

KONSOLIDACJA PÓLPRZESTRZENI LEPKOSPREŻYSTEJ OBCIĄŻONEJ SIŁĄ SKUPIONĄ

GWIDON SZEFER I JAN GASZYŃSKI (KRAKÓW)

W pracy podano rozwiązanie dla osiowo-symetrycznego stanu deformacji konsolidującej półprzestrzeni lepkosprężystej, wywołanego działaniem siły skupionej na brzegu. Własności reologiczne szkieletu opisano różnymi jądrami pelzania postaciowego, objętościowego i wywołanego działaniem cieczy w porach. Uzyskano ściśle rezultaty w transformatach zarówno dla brzegu przepuszczalnego jak i nieprzepuszczalnego. Podano efektywną metodę odwracania transformat. Wykazano, że charakter osobliwości rozwiązania różni się od przypadku ośrodka jednofazowego (półprzestrzeń sprężysta) tylko ilościowo. Uzyskane rozwiązanie stanowi funkcję Greena dla konsolidującej półprzestrzeni.

1. WSTĘP

Konstrukcja rozwiązań osobliwych, a w tym przede wszystkim rozwiązań dla siły skupionej, zajmuje szczególne miejsce w liniowych teoriach ośrodka ciągłego. Wynika to z jednej strony z przesłanek natury matematycznej (analizy osobliwości, funkcji Greena), w drugiej zaś z powodów natury fizycznej, a tłumaczących się analizą koncentracji naprężeń, charakterem osobliwości w mieszanych problemach brzegowych (stempel, szczelina) itp. Pod tym względem rola takich rozwiązań we współczesnej, liniowej teorii konsolidacji jest nie mniej doniosła. Szczególnie problem półprzestrzeni obciążonej siłą skupioną zasługuje, ze względu na swój walor poznawczy jak i praktyczny, na oddzielne potraktowanie. Chociaż zagadnienie to było już podejmowane wcześniej przez kilku autorów (FREUDENTHAL-SPILLERS [4], SOB-CZYŃSKA [13 i 14], ZARECKI [18], KOŃCZAK [5]), jego dyskusji nie można uznać w pełni za zadowalającą i zamkniętą. Okazuje się bowiem, że większość istniejących rezultatów obarczona jest błędem wynikającym z niepoprawnie postawionych warunków początkowych, a ignorujących nienormalność układu równań teorii konsolidacji. W pracach [4, 13, 14 i 5] rozważano przypadek natychmiastowego obciążenia przy równoczesnym przyjęciu jednorodnych warunków początkowych, co jak łatwo sprawdzić, prowadzi do rezultatów niezgodnych z założeniem: gdy w rozwiązaniu wykona się przejście graniczne $t \rightarrow 0^+$, to nie otrzymuje się spodziewanych zerowych wartości funkcji założonych w warunku początkowym. Podobnie błędne rezultaty lecz dla innych przypadków obciążenia otrzymali BIOT [2] oraz MCNAMEE i GIBSON [9 i 10]. Kwestię tę próbowano tłumaczyć różnymi przyczynami o charakterze fizycznym [3], jednak istota problemu ma zupełnie odmienny charakter i leży w sferze własności czysto matematycznych. Z kolei ZARECKI [18], chociaż uniknął tego błędu, nie rozwiązał problemu w sposób ścisły stosując metodę kolejnych przybliżeń.

Wychodząc z uproszczonego równania filtracji (odpowiadającego w istocie ośrodkowi nieściśliwemu) i nie analizując precyzyjnie procesu zbieżności uzyskał on z założenia taki charakter osobliwości rozwiązania, jaki został podyktowany metodą rozwiązania.

W pracy niniejszej rozważamy osiowo-symetryczny stan odkształcenia porowatego ośrodka lepko-sprężystego, wywołany działaniem siły skupionej przyłożonej do brzegu. Na gruncie trójwymiarowej (sprężonej) teorii konsolidacji Biota konstruujemy ściśle rozwiązanie przy możliwie ogólnych założeniach o własnościach reologicznych szkieletu. Szczegółowo przeanalizujemy problem warunków początkowych. Rozwiązanie podamy zarówno dla brzegu przepuszczalnego jak i nieprzepuszczalnego dla cieczy.

2. ZESTAW RÓWNAŃ KONSOLIDUJĄCEGO OŚRODKA LEPKO-SPRĘŻYSTEGO

Rozważać będziemy dwufazowy, porowaty ośrodek odkształcalny złożony z izotropowego, jednorodnego i lepko-sprężystego szkieletu oraz cieczy przesączającej się przez pory zgodnie z prawem Darcy'ego. O materiale szkieletu zakładamy, że posiada własności reologiczne zgodne z zasadą dziedziczności Boltzmanna bez starzenia z różnymi jądrami pełzania w procesie odkształcenia postaciowego, objętościowego oraz wywołanego ciśnieniem hydrostatycznym cieczy w porach. Taki model materiału prowadzi z jednej strony do możliwie najogólniejszego opisu liniowego, lepko-sprężystego ośrodka porowatego nasyconego cieczą, z drugiej zaś stosownie do prac ZARECKIEGO [18] i badań MESTCHIANA [11] ujmuje szeroką klasę gruntów gliniastych, w których stwierdzono różne cechy pełzania objętościowego w procesie ściskania i rozciągania. Scharakteryzowany wyżej materiał będzie zatem opisany następującymi równaniami konstytutywnymi:

prawem zmiany postaci szkieletu

$$(2.1) \quad e_{ij}^s = \frac{s_{ij}}{2N},$$

prawem zmiany objętości szkieletu

$$(2.2) \quad e^s = \frac{s}{A_p}$$

oraz prawem zmiany objętości wywołanej ciśnieniem cieczy

$$(2.3) \quad e^p = \frac{s^p}{A_p}.$$

We wzorach wprowadzono następujące oznaczenia: e_{ij}^s oznacza składowe dewiatora odkształceń szkieletu, e^s składowe aksjatora odkształceń szkieletu, e^p składowe aksjatora odkształceń wywołane ciśnieniem cieczy, s_{ij} składowe dewiatora naprężeń, $\sigma_{kk} = s$ aksjator naprężeń, $s^p = 3p$ aksjator naprężeń wywołany ciśnieniem cieczy oraz p ciśnienie hydrostatyczne cieczy w porach.

Wielkości N , A_v , A_p są odpowiednimi operatorami całkowymi Voltery drugiego rodzaju postaci

$$(2.4) \quad \begin{aligned} N^{-1} &= \frac{1}{\mu} \left[1 + \int_0^t K(t-\tau) \dots d\tau \right], \\ A_v^{-1} &= \frac{1}{\alpha_v} \left[1 + \int_0^t K_v(t-\tau) \dots d\tau \right], \\ A_p^{-1} &= \frac{1}{\alpha_p} \left[1 + \int_0^t K_p(t-\tau) \dots d\tau \right], \end{aligned}$$

gdzie μ , α_v , α_p są to odpowiednio moduły odkształcenia postaciowego, objętościowego i wywołanego ciśnieniem cieczy oraz $K(t-\tau)$, $K_v(t-\tau)$, $K_p(t-\tau)$ jądra pełzania postaciowego, objętościowego i wywołanego ciśnieniem cieczy.

Ponieważ ciecz nie przenosi naprężeń stycznych, związek (2.1) jest zarazem prawem zmiany postaci dla całego ośrodka dwufazowego. Dodając (2.2) i (2.3) otrzymamy związek charakteryzujący całkowite (dla ośrodka dwufazowego) prawo zmiany objętości:

$$(2.5) \quad \varepsilon = \varepsilon_{kk} = e^s + e^p = \frac{s}{A_v} + \frac{3p}{A_p}.$$

Łącząc (2.1) z (2.5) według wzoru $\varepsilon_{ij} = e_{ij}^s + \frac{\delta_{ij}}{3} \varepsilon$ otrzymujemy podstawowe równanie konstytutywne dla rozważanego ośrodka dwufazowego:

$$(2.6) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2N} + \frac{\delta_{ij}}{3} \left(\frac{1}{A_v} - \frac{1}{2N} \right) \sigma_{kk} + \delta_{ij} \frac{p}{A_p},$$

które często dogodniej przedstawić w formie rozwiązanej ze względu na naprężenia:

$$(2.7) \quad \sigma_{ij} = 2N\varepsilon_{ij} + \delta_{ij} M\varepsilon_{kk} - \delta_{ij} A_p p.$$

Wprowadzono tu następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} N &= \mu \left[1 - \int_0^t R(t-\tau) \dots d\tau \right], & M &= \frac{1}{3} (A_v - 2N), \\ A_v &= \alpha_v \left[1 - \int_0^t R_v(t-\tau) \dots d\tau \right], & A &= A_v A_p^{-1}, \end{aligned}$$

gdzie $R(t-\tau)$ oraz $R_v(t-\tau)$ są rezolwentami odpowiednich jąder $K(t-\tau)$ oraz $K_v(t-\tau)$.

Równanie (2.7) (lub (2.6)) jest najogólniejszym opisem liniowego, lepko-sprężystego materiału porowatego nasyconego cieczą. Obejmuje ono również wszystkie różniczkowe modele reologiczne. W szczególności, gdy

$$K_v = K_p = 0, \quad K(t-\tau) = \delta e^{-\gamma(t-\tau)},$$

otrzymujemy model standartowy, gdy $K_v = K_p = 0$, $K = \delta = \text{const}$ — model Maxwella rozważany w pracy FREUDENTHALA i SPILLERSA [4], a gdy $K = K_v = K_p = 0$ — klasyczny ośrodek o szkielecie sprężystym szeroko traktowany w pracach BIOTA [1 i 2].

Do wyprowadzonych zależności fizycznych dołączamy ponadto równania równowagi

$$(2.8) \quad \sigma_{ij,j} = 0,$$

równania geometryczne

$$(2.9) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

oraz równanie filtracji

$$(2.10) \quad \frac{k}{\gamma} \Delta p = \frac{3n}{\alpha_w} \dot{p} + \dot{\varepsilon}.$$

W równaniach tych u_i oznacza współrzędne wektora przemieszczenia, n porowatość, k współczynnik filtracji, γ ciężar objętościowy cieczy, α_w moduł ściśliwości cieczy, Δ operator Laplace'a oraz $(\dot{}) = \frac{\partial}{\partial t}$.

Równania (2.7)–(2.10) stanowią pełny układ równań teorii konsolidacji dla ośrodka o szkielecie lepkosprężystym.

W zastosowaniach, zwłaszcza dla wyznaczenia osiadań podłoża, najwygodniej posłużyć się układem równań przemieszczeniowych

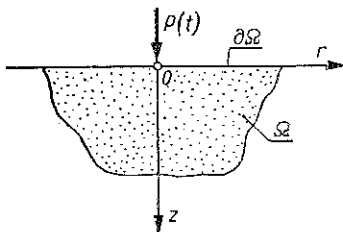
$$(2.11) \quad N \Delta u_i + (N+M) \varepsilon_{,i} - A p_{,i} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

otrzymanych w znany sposób przez podstawienie (2.9) do równań (2.7), a tych z kolei do (2.8).

3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

W walcowym układzie współrzędnych r, φ, z rozpatrujemy półprzestrzeń $z \geq 0$, której gładki brzeg obciążony jest normalną siłą skupioną $P(t)$ (rys. 1). Podstawę rozważań stanowią będą równania (2.10) i (2.11), które w rozpatrywanym przez

nas przypadku osiowej symetrii przybiorą postać



Rys. 1

$$(3.1) \quad \begin{aligned} N \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} \right) + (N+M) \varepsilon_{,r} &= A p_{,r}, \\ N \Delta w + (N+M) \varepsilon_{,z} &= A p_{,z}, \end{aligned}$$

$$\frac{k}{\gamma} \Delta p = \frac{3n}{\alpha_w} \dot{p} + \dot{\varepsilon},$$

gdzie

$$\varepsilon = u_{,r} + \frac{u}{r} + w_{,z}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

oraz gdzie u oznacza przemieszczenie radialne, a w przemieszczenie pionowe.

Równania (3.1) tworzą układ równań różniczkowo-całkowych z trzema niewiadomymi funkcjami u , w , p . Dla pełnego, poprawnego sformułowania problemu należy postawić stosowne warunki brzegowe i początkowe. O ile sprecyzowanie warunków brzegowych jest dla konkretnych typów obciążenia sprawą oczywistą, o tyle formułowanie warunków początkowych było, jak to już podkreślono we wstępie, przyczyną wielu usterek i nieporozumień. W związku z tym problem ten omówimy nieco szerzej.

Warunki brzegowe w rozważanym przez nas przypadku będą następujące:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{rz}(r, 0, t) &= 0, \\ \sigma_z(r, 0, t) &= P\delta(r)T(t) \end{aligned}$$

oraz dla brzegu przepuszczalnego

$$p(r, 0, t) = 0$$

i dla brzegu nieprzepuszczalnego

$$\left[\frac{\partial p(r, z, t)}{\partial z} \right]_{z=0} = 0.$$

Ponadto żądamy spełnienia następujących warunków w nieskończoności:

$$(3.3) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} (\sigma_{rz}, \sigma_z, p) = 0,$$

gdzie $R = \sqrt{z^2 + r^2}$.

Niech warunki początkowe mają postać

$$(3.4) \quad \begin{aligned} u(r, z, 0) &= u_0(r, z), \\ w(r, z, 0) &= w_0(r, z), \\ p(r, z, 0) &= p_0(r, z). \end{aligned}$$

Zauważmy na wstępie, że układ (3.1) nie jest normalny [12] względem operatora $\partial/\partial t$, tj. wyznacznik macierzy utworzonej ze współczynników przy pochodnych najwyższego rzędu względem t wektora (u, w, p) jest równy zero. W takim przypadku funkcje u_0, w_0, p_0 , występujące w (3.4), nie mogą być dowolne, lecz muszą spełniać tzw. warunki zgodności [12]. Otrzymamy je z układu (3.1) przechodząc do granicy $t \rightarrow 0$.

Wykonując omawiane przejście graniczne w dwóch pierwszych równaniach układu i uwzględniając przy tym postać operatorów (2.4) i (2.7) dostaniemy

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \mu \left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) u(r, z, 0) + (\mu + \lambda) \varepsilon_{,r}(r, z, 0) &= \alpha p_{,r}(r, z, 0), \\ \mu \Delta w(r, z, 0) + (\mu + \lambda) \varepsilon_{,z}(r, z, 0) &= \alpha p_{,z}(r, z, 0), \end{aligned}$$

gdzie

$$\lambda = \frac{1}{3} (\alpha_v - 2\mu), \quad \alpha = \frac{\alpha_v}{\alpha_p}.$$

Wykorzystując warunki (3.4) znajdziemy więc

$$(3.6) \quad \mu \left(A - \frac{1}{r^2} \right) u_0 + (\mu + \lambda) (u_{0,rr} + w_{0,rz}) = \alpha p_{0,r},$$

$$\mu A w_0 + (\mu + \lambda) (u_{0,rz} + w_{0,zz}) = \alpha p_{0,z}.$$

Są to właśnie poszukiwane warunki zgodności. Jak widać, trzy funkcje u_0, w_0, p_0 związane są dwoma równaniami, stąd tylko jedna z nich może być dowolna. Układ (3.6) wymaga z kolei określenia odpowiednich warunków brzegowych. Otrzymamy je ze związków (3.2) przechodząc do granicy $t \rightarrow 0$. Uwzględniając równania fizyczne

$$\sigma_z = 2N\varepsilon_z + M\varepsilon - Ap, \quad \sigma_{rz} = 2N\varepsilon_{rz},$$

znajdziemy dla $z=0$

$$(3.7) \quad 2\mu (u_{0,z} + w_{0,r}) = 0,$$

$$2\mu w_{0,z} + \lambda (u_{0,r} + w_{0,z}) - \alpha p_0 = P\delta(r)T(0)$$

oraz dla brzegu przepuszczalnego

$$p_0 = 0,$$

a dla brzegu nieprzepuszczalnego

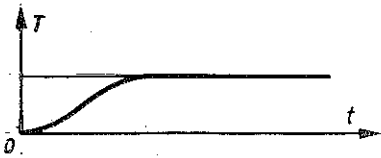
$$p_{0,z} = 0.$$

W chwili początkowej funkcje u_0, w_0, p_0 określone warunkami (3.4) muszą zatem spełniać układ (3.6) przy warunkach brzegowych (3.7).

W dalszym ciągu zajmiemy się przypadkiem obciążenia wzrastającego w czasie w sposób ciągły od 0 do wartości skończonej. Funkcja $T(t)$ będzie więc kształtu przedstawionego na rys. 2. Wówczas $T(0) = 0$. Układ (3.6) przy warunkach (3.7) ma rozwiązanie trywialne:

$$(3.8) \quad u_0 = w_0 = p_0 = 0.$$

Takie jednorodne warunki początkowe przyjmujemy więc w dalszym toku pracy.



Rys. 2

4. OGÓLNE ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Do rozwiązania układu (3.1) zastosujemy transformację całkową Hankela względem zmiennej r oraz Laplace'a względem t . Wykorzystując znane wzory dla funkcji Bessela, postać operatorów N, M, A , twierdzenie o splocie dla transformacji Laplace'a oraz warunki początkowe (3.8), otrzymamy

$$(4.1) \quad \bar{N} \left(\frac{d^2}{dz^2} - \omega^2 \right) \bar{u} + (\bar{N} + \bar{M}) (-\omega) \bar{\varepsilon} = -\omega \bar{A} \bar{p},$$

$$\bar{N} \left(\frac{d^2}{dz^2} - \omega^2 \right) \bar{w} + (\bar{N} + \bar{M}) \frac{d}{dz} \bar{\varepsilon} = \bar{A} \frac{d\bar{p}}{dz}, \quad \frac{k}{\gamma} \left(\frac{d^2}{dz^2} - \omega^2 \right) \bar{p} = \frac{3n}{\alpha_w} s \bar{p} + s \bar{\varepsilon},$$

gdzie

$$\begin{aligned}\bar{u}(\omega, z, s) &= \int_0^\infty \int_0^\infty u(r, z, t) r J_1(\omega r) e^{-st} dr dt, \\ \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}(\omega, z, s) \\ \bar{w}(\omega, z, s) \\ \bar{p}(\omega, z, s) \end{bmatrix} &= \int_0^\infty \int_0^\infty \begin{bmatrix} \varepsilon(r, z, t) \\ w(r, z, t) \\ p(r, z, t) \end{bmatrix} r J_0(\omega r) e^{-st} dr dt, \\ [\bar{N}, \bar{M}, \bar{A}] &= \int_0^\infty [N, M, A] e^{-st} dt.\end{aligned}$$

Przystępując do rozwiązania układu (4.1) wykonujemy następujące operacje: równanie (4.1)₁ mnożymy przez ω , a (4.1)₂ różniczkujemy względem z ; następnie tak przekształcone równania dodajemy do siebie; otrzymamy

$$(4.2) \quad (2\bar{N} + \bar{M}) \left(\frac{d^2}{dz^2} - \omega^2 \right) \bar{\varepsilon} = \bar{A} \left(\frac{d^2}{dz^2} - \omega^2 \right) \bar{p}.$$

Uwzględniając trzecie z równań (4.1), możemy wyznaczyć ciśnienie cieczy:

$$(4.3) \quad \left(\frac{d^2}{dz^2} - \omega^2 \right)^2 \bar{p} - s\bar{B} \left(\frac{d^2}{dz^2} - \omega^2 \right) \bar{p} = 0,$$

gdzie dla zwięzłości wprowadzono następujące oznaczenie:

$$\bar{B} = \frac{\gamma}{k} \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{2\bar{N} + \bar{M}} \right).$$

Rozwiązanie równania (4.3) przy uwzględnieniu (3.3) ma postać

$$(4.4) \quad \bar{p}(\omega, z, s) = C_1(\omega, s) e^{-\omega z} + C_2(\omega, s) e^{-mz},$$

gdzie

$$m^2 = \omega^2 + s\bar{B}.$$

Mając \bar{p} obliczamy $\bar{\varepsilon}$ z (4.1)₃ i podstawiamy do pozostałych dwóch równań układu (4.1). Otrzymamy

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dz^2} - \omega^2 \right) \bar{u} &= \frac{\bar{N} + \bar{M}}{\bar{N}s} \left[\frac{k}{\gamma} \left(\frac{d^2}{dz^2} - \omega^2 \right) - s \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{\bar{N} + \bar{M}} \right) \right] \omega \bar{p}, \\ \left(\frac{d^2}{dz^2} - \omega^2 \right) \bar{w} &= -\frac{\bar{N} + \bar{M}}{\bar{N}s} \left[\frac{k}{\gamma} \left(\frac{d^2}{dz^2} - \omega^2 \right) - s \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{\bar{N} + \bar{M}} \right) \right] \frac{d}{dz} \bar{p}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie powyższych równań po uwzględnieniu (4.4) jest następujące:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \bar{u} &= C_1 \frac{\bar{N} + \bar{M}}{2\bar{N}} \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{\bar{N} + \bar{M}} \right) z e^{-\omega z} - C_2 \frac{\bar{A}\omega}{s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})} e^{-mz} + C_3 e^{-\omega z}, \\ \bar{w} &= C_1 \frac{\bar{N} + \bar{M}}{2\bar{N}} \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{\bar{N} + \bar{M}} \right) z e^{-\omega z} - C_2 \frac{\bar{A}m}{s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})} e^{-mz} + C_4 e^{-\omega z}, \end{aligned}$$

$$C_i = C_i(\omega, s), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Dla naprężeń, po wykonaniu transformacji Hankela i Laplace'a na równaniach fizycznych i geometrycznych oraz po podstawieniu (4.6) dostaniemy

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_r &= C_1 \left[(\bar{N} + \bar{M}) \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{\bar{N} + \bar{M}} \right) z\omega + \frac{\bar{M}(\bar{N} + \bar{M})}{2\bar{N}} \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{\bar{N} + \bar{M}} \right) - \bar{A} \right] e^{-\omega z} - \\
 &\quad - C_2 \frac{2\bar{A}\bar{N}m^2}{s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})} e^{-mz} + C_3 (2\bar{N} + \bar{M}) \omega e^{-\omega z} - C_4 \bar{M} \omega e^{-\omega z}, \\
 (4.7) \quad \bar{\sigma}_z &= C_1 \left[-(\bar{N} + \bar{M}) \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{\bar{N} + \bar{M}} \right) \omega z + \frac{\bar{M}}{2\bar{N}} \bar{A} + \frac{3n(2\bar{N} + \bar{M})(\bar{N} + \bar{M})}{2\bar{N}} \right] \times \\
 &\quad \times e^{-\omega z} + C_2 \frac{2\bar{A}\bar{N}\omega^2}{s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})} e^{-mz} + C_3 \bar{M} \omega e^{-\omega z} - C_4 (2\bar{N} + \bar{M}) \omega e^{-\omega z}, \\
 \bar{\sigma}_{rz} &= C_1 (\bar{N} + \bar{M}) \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{\bar{N} + \bar{M}} \right) \frac{1 - \omega z}{2} e^{-\omega z} + C_2 \frac{2\bar{A}\bar{N}m\omega}{s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})} e^{-mz} - \\
 &\quad - C_3 \bar{N} \omega e^{-\omega z} - C_4 \bar{N} \omega e^{-\omega z}.
 \end{aligned}$$

We wzorach (4.6) i (4.7) występują cztery wyznaczone dotąd parametry C_1, C_2, C_3, C_4 , do wyznaczenia których potrzebne są przeto cztery równania. Trzy spośród nich dostarczą warunki brzegowe (3.2), czwarte otrzymamy po uwzględnieniu okoliczności, że w trakcie przekształcenia układu (4.1) podniesiony został rząd równania dla \bar{p} , [równanie (4.3)]. Rozwiązanie (4.4) musi więc spełniać równanie (4.1)₃. Stąd uzyskujemy poszukiwane równanie

$$(4.8) \quad 2\bar{N}\omega(C_3 - C_4) + \left[\frac{3n}{\alpha_w} (3\bar{N} + \bar{M}) + \bar{A} \right] C_1 = 0.$$

4.1. Brzeg przepuszczalny

Przystępując do uwzględnienia warunków brzegowych, rozważmy w pierwszej kolejności brzeg przepuszczalny. Do tego przypadku odnoszą się warunki (3.2)₁–(3.2)₃. Wykonując na nich transformację Laplace'a, znajdziemy

$$\begin{aligned}
 C_1 \left[\frac{\bar{M}}{2\bar{N}} \bar{A} + \frac{3n}{\alpha_w} \frac{(2\bar{N} + \bar{M})(\bar{N} + \bar{M})}{2\bar{N}} \right] + C_2 \frac{2\bar{A}\bar{N}\omega^2}{s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})} + \\
 + C_3 \bar{M}\omega - C_4 (2\bar{N} + \bar{M})\omega = P\bar{T}(s), \\
 (4.9) \quad C_1 (\bar{N} + \bar{M}) \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{\bar{N} + \bar{M}} \right) + C_2 \frac{4\bar{A}\bar{N}m\omega}{s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})} - C_3 2\bar{N}\omega - C_4 2\bar{N}\omega = 0, \\
 C_1 + C_2 = 0.
 \end{aligned}$$

Rozwiązując układ (4.8), (4.9) otrzymamy

$$(4.10) \quad \begin{aligned} C_1 &= \frac{P\bar{T}(s)}{M_p(\omega, s)}, & C_2 &= -\frac{P\bar{T}(s)}{M_p(\omega, s)}, \\ C_3 &= \frac{\frac{3n}{2\alpha_w} \frac{\bar{A}m\omega}{s\bar{B}(2\bar{N}+\bar{M})} P\bar{T}(s)}{M_p(\omega, s) \omega}, \\ C_4 &= \frac{\frac{3n}{\alpha_w} \frac{2\bar{N}+\bar{M}}{2\bar{N}} + \frac{\bar{A}}{2\bar{N}} - \frac{\bar{A}m\omega}{s\bar{B}(2\bar{N}+\bar{M})} P\bar{T}(s)}{M_p(\omega, s) \omega}, \end{aligned}$$

gdzie

$$M_p(\omega, s) = -\frac{3n}{\alpha_w}(\bar{N}+\bar{M}) - \bar{A} + \frac{2\bar{A}\bar{N}\omega(m-\omega)}{s\bar{B}(2\bar{N}+\bar{M})},$$

a $\bar{T}(s)$ oznacza transformatę Laplace'a funkcji $T(t)$.

Podstawiając wyznaczone stałe (4.10) do wzorów (4.6) i (4.7), a następnie dokonując transformacji odwrotnej, znajdujemy ogólne, całkowe rozwiązanie problemu.

W dalszym ciągu zajmiemy się przemieszczeniem powierzchni półprzestrzeni. Ze wzoru (4.6)₂ mamy wówczas dla $z=0$

$$(4.11) \quad \bar{w}(\omega, 0, s) = C_4(\omega, s) - C_2(\omega, s) \frac{\bar{A}m}{s\bar{B}(2\bar{N}+\bar{M})}.$$

Po uwzględnieniu (4.10) i prostych przekształceniach otrzymamy transformatę przemieszczenia dla brzegu przepuszczalnego:

$$(4.12) \quad \bar{w}(\omega, 0, s) = \frac{sA_1(s)}{sA_2(s) + A_3\omega(m-\omega)} \frac{P\bar{T}(s)}{\omega},$$

gdzie wprowadzono oznaczenia następujące:

$$\begin{aligned} A_1(s) &= \frac{3n}{\alpha_w} \frac{2\bar{N}+\bar{M}}{2\bar{N}} + \frac{\bar{A}}{2\bar{N}}, \\ A_2(s) &= -\frac{3n}{\alpha_w}(\bar{N}+\bar{M}) - \bar{A}, & A_3(s) &= \frac{2\bar{A}\bar{N}}{\bar{B}(2\bar{N}+\bar{M})}. \end{aligned}$$

Po wykonaniu transformacji odwrotnych znajdziemy:

$$(4.13) \quad w(r, 0, t) = \frac{P}{2\pi i} \int_L \int_0^\infty \frac{sA_1(s) \bar{T}(s) e^{st}}{sA_2(s) + A_3(s)\omega(m-\omega)} J_0(\omega r) d\omega ds.$$

Obliczymy najpierw całkę wewnętrzną

$$(4.14) \quad R(r, s) = \int_0^\infty \frac{sA_1 \bar{T}(s)}{sA_2 + A_3\omega(m-\omega)} J_0(\omega r) d\omega,$$

$$A_i = A_i(s), \quad i=1, 2, 3.$$

Mnożąc i dzieląc wyrażenie podcałkowe przez $(sA_2 - A_3 \omega^2 - A_3 m\omega)$, otrzymamy po żmudnych lecz prostych przekształceniach wzór

$$\begin{aligned}
 R(r, s) = & \frac{A_1 \bar{T}(s)}{2A_2 + A_3 \bar{B}} \int_0^\infty J_0(\omega r) d\omega - \\
 & - \frac{A_1 A_2 (A_2 + A_3 \bar{B}) \bar{T}(s)}{2A_2 + A_3 \bar{B}} \int_0^\infty \frac{sJ_0(\omega r) d\omega}{A_3 (2A_2 + A_3 \bar{B}) \omega^2 - sA_2^2} + \\
 & + \frac{A_1 \bar{T}(s)}{2A_2 + A_3 \bar{B}} \int_0^\infty \frac{\omega J_0(\omega r)}{\sqrt{\omega^2 + s\bar{B}}} d\omega + \\
 & + \frac{A_1 (A_2 + A_3 \bar{B})^2 \bar{T}(s)}{2A_2 + A_3 \bar{B}} \int_0^\infty \frac{\omega}{m} \frac{sJ_0(\omega r) d\omega}{A_3 (2A_2 + A_3 \bar{B}) \omega^2 - sA_2^2}.
 \end{aligned}$$

Oznaczając dla zwięzłości wyrażenia przed całkami odpowiednio przez

$$\begin{aligned}
 T_1(s) &= \frac{A_1 \bar{T}(s)}{2A_2 + A_3 \bar{B}}, & T_2(s) &= T_1(s), \\
 T_3(s) &= \frac{-A_1 A_2 (A_2 + A_3 \bar{B}) \bar{T}(s)}{2A_2 + A_3 \bar{B}}, \\
 T_4(s) &= \frac{A_1 (A_2 + A_3 \bar{B})^2 \bar{T}(s)}{2A_2 + A_3 \bar{B}},
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

same zaś całki przez

$$\begin{aligned}
 R_1(r, s) &= \int_0^\infty J_0(\omega r) d\omega, \\
 R_2(r, s) &= \int_0^\infty \frac{\omega J_0(\omega r)}{\sqrt{\omega^2 + s\bar{B}}} d\omega, \\
 R_3(r, s) &= \int_0^\infty \frac{sJ_0(\omega r)}{A_3 (2A_2 + A_3 \bar{B}) \omega^2 - sA_2^2} d\omega, \\
 R_4(r, s) &= \int_0^\infty \frac{sJ_0(\omega r)}{A_3 (2A_2 + A_3 \bar{B}) \omega^2 - sA_2^2} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + s\bar{B}}} d\omega,
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

przedstawimy całkę (4.14) w postaci

$$R(r, s) = \sum_{i=1}^4 T_i(s) R_i(r, s).$$

Dwie pierwsze całki (4.16) można obliczyć w postaci zamkniętej:

$$R_1(r, s) = \frac{1}{r}, \quad R_2(r, s) = \frac{1}{r} e^{-\sqrt{s\bar{B}}r},$$

pozostałe tylko numerycznie.

Mamy więc ostatecznie na (4.14) następujący wzór:

$$(4.17) \quad R(r, s) = \frac{T_1(s)}{r} (1 + e^{-\sqrt{s\bar{B}}r}) + T_3(s) R_3(r, s) + T_4(s) R_4(r, s).$$

Wracając do (4.13) otrzymamy

$$(4.18) \quad w(r, 0, t) = \frac{P}{2\pi i} \int_L R(r, s) e^{st} ds = \frac{P}{r} \frac{1}{2\pi i} \int_L T_1(s) e^{st} ds + \\ + \frac{P}{r} \frac{1}{2\pi i} \int_L T_2(s) e^{-\sqrt{s\bar{B}}r} e^{st} ds + \frac{P}{2\pi i} \int_L T_3(s) R_3(r, s) e^{st} ds + \\ + \frac{P}{2\pi i} \int_L T_4(s) R_4(r, s) e^{st} ds.$$

W ogólności dla dowolnego szkieletu reologicznego całki (4.18) są nieelementarne i nie można ich przedstawić w postaci zamkniętej. Można jednak efektywnie i bez trudu wyznaczyć ich wartości opierając się na jednej z wielu przybliżonych metod odwracania transformacji Laplace'a. W pracy niniejszej skorzystamy z efektywnej i z powodzeniem wielokrotnie przez nas wypróbowanej [15, 16 i 17] metody przybliżeń interpolacyjnych KRYŁOWA [7]. Nad tym zagadnieniem zatrzymamy się krótko w dalszym fragmencie pracy.

4.2. Brzeg nieprzepuszczalny

Z kolei przystąpimy do wyznaczenia osiadania powierzchni półprzestrzeni lecz dla brzegu nieprzepuszczalnego. Wykorzystamy wtedy warunki brzegowe (3.2)_{1, 2, 4}. Poprawne pozostaną więc równania (4.9)_{1, 2}, jedynie równanie (4.9)₃ zastąpić należy równaniem

$$(4.19) \quad \omega C_1(\omega, s) + m C_2(\omega, s) = 0.$$

Ponadto poprawne pozostaje równanie (4.8). Rozwiązując więc układ (4.8), (4.9)_{1, 2}, (4.19), otrzymamy następujące wartości parametrów:

$$(4.20) \quad C_1(\omega, s) = \frac{P\bar{T}(s)}{M_i(\omega, s)}, \quad C_2(\omega, s) = -\frac{\omega}{m} \frac{P\bar{T}(s)}{M_i(\omega, s)}, \\ C_3(\omega, s) = \frac{\frac{3n}{2\alpha_w} \frac{\bar{A}\omega^2}{s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})}}{M_i(\omega, s)} \frac{P\bar{T}(s)}{\omega}, \\ C_4(\omega, s) = \frac{\frac{3n}{\alpha_w} \frac{2\bar{N} + \bar{M}}{2\bar{N}} + \frac{\bar{A}}{s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})} \frac{\bar{A}\omega^2}{(s)\omega}}{M_i(\omega, s)} \frac{P\bar{T}(s)}{(s)\omega},$$

gdzie

$$M_1(\omega, s) = -\frac{3n}{\alpha_w} (\bar{N} + \bar{M}) - \bar{A} + \frac{2\bar{A}\bar{N} \frac{\omega^2}{m} (m - \omega)}{s\bar{B} (2\bar{N} + \bar{M})}.$$

Dla powierzchni $z=0$ otrzymujemy zatem

$$\bar{w}(\omega, 0, s) = C_4(\omega, s) - C_2(\omega, s) \frac{\bar{A}m}{s\bar{B} (2\bar{N} + \bar{M})}.$$

Uwzględniając (4.20) znajdziemy

$$(4.21) \quad \bar{w}(\omega, 0, s) = \frac{s A_1(s)}{s A_2(s) + A_3(s)} \frac{\frac{\omega^2}{m} (m - \omega)}{\frac{P\bar{T}(s)}{\omega}}.$$

Podobnie jak poprzednio dla brzegu przepuszczalnego również i teraz dla obliczenia transformacji odwrotnej

$$(4.22) \quad w(r, 0, t) = \frac{P}{2\pi i} \int_L \int_0^\infty \frac{s A_1(s) \bar{T}(s) e^{st}}{s A_2(s) + A_3(s)} \frac{\omega^2}{m} (m - \omega) J_0(\omega r) d\omega ds,$$

dokonyamy szeregu przekształceń całki

$$(4.23) \quad R(r, s) = \int_0^\infty \frac{s A_1(s) \bar{T}(s)}{s A_2(s) + A_3(s)} \frac{\omega^2}{m} (m - \omega) J_0(\omega r) d\omega,$$

uzyskując po serii długich, lecz prostych operacji wzór

$$(4.24) \quad R(r, s) = \frac{T_1(s)}{r} (1 + e^{-\sqrt{sB}r}) + \sum_{i=2}^5 T_i(s) R_i(r, s),$$

gdzie

$$(4.25) \quad \begin{aligned} T_1(s) &= \frac{A_1 \bar{T}(s)}{2A_2 + A_3 \bar{B}}, & T_2(s) &= \frac{A_1 (A_2^2 + A_2 A_3 \bar{B} + A_3^2 \bar{B}^2) \bar{T}(s)}{2A_2 + A_3 \bar{B}}, \\ T_3(s) &= -\frac{A_1 (A_2^2 - A_3^2 \bar{B}^2) \bar{T}(s)}{2A_2 + A_3 \bar{B}}, \\ T_4(s) &= \frac{A_1 A_2 (A_2 + A_3 \bar{B}) \bar{B} \bar{T}(s)}{2A_2 + A_3 \bar{B}}, & T_5(s) &= -\frac{A_1 A_2^2 \bar{B} \bar{T}(s)}{2A_2 + A_3 \bar{B}}, \end{aligned}$$

$$R_2(r, s) = \int_0^\infty \frac{s\omega^2}{L(\omega, s)} J_0(\omega r) d\omega,$$

$$R_3(r, s) = \int_0^\infty \frac{s\omega^2}{L(\omega, s)} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + s\bar{B}}} J_0(\omega r) d\omega,$$

$$(4.25) \quad R_4(r, s) = \int_0^{\infty} \frac{s^2}{L(\omega, s)} J_0(\omega r) d\omega,$$

[c.d.1]

$$R_5(r, s) = \int_0^{\infty} \frac{s^2}{L(\omega, s)} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + s\bar{B}}} J_0(\omega r) d\omega,$$

$$L(\omega, s) = A_3(2A_2 + A_3\bar{B})\omega + sA_2(A_2 + 2A_3\bar{B})\omega^2 + s^2 A_2^2 \bar{B}.$$

Dzięki temu, jak widać, udało się ściśle i wyraźnie wyodrębnić część osobliwą całki (4.23); pozostałe funkcje R_i , $i=2, 3, 4, 5$, dadzą się obliczać tylko w sposób przybliżony. Odwracając transformację Laplace'a dostaniemy przemieszczenia:

$$(4.26) \quad w(r, 0, t) = \frac{P}{r} \frac{1}{2\pi i} \int_L (1 + e^{-\sqrt{s\bar{B}}r}) T_1(s) e^{st} ds + \sum_{n=2}^5 \frac{P}{2\pi i} \int_L T_n(s) R_n(r, s) e^{st} ds.$$

5. OBLICZENIE RETRANSFORMAT HANKELA I LAPLACE'A

Jak wynika z wyprowadzonych wzorów (4.18), dla osiadania brzegu przepuszczalnego oraz (4.26) dla brzegu nieprzepuszczalnego, tylko część transformaty Hankela udaje się wyznaczyć w postaci zamkniętej (co prawda część bardzo istotna, bo wywołująca osobliwość rozwiązania); wszystkie pozostałe wyrazy R_i mogą być scałkowane tylko w sposób przybliżony. Również odwrócenia transformacji Laplace'a w ogólności, jak to widać z postaci wyrażeń $T_i(s)$ oraz $R_i(r, s)$, nie można przedstawić elementarnie. Zachodzi więc potrzeba podania efektywnego sposobu wyznaczenia transformacji odwrotnych, aby wyznaczenie funkcji było nie tylko formalne, ale również praktyczne.

Poniżej omówimy krótko sposób obliczenia potrzebnych retransformat wzorując się na pracach KRYŁOWA [6 i 7]. Zaczniemy od retransformacji Hankela. Należy zatem obliczyć całki typu

$$(5.1) \quad H(r, s) = \int_0^{\infty} f(\omega, s) J_0(\omega r) d\omega,$$

gdzie funkcja podcałkowa $f(\omega, s)$ jest ciągła ze względu na każdą ze swych zmiennych, ciągła ze względu na obydwie zmienne równocześnie oraz ograniczona w całym obszarze określoności. Ponadto ma ona własność

$$(5.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |f(\omega, s) (1 + \omega)^n| < C < \infty$$

dla każdego s .

Wykładnik n dla odpowiednich całek przyjmuje wartości 2, 3, 4. Mnożąc i dzieląc wyrażenie podcałkowe (5.1) przez $(1 + \omega)^{n+\frac{1}{2}}$ oraz wprowadzając oznaczenie

$$(5.3) \quad F(\omega, r, s) = f(\omega, s) J_0(\omega, r) (1 + \omega)^{n+\frac{1}{2}},$$

możemy całkę (5.1) przedstawić w postaci

$$(5.4) \quad H(r, s) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{\infty} F(\omega, r, s) \frac{\cos \omega \rho}{(1 + \omega)^{n + \frac{1}{2}}} d\omega.$$

Funkcja (5.3) jest ciągła w punkcie $(0, 0, 0)$ i ograniczona, gdy $\omega \rightarrow \infty$. Wynika to z własności (5.2) oraz postaci rozwinięcia asymptotycznego funkcji Bessela [8]. Można zatem całkę w (5.4) traktować jako transformatę Fouriera i do jej obliczenia zastosować metodę KRYŁOWA [6]. Należy więc obliczyć retransformatę Fouriera, a następnie zastosować przejście graniczne $\rho \rightarrow 0$. Dzięki temu przeniesiemy skuteczny sposób przybliżeń interpolacyjnych dla całek Fouriera [6] na całki Hankela.

Będzie wówczas

$$(5.5) \quad H(r, s) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{p-1} F(\omega_k, r, s) \sum_{l=0}^{p-1} A_{kl} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega \rho d\omega}{(1 + \omega)^{n + \frac{1}{2} + l}},$$

gdzie ω_k oznacza węzły interpolacji, p liczbę węzłów interpolacji oraz A_{kl} współczynniki uogólnionego wielomianu interpolacyjnego. Wartości ω_k i A_{kl} dla konkretnego n podano w tablicach [6]. Całki w (5.5) są jednostajnie zbieżne, można więc dokonać przejścia do granicy pod znakiem całki; będzie zatem

$$(5.6) \quad H(r, s) = \sum_{k=0}^{p-1} F(\omega_k, r, s) \sum_{l=0}^{p-1} A_{kl} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(1 + \omega)^{n + \frac{1}{2} + l}} = \sum_{k=0}^{p-1} F(\omega_k, r, s) \sum_{l=0}^{p-1} \frac{A_{kl}}{n - \frac{1}{2} + l}.$$

Dla przykładu całka $R_3(r, s)$ [wzór (4.16)] będzie miała wartość

$$R_3(r, s) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{J_0(\omega_k r) (1 + \omega_k)^{\frac{5}{2}}}{A_3 (2A_2 + A_3 \bar{B}) \omega_k^2 - s A_2^2} \sum_{l=0}^{p-1} \frac{A_{kl}}{5 - l}.$$

Postępując wg (5.6) wyznaczymy wszystkie retransformaty Hankela, występujące we wzorach (4.17) i (4.24).

Przystąpimy z kolei do odwrócenia transformacji Laplace'a. Ograniczymy się do rozważenia jąder operatorów całkowych (2.4) w postaci

$$(5.7) \quad \begin{aligned} K(t - \tau) &= \delta_1 e^{-\gamma_1(t - \tau)}, \\ K_v(t - \tau) &= \delta_2 e^{-\gamma_2(t - \tau)}, \\ K_p(t - \tau) &= \delta_3 e^{-\gamma_3(t - \tau)}. \end{aligned}$$

Jądra tej postaci opisują dostatecznie szeroką klasę materiałów (np. dla $\delta_2 = \delta_3 = 0$ otrzymujemy stąd znany model standardowy). Transformaty Laplace'a operatorów (2.4) i (2.7) mają postać następującą:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{N}} &= \frac{1}{\mu} \frac{s + \gamma_1 + \delta_1}{s + \gamma_1}, & \bar{N} &= \mu \frac{s + \gamma_1}{s + \gamma_1 + \delta_1}, \\ \frac{1}{\bar{A}_v} &= \frac{1}{\alpha_v} \frac{s + \gamma_2 + \delta_2}{s + \gamma_2}, & \bar{A}_v &= \alpha_v \frac{s + \gamma_2}{s + \gamma_2 + \delta_2}, \\ \frac{1}{\bar{A}_p} &= \frac{1}{\alpha_p} \frac{s + \gamma_3 + \delta_3}{s + \gamma_3}, & \bar{A}_p &= \alpha_p \frac{s + \gamma_3}{s + \gamma_3 + \delta_3}. \end{aligned}$$

Wyrażenia $A_i(s)$ ze wzoru (4.12) będą więc miały budowę

$$(5.8) \quad A_i(s) = \frac{\sum_{k=0}^i a_k^i s^k}{\sum_{k=0}^i b_k^i s^k}, \quad i=1, 2, 3.$$

Do obliczenia mamy zatem całki typu

$$(5.9) \quad I(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L g(r, s) e^{st} ds,$$

gdzie $g(r, s)$ jest funkcją analityczną w półpłaszczyźnie $\text{Re } s \geq a$ oraz

$$(5.10) \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty} |g(r, s) s^\alpha| < C < \infty, \quad \alpha > 0.$$

Możemy zatem do obliczenia całek (5.9) zastosować metodę KRYŁOWA [7]. W tym celu wyrażenie podcałkowe (5.9) mnożymy i dzielimy przez s^α z tak dobranym wykładnikiem α , aby spełniony był warunek (5.10). Dokonując zmiany zmiennej $\lambda = st$, otrzymamy

$$I(r, t) = \frac{1}{2\pi i} t^{\alpha-1} \int_L G\left(r, \frac{\lambda}{t}\right) \frac{e^\lambda}{\lambda^\alpha} d\lambda,$$

gdzie

$$G\left(r, \frac{\lambda}{t}\right) = \left(\frac{\lambda}{t}\right)^\alpha g\left(r, \frac{\lambda}{t}\right).$$

Warunek (5.10) implikuje analityczność i ograniczoność (dla $|\lambda| \rightarrow \infty$) funkcji $G\left(r, \frac{\lambda}{t}\right)$. Na podstawie [7] otrzymamy więc w końcu:

$$(5.11) \quad I(r, t) = t^{\alpha-1} \sum_{k=1}^p A_k G\left(r, \frac{\lambda_k}{t}\right).$$

We wzorze tym wprowadzono oznaczenia: λ_k jest węzłem interpolacji oraz A_k współczynnikiem interpolacji. Podobnie jak we wzorze (5.6) węzły λ_k i współczynnik A_k odczytujemy z tablic [7] dla danego α .

6. ZAKOŃCZENIE

Przytoczone wywody i uzyskane wzory w pełni rozwiązują postawiony problem. Jak wykazano stan deformacji i naprężenia w konsolidującej półprzestrzeni o szkieletcie lepko-sprężystym można z powodzeniem efektywnie wyznaczyć, uzyskując ściśle rezultaty w transformatach. Chociaż te ostatnie mają dosyć złożoną budowę, można je bez trudu odwrócić korzystając z procedury nakreślonej wzorami (5.6) i (5.11). Dzięki temu możemy uzyskać nie tylko jakościową, ale i ilościową informację

o procesie konsolidacji. Otrzymane rezultaty upoważniają do sformułowania kilku zasługujących na uwagę wniosków.

1. Osiadanie powierzchni półprzestrzeni, wywołane działaniem siły skupionej, ma w warunkach konsolidacji osobliwość typu $1/r$ i to zarówno dla szkieletu sprężystego, jak i lepkosprężystego (dla najogólniejszego liniowego materiału bez starzenia). Jest to zatem osobliwość identyczna z rozwiązaniem Boussinesqua, a różnice są tylko ilościowe (w procesie konsolidacji rozwiązanie zależy istotnie od czasu).

2. Różnice pomiędzy rozwiązaniem dla brzegu przepuszczalnego i nieprzepuszczalnego są tylko ilościowe i dotyczą części regularnej rozwiązania.

3. W końcowej fazie procesu konsolidacji ($t \rightarrow \infty$) rozwiązanie zmierza asymptotycznie do rozwiązania lepkosprężystego (sprężystego).

4. Rozwiązanie zależy w sposób istotny od programu obciążenia [postaci funkcji $T(t)$].

Skonstruowane rozwiązanie [(4.18) dla brzegu przepuszczalnego i (4.26) dla brzegu nieprzepuszczalnego] stanowi zarazem funkcję Greena dla półprzestrzeni lepkosprężystej w zagadnieniu konsolidacji.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. A. BIOT, *General theory of three-dimensional consolidation*, J. Appl. Phys., **12**, 1941.
2. M. A. BIOT, *Consolidation settlement under a rectangular load distribution*, J. Appl. Phys., **12**, 1941.
3. W. DERSKI and I. KISIEL, *Initial conditions in the theory of consolidation* [in Polish], Arch. Hydrotechniki, **16**, 1, 1969.
4. A. M. FREUDENTHAL and U. R. SPILLERS, *Solution for the infinite layer and the half-space for quasi-static consolidating elastic and visco-elastic media*, J. Appl. Phys., **33**, 9, 1972.
5. Z. KOŃCZAK, *Axi-symmetrical problem of theory of consolidation in case of permeable edge* [in Polish], Rozp. Inżyn., **21**, 4, 1973.
6. V. I. KRYLOW and L. G. KRUGLIKOVA, *Handbook of numerical harmonic analysis* [in Russian], Izd. Nauka and Tekhnika, Mińsk 1968.
7. V. I. KRYLOW and N. S. SKOBLIA, *Handbook of numerical inversion of the Laplace transform* [in Russian], Izd. Nauka and Tekhnika, Mińsk 1968.
8. N. N. LEBEDEV, *Special functions and its applications* [in Polish], Warszawa 1957.
9. MC NAMEE and R. E. GIBSON, *The consolidation settlement of a load uniformly distributed over a rectangular area*, Proc. 4th ICOSOMEF, **1**, 1957.
10. MC NAMEE and R. E. GIBSON, *Plane strain and axially symmetric problems of the consolidation of a semi-infinite clay stratum*, Quart. J. Mech. Appl. Math., **13**, 1960.
11. S. R. MESTCHIAN, *Creep of clay soils* [in Russian], Izd. Ak. Nauk ASSR, Erevan 1967.
12. J. OSIOWSKI, *Operational calculus* [in Polish], NT, Warszawa 1972.
13. Z. SOBECZYŃSKA, *Settlement of a consolidating half-space under concentrated load action* [in Polish], Rozpr. Inżyn., **14**, 3, 1966.
14. Z. SOBECZYŃSKA, *Settlement of a consolidating half-space under concentrated load action in case of impermeable edge* (in Polish), Rozpr. Inżyn., **15**, 1, 1967.
15. G. SZEFER and J. GASZYŃSKI, *Consolidation of a visco-elastic half-space under axial-symmetrical load*, Studia Geotechnica, Wrocław 1974.

16. G. SZEFER and B. LECHOWICZ, *Consolidation of a visco-elastic half-space in a plane state of strain. I. Theoretical foundations*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **12**, 1973.
17. G. SZEFER and B. LECHOWICZ, *Consolidation of a visco-elastic half-space in a plane state of strain. II. Applications*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **12**, 1973.
18. JU. K. ZARETSKY, *Theory of soil consolidation* [in Russian], Moscow 1967.

Резюме

KONSOLIDACJA WIAZKO-UPRUGOGO POLUPRZESTRANSTWA NAGRUŻENNEGO
СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ

В работе дается решение для осе-симметричного деформационного состояния консолидирующегося вязко-упругого полупространства, вызванного действием сосредоточенной силы на границе. Реологические свойства скелета описаны разными ядрами ползучести формы, объемной ползучести и ползучести, вызванной действием жидкости в порах. Получены точные результаты в изображениях так для проницаемой, как и непроницаемой границы. Дается эффективный метод обращения изображений. Показано, что характер особенности решения отличается от случая однофазной среды (упругое полупространство) только количественно. Полученное решение составляет функция Грина для консолидирующегося полупространства.

SUMMARY

CONSOLIDATION OF VISCO-ELASTIC HALF-SPACE LOADED BY CONCENTRATED
FORCE

The solution for an axially-symmetric state of deformation of the consolidating visco-elastic half-space under action of the concentrated force on the boundary is presented. The rheological properties of the skeleton are described by different kernels of shear creep, volume creep and creep caused by the action of fluid in the pores. The exact solutions in a form of transforms for permeable as well as for non-permeable boundary are obtained. The effective method for reversal of transforms is given. It was shown that the form of solution singularity differs from the corresponding singularity of the single-phase medium (elastic half-space) only qualitatively. The solution obtained constitutes the Green function for the consolidating half-space.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 października 1974 r.
