^*\} + [B] \{A\} = \{F\},$$

skąd wynika

$$(2.52) \quad [A] \{\delta^*\} = \{F\} - [B] \{A\}.$$

Mnożąc ostatnie równanie przez $[A]^{-1}$ uzyskuje się

$$(2.53) \quad \{\delta^*\} = [A]^{-1} \{F\} - [A]^{-1} [B] \{A\}.$$

Na podstawie wzorów (2.49) i (2.48) można pozostałe równania ($r+1$, $r+2$, ..., n) wyrazić następująco:

$$(2.54) \quad [B]^T \{\delta^*\} + [C] \{A\} = \{R\}.$$

Podstawienie (2.53) do (2.54) daje w wyniku

$$(2.55) \quad [B]^T [A]^{-1} \{F\} - [B]^T [A]^{-1} [B] \{A\} + [C] \{A\} = \{R\}.$$

Po prostych przekształceniach, można wzór (2.55) sprowadzić do następującego:

$$(2.56) \quad ([C] - [B]^T [A]^{-1} [B]) \{A\} = \{R\} - [B]^T [A]^{-1} \{F\}.$$

Wyrażenie w nawiasach stojące po lewej stronie równania (2.56) przedstawia sprowadzoną macierz sztywności węzła ramy cienkościennej:

$$(2.57) \quad [K^*] = [C] - [B]^T [A]^{-1} [B].$$

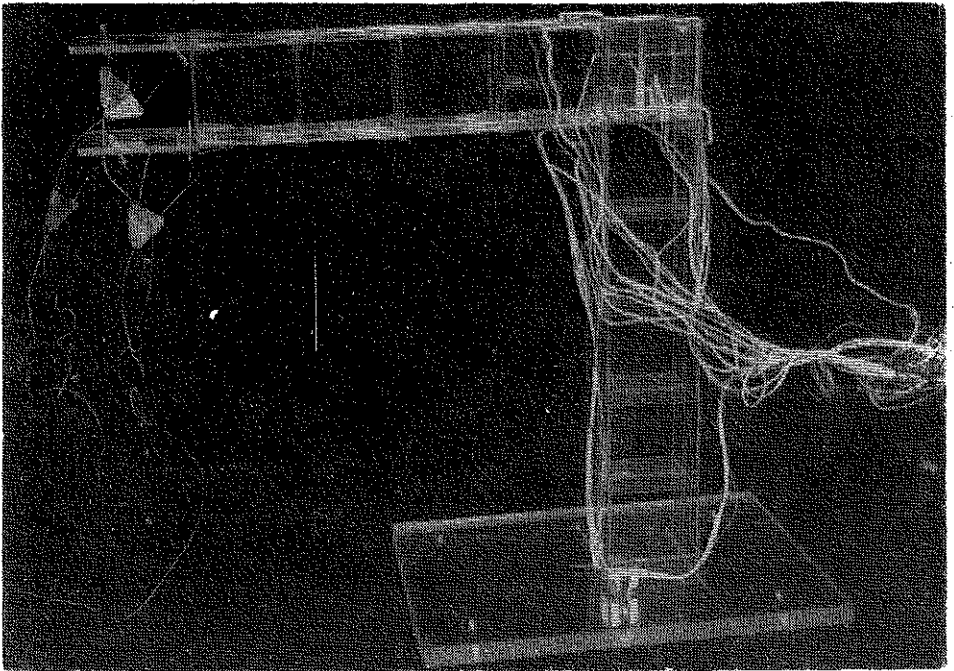
Na podstawie (2.57) przy omawianej siatce dyskretnej i danych funkcjach kształtu można określić liczbowe macierze sztywności dla poszczególnych węzłów ramy, niezależnie od samej ramy. Elementy tych macierzy odnoszą się tylko do przemieszczeń przekrojów przywęzłowych prętów.

3. ANALIZA MODELOWA RAMY CIENKOŚCIENNEJ

Dotychczasowa analiza ramy cienkościennej, przeprowadzona na podstawie konkretnego przypadku, miała w zasadzie charakter ogólny, rozważania bowiem oparto na notacji ogólnej. Dla szczegółowej ilustracji problemu rozpatrywana rama została poddana badaniom modelowym w konfrontacji z obliczeniami.

3.1. Badania modelu

Badania wykonano na modelu ramy (rys. 1.), wykonanego ze szkła organicznego «metaplex». Materiał ten charakteryzuje się korzystnie niskim modułem sprężystości oraz łatwością łączenia elementów przez klejenie. Do budowy modelu użyto płyt o grubości 4 i 2 mm. Pasy i środniki prętów wykonano z płyt grubości 4 mm, płyty 2 mm wykorzystano natomiast do wykonania przepon usztywniających. Podparcie modelu, eliminujące jego ruchy jako bryły sztywnej, uzyskano przez utwierdzenie dolnego końca słupa w płycie z metaplexu grubości 30 mm. Wygląd modelu przedstawia rys. 6, model zaś na stanowisku badawczym wraz z oprzyrządowaniem pokazuje



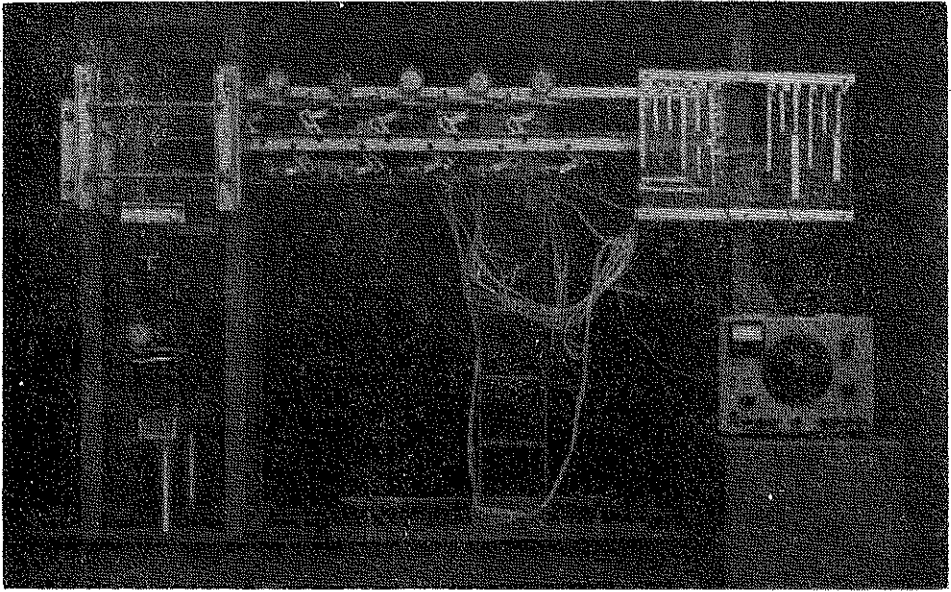
Rys. 6

rys. 7. Potrzebne stałe materiałowe szkła organicznego wyznaczono doświadczalnie; uzyskano następujące dane:

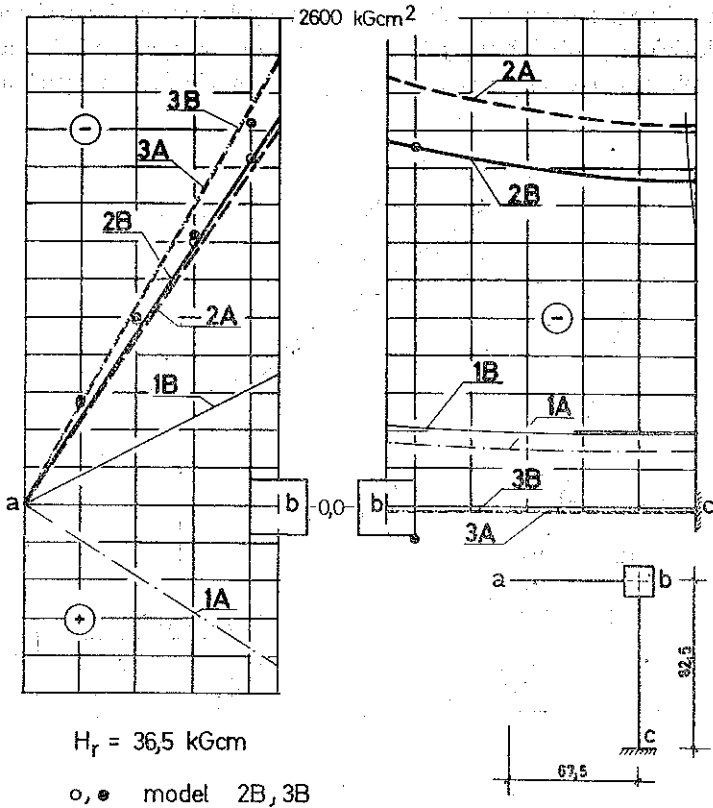
dla płyt 4 mm $E = 33000 \text{ kG/cm}^2$, $\nu = 0,35$;

dla płyt 2 mm $E = 36000 \text{ kG/cm}^2$, $\nu = 0,35$.

Obciążenie ramy stanowił moment skręcający $H_r = 36,5 \text{ kGcm}$, realizowany przez parę sił działających poprzecznie na końcu pólek rygla. Badania przeprowadzono w dwóch etapach, przy nadaniu kształtu węzłowi ramy typu 2B i 3B. Przypadek węzła typu 1B został w badaniach pominięty ze względu na zbyt małą jego sztywność. W każdym z etapów wykonano sześć serii pomiarów (trzy serie dla $H_r > 0$ i trzy serie dla $H_r < 0$). Z uzyskanych wyników pomiarów (mierzone jednostkowe odkształ-



Rys. 7



Rys. 8

[469]

czenia w półkach rygla wzdłuż jego długości i w przekroju przywęzłowym słupa za pomocą tensometrów elektrooporowych typu RL 10/130 i RL 10/120, połączonych z mostkiem tensometrycznym ZKTR nr 1140) obliczono średnie arytmetyczne. Z odkształceń jednostkowych wyznaczono naprężenia normalne, a stąd bimomenty. Dane z pomiarów na modelu naniesione są na rys. 8.

Charakterystyki przekrojów prętów modelu były następujące:

$$F = 17,68 \text{ cm}^2 \quad J_x = 735,08 \text{ cm}^4, \quad J_y = 225,08 \text{ cm}^4,$$

$$J_d = 1,1315 \text{ cm}^4,$$

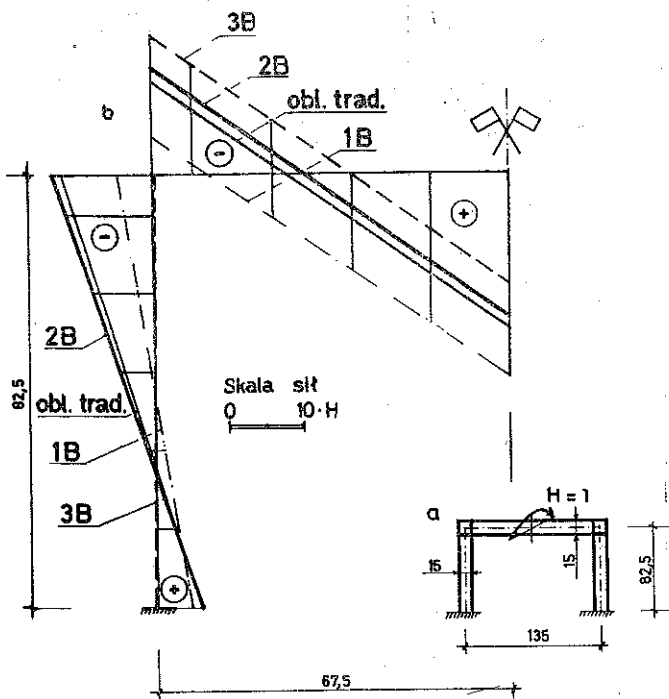
$$J_\omega = 11990,25 \text{ cm}^6, \quad k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}} = 5,912 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}.$$

3.2. Obliczenie modelu

Uzyskane wyniki obliczeń numerycznych naniesione są na rysunku ramy w rozwinięciu (rys. 8), przy czym rzędne w przekrojach przywęzłowych uzyskano przez przedłużenie wykresów w kierunku węzła ramy.

4. PRZYKŁAD LICZBOWY

W celu dalszego zilustrowania przeprowadzonych rozważań rozwiązuje się prostą ramę cienkościenną, obciążoną jak to pokazano na rys. 9a. Rama wykonana jest z metaplexu o charakterystyce podanej w punkcie 3.1 i przy skonstruowaniu



Rys. 9

węzłów zgodnie z rys. 1a, b, c. Dla uchwycenia różnic w metodach dotychczasowych i proponowanej w niniejszej pracy oblicza się tę ramę obiema metodami. Uzyskane wyniki obliczeń naniesione są na rys. 9b.

5. UWAGI KOŃCOWE

Sporządzone wykresy bimomentów uwidaczniają wyraźnie wpływ konstrukcji węzła na przenoszenie się tych wielkości w przekrojach przywęzłowych. Dla węzłów o dużej sztywności przestrzennej (np. dla węzła 3B) można uważać, że bimomenty w przekrojach przywęzłowych są niezależne od siebie. Dla węzłów «normalnych» (takich jak np. 2B) należy w obliczeniach uwzględnić efekt podatności węzła i jego wpływ na rozkład bimomentów w przekrojach przywęzłowych. Idealizacja pracy węzła ramy w myśl przyjętej tutaj teorii daje dobre wyniki dla prawdziwych węzłów. Uwzględnienie wyłącznie stanu tarczowego dla węzła porównawczego 1A oznacza, że górna półka rygla nie przenosi żadnych sił w obrębie węzła. W rzeczywistości siły z półki górnej przekazują się na węzeł wskutek zginania środka. Powstaje tu stan naprężeń i odkształceń odbiegający od przyjętego w technicznej teorii skręcania prętów cienkościennych W. Z. WŁASOWA (odkształcalność konturu przekroju przywęzłowego rygla). Tłumaczy to odbiegający od pozostałych przypadków wykres bimomentów na ryglu dla węzła 1A (rys. 8).

Porównanie odpowiednich wyników dla węzłów, traktowanych jako układy tarczowe i płytowo-tarczowe, pozwala na określenie wpływu sztywności płytowej elementów węzła na sztywność całego węzła ramy.

Maksymalne odchyłki w wielkościach bimomentów uzyskanych z obliczeń i określonych na podstawie badań modelowych nie przekraczają 10%. Ma tu swój wpływ ograniczona dokładność pomiaru względnych odkształceń. Daje to w efekcie największą różnicę przy pomiarze odkształceń w głowicy słupa dla przypadku węzła 3B. Wyniki pomiarów dla tego przypadku sięgały wartości 6–8 działek na skali mostka, co przy dokładności samego urządzenia (4–6 działek) stawia ten jeden wynik pod znakiem zapytania.

Przyjęta teoria przy stosunkowo rzadkiej siatce dyskretniej wydaje się spełniać postawione jej warunki i stosunkowo dobrze nadaje się do opisu rzeczywistego stanu pracy ramy cienkościennej.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. В. З. Власов, *Тонкостенные упругие стержни*, Госуд. издатель. физико-матем. литературы, Москва 1959.
2. Б. Н. Горбунов, А. И. Стрельбицкая, *Теория рам из тонкостенных стержней*, ОГИЗ — Гостехиздат, Москва 1948.
3. J. E. GOLDBERG, *Torsion of I-type and H-type beams*, ASCE, Proc. 78, August 1952.
4. И. В. Урбан, *Теория расчета стержневых тонкостенных конструкций*, Трансжелдориздат, Москва 1955.
5. Р. Л. Малкина, *Расчет балочных и рамных систем из тонкостенных элементов методом последовательных приближений*, Вопросы строительной механики, Сб. 54, Стройиздат, Москва 1955.

6. Z. CYWIŃSKI, *Metoda iteracyjna Crossa w zastosowaniu do rozwiązania skręconych, płaskich, cienkościennych układów ramowych o przekrojach otwartych*, Zesz. Nauk. Politechniki Gdańskiej, Bud. Łąd., Nr. 32/V/1962.
7. J. RUTECKI, *Wytrzymałość konstrukcji cienkościennych*, PAN IPPT, W-wa 1957.
8. J. RUTECKI, *Cienkościenne konstrukcje nośne*, PWN, Warszawa 1966.
9. Н. И. Карякин, *Основы расчета тонкостенных конструкций*, Высшая школа, Москва 1960.
10. Д. В. Бычков, *Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций*, Госстройиздат, Москва 1962.
11. K. S. Цивилин, *Матричный метод расчета пространственных рам из тонкостенных стержней*, Прикладная механика, 5, 4, 1969.
12. C. F. KOLBRUNNER, N. HAJDIN, D. KRAJČINOVIC, *Matrix analysis of thinwalled structures*, Institute for Engineering Research, 10/1969, V. Leemann, Zürich.
13. O. C. ZIENKIEWICZ, Y. K. CHEUNG, *The finite element method in structural and continuum mechanics*, J. Wiley, London 1967.
14. S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa 1962.

Резюме

АНАЛИЗ РАМ ИЗ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

На фоне полученных до сих пор результатов, предложен новый метод расчета тонкостенных рам, который по имени автора, дает результаты ближе действительности. Составляющие части рамы, стержни и узлы рассматриваются независимо. Стержни относятся к теории стесненного кручения В. З. Власова. Узлы рамы исследуются методом конечных элементов. Выведены матрица жесткости стержня по отношению к произвольной прямоугольной системе координат и матрицы жесткости для элементов составного узла рамы. Представлены формулы для определения матрицы узла, элементы которой относятся к перемещениям приузловых сечений. Экспериментальные испытания на модели рамы показали хорошее соответствие с результатами полученными теоретическим путем.

SUMMARY

THE ANALYSIS OF FRAMES MADE UP OF THIN-WALLED ELEMENTS

A new method analysis for thin-walled frames has been developed and added to the one used up till now. In the author's opinion it gives more accurate results. Both components of the frame, thin-walled members and corners are considered separately. In reference to members, Vlasov's theory of warping torsion is used. The finite element method of analysis for frame corners with dimensions is assumed. The stiffness matrix of a thin-walled member of open section seven degrees of freedom is given whereby an arbitrary orthogonal coordinate system is valid. Also the stiffness matrices of corner parts are determined. The rule for the calculation of frame corner stiffness matrix, the elements of which refer to displacements of members converging at this corner, has been presented. Model investigations are in compliance with the results obtained by computations according to the rules set in this article.

POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 października 1974 r.