

ANALIZA RÓWNANIA KONSTITUTYWNEGO CL NA PODSTAWIE BADAŃ DOŚWIADCZALNYCH FALI DOCIĄŻANIA

JANUSZ KLEPA CZKO (WARSZAWA)

Przedmiotem niniejszej pracy jest analiza równania konstytutywnego zaproponowanego przez Cristescu i Lublinera (nazwanego w skrócie CL) i odpowiadająca temu równaniu teoria propagacji sprężysto-plastycznych fal w prętach. Dyskusja równania CL została przeprowadzona na podstawie własnych wyników doświadczalnych pomiaru prędkości propagacji fali dociążania dla takich metali, jak aluminium, miedź i niskowęglowa stal. W pracy przeanalizowano również możliwość opisu zjawiska pełzania, relaksacji naprężeń i prób quasi-statycznych przy użyciu równania CL.

Rozwiązanie problemu propagacji sprężysto-plastycznej fali w półmieskończonym pręcie metodą charakterystyk umożliwia otrzymanie na podstawie wyników doświadczalnych kształtu funkcji materiałowej, która opisuje natychmiastową reakcję plastyczną badanego materiału. Stwierdzono na drodze pomiarów prędkości fali dociążania, że natychmiastowa reakcja plastyczna różni się znacznie pomiędzy stalą a aluminium i miedzią. Zaobserwowano także, że w pewnym zakresie wartości odkształceń dociążania jest ściśle spełniona teoria propagacji Sokołowskiego-Malverna. Zakres ten jest znacznie większy dla stali niż dla aluminium i miedzi.

1. RÓWNANIA KONSTITUTYWNE

Obserwacje doświadczalne dokonane przy badaniu fal dociążania w metalach, a w szczególności wyniki podane w pracach [4, 7], wydają się wskazywać, że istotną rolę odgrywają tu efekty historii prędkości odkształcenia (por. np. pracę [8]). Okazuje się, że badania propagacji i zachowania się fal dociążania stanowią skuteczną metodę weryfikacji danej teorii propagacji fal sprężysto-plastycznych w prętach. Na fakt ten zwrócono uwagę w pracach [1, 2 i 3]. Należy uznać, że dotychczas brak analizy umożliwiającej w miarę ściśle uwzględnienie wpływu wspomnianych efektów historii prędkości odkształcenia na kształt czoła fali dociążania.

Celem niniejszej pracy jest przeprowadzenie możliwie szerokiej analizy równania konstytutywnego Cristescu-Lublinera (zwanego dalej równaniem CL) i odpowiadającej temu równaniu teorii propagacji sprężysto-plastycznych fal w prętach. Dyskusja ta zostanie przeprowadzona na podstawie uprzednio uzyskanych wyników doświadczalnych propagacji fali dociążania dla kilku metali [7].

Równanie konstytutywne CL zostało zaproponowane przez CRISTESCU [6] oraz niezależnie przez LUBLINERA [14 i 15] i może być przedstawione w postaci

$$(1.1) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = f(\sigma, \varepsilon) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + g(\sigma, \varepsilon)$$

lub w odniesieniu do opisu zagadnień quasi-statycznych

$$(1.2) \quad \dot{\varepsilon} = f(\sigma, \varepsilon) \dot{\sigma} + g(\sigma, \varepsilon),$$

gdzie $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$, $\dot{\sigma} = d\sigma/dt$, a ponadto σ oznacza naprężenie, ε odkształcenie i t oznacza czas. Równanie konstytutywne w formie (1.1) zaproponowano również w pracy [19], jednak z pominięciem dokładnego rozważenia problemu falowego.

Innym możliwym zapisem równania CL jest następująca postać:

$$(1.3) \quad \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} = f_1(\sigma, \varepsilon) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + g(\sigma, \varepsilon),$$

gdzie ε_p oznacza składową odkształcenia plastycznego. O ile spełnione jest prawo Hooke'a i odkształcenie całkowite jest sumą dwóch składowych ε_p oraz $\varepsilon_e = \sigma/E$, to

$$(1.4) \quad \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t}.$$

Równania (1.4) i (1.1) prowadzą do równania

$$(1.5) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \left[\frac{1}{E} + f_1(\sigma, \varepsilon) \right] \frac{\partial \sigma}{\partial t} + g(\sigma, \varepsilon),$$

gdzie

$$f(\sigma, \varepsilon) \equiv \frac{1}{E} + f_1(\sigma, \varepsilon) \quad \text{lub} \quad f(\sigma, \varepsilon) \equiv \frac{1}{E} [1 + E f_1(\sigma, \varepsilon)].$$

Jeżeli zachodzi warunek $f_1(\sigma, \varepsilon) \equiv 0$, to równanie (1.1) sprowadza się do równania konstytutywnego, zaproponowanego uprzednio przez SOKOŁOWSKIEGO i MALVERNA, zwanego dalej równaniem SM [16, 17 i 20],

$$(1.6) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + g(\sigma, \varepsilon).$$

Równanie konstytutywne CL można także napisać w nieco innej postaci:

$$(1.7) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \varphi(\sigma, \varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \xi(\sigma, \varepsilon),$$

gdzie

$$(1.8) \quad \varphi(\sigma, \varepsilon) \equiv \frac{1}{f(\sigma, \varepsilon)} \quad \text{lub} \quad \varphi(\sigma, \varepsilon) \equiv \frac{E}{1 + E f_1(\sigma, \varepsilon)}$$

oraz

$$(1.9) \quad \xi(\sigma, \varepsilon) \equiv -\frac{g(\sigma, \varepsilon)}{f(\sigma, \varepsilon)} \quad \text{lub} \quad \xi(\sigma, \varepsilon) \equiv -\frac{E g(\sigma, \varepsilon)}{1 + E f_1(\sigma, \varepsilon)}.$$

W przypadku opisu wrażliwości na prędkość odkształcenia danego materiału w warunkach quasi-statycznych równanie (1.7) przyjmuje się w postaci

$$(1.10) \quad \dot{\sigma} = \varphi(\sigma, \varepsilon) \dot{\varepsilon} + \xi(\sigma, \varepsilon).$$

W równaniach (1.1) i (1.2) oraz (1.7) i (1.8) funkcje $f(\sigma, \varepsilon)$ oraz $\varphi(\sigma, \varepsilon)$ opisują natychmiastową dynamiczną reakcję materiału, natomiast funkcje $g(\sigma, \varepsilon)$ oraz $\xi(\sigma, \varepsilon)$ opisują reakcję nienatychmiastową, związaną z własnościami reologicznymi materiału. Głównym celem prac doświadczalnych, które mogą prowadzić do oceny równania konstytutywnego CL, jest określenie charakteru reakcji dla danej klasy materiałów, na przykład metali, na obciążenia dynamiczne. Jedną z praktycznych możliwości jest zastosowanie w tym celu metody badań opartej na generacji i pomiarze fal dociążania w prętach.

Celem dalszej dyskusji należy również dodać, że równanie w postaci (1.1) lub (1.7) jest równaniem quasi-liniowym różniczkowym pierwszego rzędu o pochodnych cząstkowych, a jego współczynniki w ogólnym przypadku zależą także od temperatury. Równanie konstytutywne CL prowadzi do kilku przypadków granicznych bądź szczególnych; dwa przypadki graniczne sprowadzają się do postaci omówionych poniżej.

Jeżeli w równaniu (1.1) lub (1.7) zachodzą warunki

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = f(\sigma, \varepsilon) \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \varphi(\sigma, \varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0,$$

to

$$(1.11) \quad g(\sigma, \varepsilon) = 0 \quad \text{lub} \quad \xi(\sigma, \varepsilon) = 0.$$

Równanie (1.11) stanowi opis statycznej krzywej umocnienia, którą można przedstawić w jawnej postaci

$$(1.12) \quad \sigma_s = h_s(\varepsilon) \quad \text{lub} \quad \sigma_s - h_s(\varepsilon) = 0$$

dla $\varepsilon = 0$, $h_s(0) = 0$ i $\sigma_s = 0$. Gdy w następnym przybliżeniu uwzględnia się początkową część sprężystą statycznej krzywej umocnienia, to równanie (1.12) można napisać w postaci

$$(1.13) \quad \sigma_s = \sigma_0 + h_{s1}(\varepsilon_p), \quad \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p, \quad \varepsilon_p \geq 0$$

dla $\varepsilon_p = 0$, $h_{s1}(0) = 0$, wówczas $\sigma_s = \sigma_0$ dla $\sigma_s \leq \sigma_0$, $\sigma_s = E\varepsilon$. Jeżeli natomiast w równaniach (1.1) i (1.7) $g(\sigma, \varepsilon) = 0$ lub $\xi(\sigma, \varepsilon) = 0$, to równania te przekształcają się do postaci

$$(1.14) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{f(\sigma, \varepsilon)} \quad \text{lub} \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \varphi(\sigma, \varepsilon).$$

Różniczkowe wzory (1.14) stanowią opis rodziny dynamicznych krzywych umocnienia, które określają natychmiastową dynamiczną reakcję materiału. Ponieważ są to związki różniczkowe, to dynamiczna krzywa umocnienia jest określona z dokładnością do stałej, która definiuje stan początkowy, w jakim znajduje się materiał w momencie nagłego obciążenia. Za taką stałą można na przykład uznać wartość odkształcenia wstępnego ε_w lub odpowiadającą jej wartość odkształcenia plastycznego ε_{pw} ; wówczas otrzymuje się

$$(1.15) \quad \sigma_d = h_d(\varepsilon, \varepsilon_w) \quad \text{lub} \quad \sigma_d = h_d(\varepsilon, \varepsilon_{pw}).$$

Funkcja $\varphi(\sigma, \varepsilon)$ określa w danym momencie moduł styczny reakcji materiału na obciążenie dynamiczne. Wzór (1.8) dokładnie precyzuje możliwe reakcje dynamiczne materiału. Jeżeli $f_1(\sigma, \varepsilon) = 0$, to reakcja wykazuje charakter wyłącznie sprężysty i odpowiada opisowi zgodnemu z teorią SM. Z drugiej strony, jeżeli $f_1(\sigma, \varepsilon)$ rośnie, to moduł styczny reakcji dynamicznej materiału zmniejsza się; w granicy można napisać

$$\lim_{f_1(\sigma, \varepsilon) \rightarrow \infty} \varphi(\sigma, \varepsilon) = 0.$$

Praktycznie taka ewentualność nie zachodzi i najmniejsze wartości $\varphi(\sigma, \varepsilon)$ odpowiadają modułom stycznym statycznej krzywej umocnienia dla danych wartości ε_w oraz $\sigma_{sw} = h_s(\varepsilon_w)$, tzn. $\varphi(\sigma, \varepsilon) = E_{ts}(\sigma_{sw}, \varepsilon_w)$, gdzie E_{ts} oznacza moduł styczny statycznej krzywej umocnienia w punkcie $(\sigma_{sw}, \varepsilon_w)$, $E_{ts} = d\sigma_s/d\varepsilon$. Ostatni przypadek jest odpowiednikiem opisu TKR w teorii propagacji fal sprężysto-plastycznych w prętach. Na podstawie przytoczonych rozważań otrzymuje się możliwe granice zmienności modułu stycznego reakcji dynamicznej materiału:

$$(1.16) \quad E \geq \varphi(\sigma, \varepsilon) \geq E_{ts}(\sigma_{sw}, \varepsilon_w).$$

Należy stwierdzić, że badania doświadczalne zmierzające do określenia obszaru zmienności $\varphi(\sigma, \varepsilon)$, a tym samym do określenia typu reakcji dynamicznej danego materiału, stanowią podstawę do dalszej dyskusji równania konstytutywnego CL. Ponadto dla pełnej dyskusji równania CL należałoby doświadczalnie wyznaczyć $g(\sigma, \varepsilon)$ lub $\zeta(\sigma, \varepsilon)$.

2. OPIS WŁASNOŚCI REOLOGICZNYCH ZA POMOCĄ RÓWNIANIA CL

Przez własności reologiczne materiałów rozumie się takie zjawiska, jak pełzanie, relaksację naprężeń i wpływ prędkości odkształcenia na krzywą umocnienia. Wszystkie te zjawiska są ze sobą ściśle związane, a ich wzajemna relacja w przypadku metali znajduje potwierdzenie na gruncie rozważań fizykalnych (por. np. prace [5 i 9]). W tym przypadku warunki quasi-statyczne są rzeczywistymi warunkami doświadczalnymi i do opisu własności reologicznych można wykorzystywać równanie w postaci (1.2) lub (1.10).

Podczas procesu pełzania $d\sigma/dt = 0$ i równanie (1.2) redukuje się do postaci

$$(2.1) \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = g(\sigma^*, \varepsilon), \quad \sigma^* = \text{const.}$$

Równanie (2.1) opisuje pierwsze stadium pełzania, gdy prędkości odkształcenia zmniejszają się z czasem. Po scałkowaniu równania (2.1) otrzymuje się odwróconą względem czasu krzywą pełzania z dokładnością do stałej, przy czym σ^* jest stałą wartością naprężenia w procesie pełzania:

$$(2.2) \quad t = \int \frac{d\varepsilon}{g(\sigma^*, \varepsilon)} + A_1.$$

Rozumując w sposób odwrotny dochodzi się do wniosku, że funkcję $g(\sigma, \varepsilon)$ można wyznaczać z prób na pełzanie. W tym celu rodzinę wyznaczonych doświadczalnie krzywych pełzania $\varepsilon = \varepsilon(t)$ dla stałych należy zróżniczkować względem czasu, następnie czas wyrugować, a krzywe prędkości pełzania jako funkcje odkształcenia stanowią wyznaczoną doświadczalnie funkcję $g(\sigma, \varepsilon)$. Należy jednak pamiętać, że naprężenie σ^* jest traktowane w takiej procedurze jako parameter. Ponadto trzeba mieć na uwadze fakt, że tak wyznaczona zależność $g(\sigma, \varepsilon)$ odnosi się do zakresu stosunkowo małych prędkości odkształcenia.

W procesie relaksacji naprężeń spełniony jest warunek $de/dt = 0$ i równanie (1.10) redukuje się do postaci

$$(2.3) \quad \frac{d\sigma}{dt} = \xi(\sigma, \varepsilon^*), \quad \varepsilon^* = \text{const}$$

lub po uwzględnieniu warunku (1.9)

$$(2.4) \quad \frac{d\sigma}{dt} = - \frac{Eg(\sigma, \varepsilon^*)}{1 + Ef_1(\sigma, \varepsilon^*)}$$

Równania (2.3) i (2.4) opisują prędkość relaksacji naprężenia i są różniczkowymi związkami wyznaczającymi w odwróconej postaci rodzinę krzywych relaksacji $\sigma = \sigma(t)$ z dokładnością do stałej; stąd na podstawie (2.3)

$$(2.5) \quad t = \int \frac{d\sigma}{\xi(\sigma, \varepsilon^*)} + A_2$$

lub na podstawie (2.4)

$$(2.6) \quad t = -E \int \frac{g(\sigma, \varepsilon^*)}{1 + Ef_1(\sigma, \varepsilon^*)} d\sigma + A_3.$$

Należy także pamiętać, że $\xi(\sigma, \varepsilon^*)$ posiada wartość ujemną oraz że odkształcenie całkowite ε^* jest traktowane w tym przypadku jako parametr. Podobnie jak dla przypadku pełzania, na podstawie doświadczalnie zmierzonych krzywych relaksacji naprężeń $\sigma = \sigma(t)$, które należy zróżniczkować względem czasu i następnie czas wyrugować, można otrzymać funkcję $\xi(\sigma, \varepsilon)$. Tak jak uprzednio z prób na pełzanie wyznaczono $g(\sigma, \varepsilon)$, a na podstawie (1.9) można wyznaczyć $f(\sigma, \varepsilon)$ lub $f_1(\sigma, \varepsilon)$; na przykład

$$(2.7) \quad f_1(\sigma, \varepsilon) = - \left[\frac{1}{E} + \frac{g(\sigma, \varepsilon)}{\xi(\sigma, \varepsilon)} \right].$$

Procedura taka prowadząca do wyznaczenia $g(\sigma, \varepsilon)$ oraz $f(\sigma, \varepsilon)$ jest jednak skomplikowana, a tym samym stosunkowo pracochłonna i z punktu widzenia opracowania wyników doświadczeń obciążona błędami (wymaga różniczkowania wykresnego).

Jednym z najbardziej rozpowszechnionych sposobów badania cech reologicznych materiałów są próby ze stałymi prędkościami odkształcenia, które zwiększa się dla kolejnych serii doświadczeń. W wyniku takich doświadczeń uzyskuje się szereg krzywych umocnienia dla różnych prędkości odkształcenia. W dyskutowanym w tej pracy przypadku prędkość odkształcenia odgrywa rolę parametru $\dot{\varepsilon}_c = \text{const}$ oraz $\varepsilon = \dot{\varepsilon}_c t$. Pomimo zachowania stałej prędkości odkształcenia, równanie w posta-

ci (1.2) lub (1.10) nie daje się scałkować w zamkniętej postaci celem otrzymania odpowiedniej rodziny krzywych umocnienia dla danych $\dot{\epsilon}_c$. Można jedynie stwierdzić na podstawie postaci (1.2), że obydwie strony tego równania zachowują stałą wartość

$$(2.8) \quad f(\sigma, \epsilon) \dot{\sigma} + g(\sigma, \epsilon) = \dot{\epsilon}_c, \quad \dot{\epsilon}_c = \text{const}$$

i na podstawie (2.8) oraz (1.8) otrzymuje się

$$(2.9) \quad \dot{\sigma} = \varphi(\sigma, \epsilon) [\dot{\epsilon}_c - g(\sigma, \epsilon)].$$

Otóż prędkość naprężenia podczas deformacji ze stałą prędkością odkształcenia jest proporcjonalna do modułu stycznego granicznej dynamicznej krzywej umocnienia z tym zastrzeżeniem, że prędkość naprężenia jest tym mniejsza, im mniejsza jest prędkość odkształcenia $\dot{\epsilon}_c$. Jeżeli $\sigma(t)$ wzrasta monotonicznie, to nie dopuszcza się w takim przypadku ujemnych wartości $\dot{\sigma}$, przeto musi zachodzić nierówność $\dot{\epsilon}_c > g(\sigma, \epsilon)$. Jest to spełnione w zasadzie dla większości metali i stopów z wyjątkiem takich, które wykazują zjawisko dolnej i górnej granicy plastyczności.

Dyskusja równania konstytutywnego CL może zostać uzupełniona pewnymi spostrzeżeniami dotyczącymi modułów stycznych E_t . Na podstawie wzoru (1.14) można wprowadzić oznaczenie $E_{t,d}(\sigma_d, \epsilon) \equiv \varphi(\sigma, \epsilon)$, natomiast na podstawie założenia o istnieniu statycznej krzywej umocnienia odpowiedni moduł styczny oznaczono przez $E_{t,s}(\sigma_s, \epsilon) = d\sigma_s/d\epsilon$. Stąd uwzględniając związek

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\epsilon} = \frac{d\sigma}{d\epsilon} \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{d\epsilon} \dot{\epsilon}$$

otrzymuje się na podstawie (1.2) dla warunków quasi-statycznych

$$(2.10) \quad g(\sigma, \epsilon) = \dot{\epsilon} \left[1 - f(\sigma, \epsilon) \frac{d\sigma}{d\epsilon} \right],$$

a uwzględniając równanie (1.8)

$$(2.11) \quad g(\sigma, \epsilon) = \dot{\epsilon} \left[1 - \frac{E_t}{E_{t,d}(\sigma_d, \epsilon)} \right] \quad \text{lub} \quad g(\sigma, \epsilon) = \dot{\epsilon} \left[\frac{E_{t,d} - E_t}{E_{t,d}} \right].$$

Po wyznaczeniu E_t z równania (2.11) dochodzi się do związku określającego bieżący moduł styczny:

$$(2.12) \quad E_t = E_{t,d}(\sigma_d, \epsilon) \left[1 - \frac{g(\sigma, \epsilon)}{\dot{\epsilon}} \right].$$

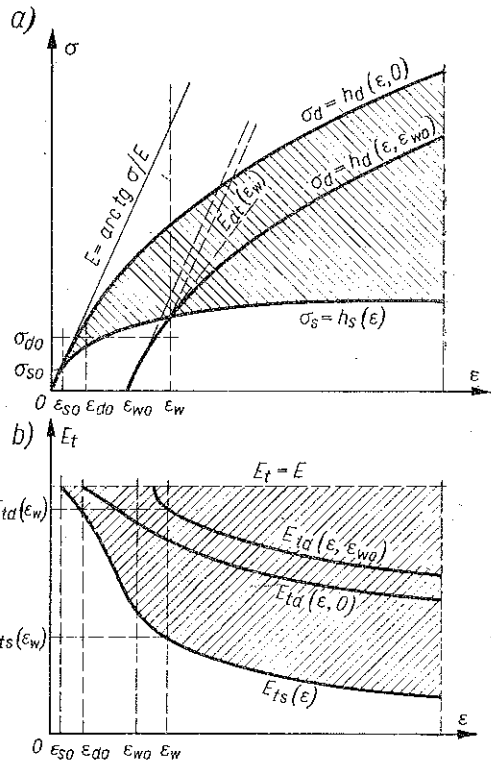
Tak więc uzyskano inną niż poprzednio interpretację funkcji $g(\sigma, \epsilon)$: jest to po prostu iloczyn prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}$ i względnego zmniejszenia bieżącego modułu stycznego, odnoszonego do modułu granicznej dynamicznej krzywej umocnienia. Ogólnie można zatem stwierdzić na podstawie (2.11) i (2.12), że bieżący moduł styczny jest modułem «zrelaksowanym» i jest zawsze mniejszy od $E_{t,d}$, a w granicznym przypadku

$$\lim_{\dot{\epsilon} \rightarrow \infty} E_t = E_{t,d}(\sigma_d, \epsilon).$$

Wyniki dotychczasowych rozważań przedstawiono schematycznie na rys. 1a oraz rys. 1b. Rysunek 1a przedstawia na płaszczyźnie σ, ϵ dwie graniczne krzywe

umocnienia, mianowicie krzywą statyczną $\sigma_s = h_s(\varepsilon)$ oraz krzywą dynamiczną $\sigma_d = h_d(\varepsilon, 0)$ przechodzącą przez początek układu współrzędnych. Przedstawiono także krzywą dynamiczną $\sigma_d = h_d(\varepsilon, \varepsilon_{w0})$, scałkowaną dla wstępnego odkształcenia trwałego ε_{w0} . Zakreskowane pole pomiędzy krzywymi zawiera wszystkie możliwe powierzchni

całkowe równania CL przy różnych wartościach ε_{w0} . Przez σ_{s0} i σ_{d0} oznaczono odpowiednio granice plastyczności statycznej i granicznej dynamicznej krzywej umocnienia; ε_{s0} oraz ε_{d0} oznaczają odpowiadające im odkształcenia. Na rys. 1a zaznaczono także moduły Younga i moduły styczne, przy czym przecięcia krzywych umocnienia $\sigma_s = h_s(\varepsilon)$ oraz $\sigma_d = h_d(\varepsilon, \varepsilon_{w0})$ wyznacza wartość odkształcenia wstępnego ε_w i punkt na krzywej $\sigma_s = h_s(\varepsilon)$, gdzie reakcja materiału na ewentualne dociążenie dynamiczne jest zgodna z modułem stycznym $E_{td}(\varepsilon_w)$. Zagadnienie to jest niezmiernie istotne w problemach falowych. Z tego powodu podobny schemat przedstawiono na rys. 1b, odnosi się on jednak do modułów stycznych $E_t = d\sigma/d\varepsilon$. Zakreskowany obszar zawiera wszystkie możliwe reakcje dynamiczne materiału. Od góry obszar ten jest ograniczony prostą $E_t = E$, od dołu natomiast granicę stanowi linia $E_{ts}(\varepsilon)$, która odpowiada statycznej krzywej umocnienia $\sigma_s = h_s(\varepsilon)$. Granicznej dynamicznej krzywej umocnienia odpowiadają moduły styczne $E_{td}(\varepsilon, 0)$. Jeżeli występuje odkształcenie wstępne ε_{w0} , to krzywej umocnienia $\sigma_d = h_d(\varepsilon, \varepsilon_{w0})$ odpowiadają na płaszczyźnie E_t , ε moduły styczne $E_{td}(\varepsilon, \varepsilon_{w0})$.



Rys. 1

3. WYZNACZENIE NATYCHMIASTOWEJ REAKCJI DYNAMICZNEJ NA PODSTAWIE PROCESU FALOWEGO

Ze względu na specyfikę opisu zagadnień falowych w prętach, a w szczególności na potrzebę zdefiniowania procesu obciążenia i odciążenia, równanie (1.1) należy napisać następująco:

$$(3.1) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \langle g(\sigma, \varepsilon) \rangle + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \begin{cases} f(\sigma, \varepsilon), & \text{jeśli } \frac{\partial \sigma}{\partial t} > 0, \\ E^{-1}, & \text{jeśli } \frac{\partial \sigma}{\partial t} \leq 0, \end{cases}$$

gdzie operator $\langle \rangle$ spełnia następujące warunki:

$$\langle g(\sigma, \varepsilon) \rangle = \begin{cases} g(\sigma, \varepsilon), & \text{jeżeli } \sigma > \sigma_r, \\ 0, & \text{jeżeli } \sigma \leq \sigma_r, \end{cases}$$

z równoczesnym ograniczeniem

$$\sigma_d \leq \sigma_r \leq \sigma_s,$$

gdzie σ_r oznacza pewną wartość naprężenia, zwanego granicą relaksacji materiału. Dokładniejsze omówienie granicy relaksacji zamieszczono w pracy [10]. Podczas procesu propagacji fali sprężysto-plastycznej w każdym przekroju półnieskończonego pręta, dostatecznie bliskim $x=0$, musi być spełniony oddzielny układ równań na płaszczyźnie fazowej x, t w obszarze obciążania, a oddzielny w obszarze odciążania. Układ równań, który wynika z rozwiązania zagadnienia metodą charakterystyk, przedstawia się następująco:

a) dla przypadku obciążania $\partial\sigma/\partial t > 0$ istnieją trzy rodziny charakterystyk

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} = C(\sigma, \varepsilon) &= \pm \sqrt{\frac{1}{\rho f(\sigma, \varepsilon)}}, \\ dx &= 0 \end{aligned}$$

oraz powinny być spełnione równania na charakterystykach

$$(3.3) \quad \begin{aligned} dx \neq 0, \quad dv &= \pm \frac{1}{\rho c(\sigma, \varepsilon)} d\sigma + g(\sigma, \varepsilon) dx, \\ dx = 0, \quad d\varepsilon &= f(\sigma, \varepsilon) d\sigma + g(\sigma, \varepsilon) dt; \end{aligned}$$

b) zależności dla przypadku odciążania są identyczne z wynikającymi z teorii SM; otrzymuje się wówczas dwie rodziny charakterystyk

$$(3.4) \quad \frac{dx}{dt} = C_0 = \pm \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

oraz równania wzdłuż charakterystyk

$$(3.5) \quad dv = \pm \frac{d\sigma}{\rho c_0} + g(\sigma, \varepsilon) dx.$$

Rozwiązanie problemu falowego jest całkowite, gdy zostaje wyznaczona siatka charakterystyk na płaszczyźnie fazowej x, t i gdy znane są wartości naprężenia σ , odkształcenia ε i prędkości masowe v wzdłuż charakterystyk. Takie sformułowanie problemu propagacji fali w teorii CL pociąga za sobą pojawienie się pewnej granicznej linii $x=F(t)$ na płaszczyźnie fazowej, wzdłuż której zachodzi $\partial\sigma/\partial t=0$. Linia $x=F(t)$, jako miejsce geometryczne punktów, gdzie zachodzi warunek $\partial\sigma/\partial t=0$, zwana jest krzywą odciążania i krzywa ta rozgranicza na płaszczyźnie x, t obszary obciążania i odciążania lub inaczej — obszary stosowalności związków CL i SM. Ze względu na to, że w dalszej części pracy rozważa się jedynie przypadek pręta półnieskończonego, odkształcanego na końcu ze stałą prędkością uderzenia $v_0 > > \sigma_{s0}/\rho C_0$, dalsza dyskusja krzywej odciążania zostanie pominięta.

Natomiast na uwagę zasługuje wynik otrzymany z równania (3.1), z którego wynika, że krzywoliniowe charakterystyki są określone przez równanie, do którego wchodzi jedynie funkcja $f(\sigma, \varepsilon)$ z równania konstytutywnego (1.1). Wniosek, który otrzymujemy się, jest taki, że znając rozkład charakterystyk w pobliżu $x=0$, tj. $dx/dt = C[\sigma, \varepsilon]_{x=0}$, można wyznaczyć natychmiastową reakcję dynamiczną materiału w postaci $f(\sigma, \varepsilon)$ lub $f_1(\sigma, \varepsilon)$, a także zgodnie z (1.14) w postaci $\varphi(\sigma, \varepsilon)$. Następnie równanie (3.2), spełnione wzdłuż charakterystyk, pozwala na wyznaczenie funkcji $g(\sigma, \varepsilon)$, opisującej nienatychmiastową reakcję materiału lub inaczej jego własności reologiczne.

Uwzględniając związek (3.1) można wyznaczyć $f(\sigma, \varepsilon)$, tak więc

$$(3.6) \quad f(\sigma, \varepsilon) = \frac{1}{\rho C^2(\sigma, \varepsilon)} \quad \text{lub} \quad \varphi(\sigma, \varepsilon) = \rho C^2(\sigma, \varepsilon).$$

Ponieważ jednak dla metali początek fali propaguje się z prędkością C_0 , przeto na podstawie (1.5) można znaleźć wyrażenie $f_1(\sigma, \varepsilon)$:

$$(3.7) \quad f_1(\sigma, \varepsilon) = \frac{1}{E} \left[\frac{E}{\rho} \frac{1}{C^2(\sigma, \varepsilon)} - 1 \right].$$

Oznaczając

$$\alpha(\sigma, \varepsilon) = \frac{C(\sigma, \varepsilon)}{C_0}$$

otrzymuje się

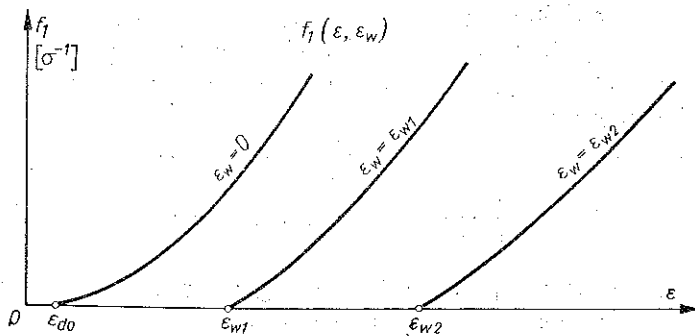
$$(3.8) \quad f_1(\sigma, \varepsilon) = \frac{1}{E} \left[\frac{1}{\alpha^2(\sigma, \varepsilon)} - 1 \right].$$

Dla większości wartości odkształceń zachodzi nierówność $\alpha^{-2}(\sigma, \varepsilon) \gg 1$ ze względu na fakt, że $C_0 \gg C(\sigma, \varepsilon)$; stąd

$$(3.9) \quad f_1(\sigma, \varepsilon) \approx \frac{1}{E\alpha^2(\sigma, \varepsilon)}.$$

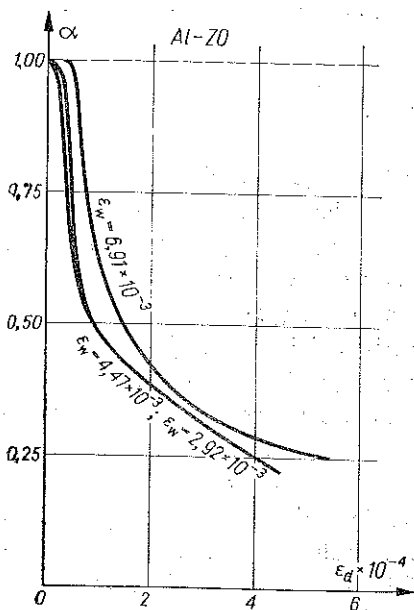
Na podstawie pomiaru procesu falowego w przecięci po wyznaczeniu $C(\sigma, \varepsilon)$, związki (3.6), (3.7) lub (3.8) mogą stanowić podstawę do doświadczalnego wyznaczenia części równania konstytutywnego CL w postaci funkcji $f(\sigma, \varepsilon)$, $\varphi(\sigma, \varepsilon)$ lub $f_1(\sigma, \varepsilon)$. Stwierdzenie to dotyczy zarówno generacji fali na próbce wstępnie nieobciążonej jak również fali dociążania. O ile na przykład okazałoby się, że w pewnym obszarze wartości σ lub ε zachodzi $f_1(\sigma, \varepsilon) \approx 0$, to teoria SM byłaby bardziej odpowiednia; ma to miejsce dla $\alpha(\sigma, \varepsilon) \approx 1$, a tym samym, gdy $C(\sigma, \varepsilon) \approx C_0$. Celem weryfikacji teorii na drodze pomiarów falowych należy sporządzić wykresy $f_1(\sigma, \varepsilon, \varepsilon_w)$ znalezione z równania (3.8), przy czym ε_w stanowi odkształcenie wstępne w przypadku generacji fali dociążania i odgrywa rolę parametru. Hipotetyczny wynik takiego sprawdzenia dla teorii CL przedstawiono na rys. 2. Z przedstawionej sytuacji wynika, że w momencie dociążania dla dwóch przedstawionych na rys. 2 przypadków zachodzi $f_1(\sigma, \varepsilon, \varepsilon_{w1}) \neq 0$ oraz $f_1(\sigma, \varepsilon, \varepsilon_{w2}) \neq 0$ i fala dociążania będzie propagować się z prędkością mniejszą od C_0 , co oznacza z kolei, że punkt σ_d według rys. 1a znajduje się poniżej lub na krzywej statycznej $\sigma_s = h_s(\varepsilon)$.

Uzyskane na drodze doświadczalnej w pracy [7] prędkości fali dociążania dla aluminium, miedzi i stali (blachy głębokotloczonej) mogą służyć za podstawę do wyznaczenia funkcji $f_1(\varepsilon, \varepsilon_w)$. Jest to możliwe, ponieważ na zastosowanych odległościach pomiarowych nie stwierdzono dla wszystkich badanych materiałów wyraź-

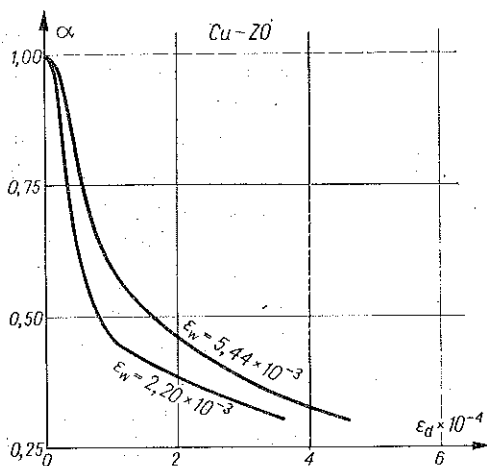


Rys. 2

nego zakrzywienia się charakterystyk czoła fali dociążania. Na podstawie rysunków od rys. 2 do 4 według pracy [7] sporządzono wykresy funkcji $\alpha(\varepsilon_d)$, przedstawiono je na rys. 3, 4 i 5 niniejszej pracy. Z kolei na podstawie tych wyników sporządzono poszukiwane wykresy $f_1(\varepsilon, \varepsilon_d)$ dla różnych wartości ε_w ; rezultaty przedstawiono na rys. 6, 7 i 8. Można tu wyróżnić dwa rodzaje wyników. Pierwszy z nich, odnoszący się do aluminium i miedzi, przedstawiają rys. 6 i 7. Na ich podstawie można

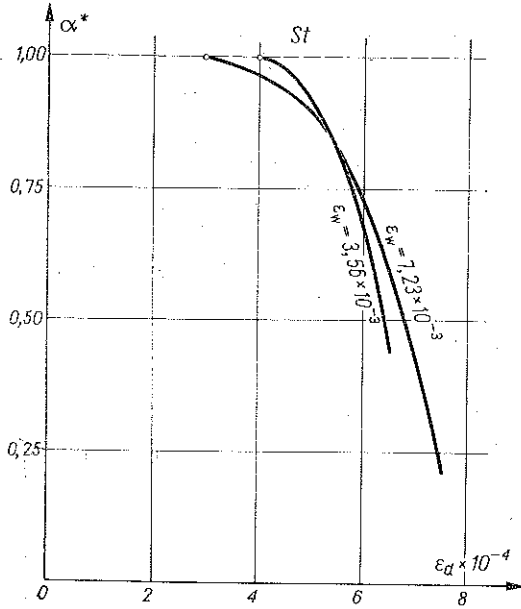


Rys. 3

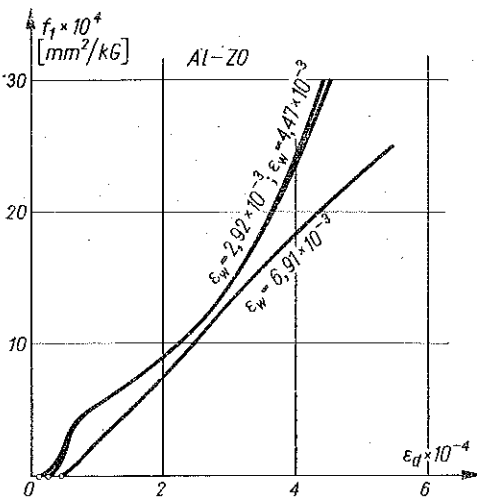


Rys. 4

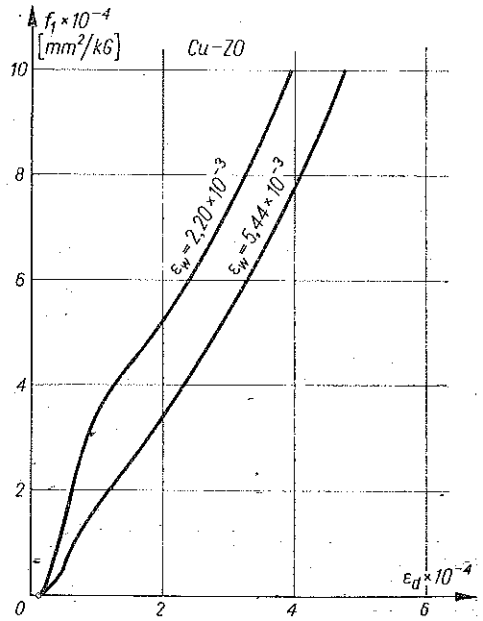
stwierdzić, że punkty σ_d dla wszystkich przypadków wstępnego odkształcenia leżą nieco powyżej krzywej statycznej $\sigma_s = h_s(\epsilon)$; ponadto wartości f_1 są dla większych odkształceń dociążania różne od zera i szybko rosną. Świadczy to o początkowo małej, a następnie szybko wzrastającej natychmiastowej reakcji plastycznej ma-



Rys. 5



Rys. 6



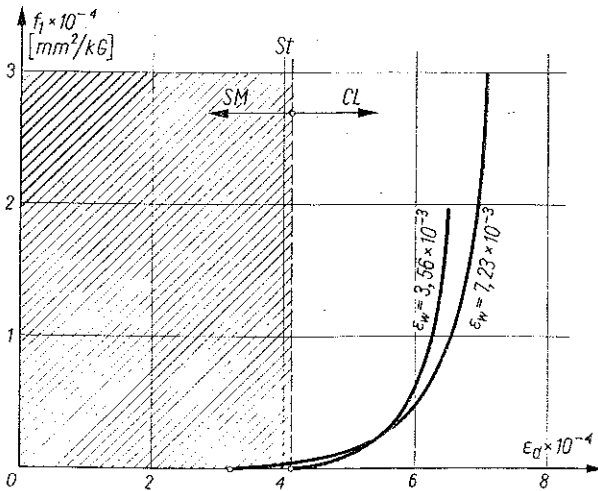
Rys. 7

teriału. Wynik taki prowadzi do wniosku, że jedynie bardzo małe zaburzenia nałożone na początkowy stan plastyczny można opisywać w przypadku badanych dwóch metali teorią SM, gdy intensywność dociążania rośnie pojawia się reakcja plastyczna i wówczas $f_1 \neq 0$, przy czym zaobserwowana reakcja plastyczna jest znacznie większa dla aluminium niż dla miedzi.

Nieco odmienny wynik uzyskano dla stali. Należy równocześnie dodać, że przy obliczeniach zależności $\alpha(\epsilon_d)$ uwzględniono zaobserwowane uprzednio zmniejszenie modułu Younga po wstępnej deformacji plastycznej [7 i 13]. Przyjęcie średniego względnego zmniejszenia modułu o 15% zmniejsza prędkość fali sprężystej dociążania z $(C_0)_{st}^0 = 5068,8 \text{ ms}^{-1}$ do $(C_0)_{st}^*$, gdzie

$$(C_0)_{st}^* = \sqrt{0,85} (C_0)_{st}^0;$$

stąd $(C_0)_{st}^* = 4673,0 \text{ ms}^{-1}$ i względne zmniejszenie prędkości C_0 osiąga wartość 7,8%.



Rys. 8

Rezultaty dla stali przedstawione na rys. 8 dowodzą, że poszczególne punkty σ_d leżą znacznie powyżej krzywej statycznej $\sigma_s = h_s(\epsilon)$ i w zakreślowanym obszarze można z powodzeniem stosować teorię SM. Tak więc dla stali nie stwierdzono początkowej reakcji plastycznej materiału. Reakcja ta pojawia się jednak przy odpowiednio dużych odkształceniach na czole fali dociążania.

4. Dyskusja oraz wnioski

Z matematycznego punktu widzenia zarówno wielkość natychmiastowej jak i nienatychmiastowej reakcji plastycznej materiału jest związana z kształtem pewnej powierzchni całkowitej

$$(4.1) \quad h(\sigma, \epsilon, \epsilon_w, t) = 0$$

równania CL o postaci (1.1) lub (1.7). Równanie o postaci (2.1) stanowi szczególnie przypadek równania różniczkowego Pfaffa. Równanie Pfaffa w ogólnej postaci można zapisać następująco:

$$(4.2) \quad P(\sigma, \varepsilon, t) d\varepsilon + Q(\sigma, \varepsilon, t) d\sigma + R(\sigma, \varepsilon, t) dt = 0;$$

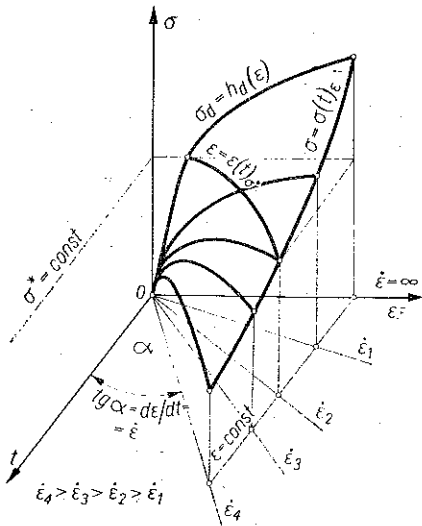
w przypadku równania (1.4) mamy

$$P(\sigma, \varepsilon, t) \equiv 1, \quad Q(\sigma, \varepsilon, t) \equiv -f(\sigma, \varepsilon), \quad R(\sigma, \varepsilon, t) \equiv -g(\sigma, \varepsilon).$$

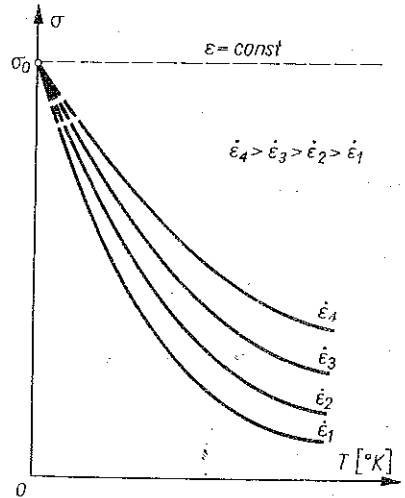
Współczynniki P , Q , R muszą posiadać ciągłe pochodne w rozważanym obszarze zmiennych σ , ε , t . Powierzchnia całkowa (4.1) została przedstawiona schematycznie na rys. 9. Na rysunku tym zaznaczono także krzywą pęczania jako przekrój powierzchni całkowej $h(\sigma, \varepsilon, t) = 0$ płaszczyzną $\sigma^* = \text{const}$, a także krzywą relaksacji jako przekrój powierzchni całkowej płaszczyzną $\varepsilon^* = \text{const}$. Pełne wyznaczenie powierzchni całkowej wymaga znajomości *a priori* dynamicznej krzywej umocnienia $\sigma_d = h_d(\varepsilon, \varepsilon_w)$, uzyskanej z nieskończenie dużą prędkością odkształcenia. Założenie to należy uznać za kontrowersyjne i wymagające dalszej dyskusji. Po pierwsze może być ono dyskutowane z punktu widzenia mechaniki rozprzestrzeniania się fal sprężysto-plastycznych. Otóż założenie o istnieniu krzywej dynamicznej prowadzi do pojawienia się w teoretycznym opisie procesu propagacji nieskończenie dużej prędkości odkształcenia na czole fali, a w szczególności w pobliżu uderzonego końca pręta. Wszystkie obserwacje doświadczalne przeczą temu założeniu, gdyż rzeczywiste prędkości odkształcenia w takim wypadku nie przekraczają wartości rzędu 10^3 s^{-1} . W rozumieniu teorii CL krzywe dociążania wyznaczone we współrzędnych σ , ε na wykresach rys. 5-7 w pracy [7] są dynamicznymi krzywymi umocnienia dla $\dot{\varepsilon} = \infty$; w rzeczywistości prędkości odkształcenia zawierały się w przedziale $130 \text{ s}^{-1} < \dot{\varepsilon} < 200 \text{ s}^{-1}$. Należy dodać, że teoria SM nie zawiera takiego paradoksu i na czole fali prędkości odkształcenia przyjmują skończone wartości.

Po drugie, założenie istnienia dynamicznej krzywej umocnienia $\sigma_d = h_d(\varepsilon, \varepsilon_w)$ wymaga dyskusji od strony fizycznej. Teoria termicznie aktywowanych procesów dyslokacyjnych w metalach przewiduje, że przy odpowiednim obniżeniu temperatury do wartości bliskiej zera bezwzględnego lub przy odpowiednio dużych prędkościach odkształcenia dyslokacje pokonują bariery energetyczne (przeszkody) bez udziału drgań sieci krystalicznej [9]. Wartość naprężenia, przy którym drgania sieci krystalicznej nie uczestniczą w procesie deformacji plastycznej, może zostać określona przez wyznaczenie atermicznej krzywej umocnienia, tj. krzywej umocnienia danego metalu $\sigma_0 = h_0(\varepsilon)$, odniesionej do zera bezwzględnego, tj. dla $T = 0^\circ\text{K}$. Krzywe takie dla technicznie czystego aluminium i miedzi wyznaczono na przykład w pracy [11]. Celem wyznaczenia atermicznej krzywej umocnienia należy przeprowadzić obszerne badania doświadczalne w różnych temperaturach i przy różnych prędkościach odkształcenia. W wyniku takich doświadczeń uzyskuje się serię wykresów prowadzących do wyznaczenia kolejnych punktów (σ_0, ε) na krzywej atermicznej. W rzeczywistości jest oczywiście możliwe przekroczenie wartości naprężenia σ_0 dla $T > 0^\circ\text{K}$, przy czym w miarę wzrostu temperatury dla przekroczenia wartości naprężenia σ_0 niezbędna jest coraz większa prędkość odkształcenia $\dot{\varepsilon}$. Teoretycznie

wyznaczone dla różnych metali prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}_0$ wynoszą $\sim 10^5 \text{ s}^{-1}$ dla $T \approx 290^\circ \text{K}$. Przy dużych bardzo prędkościach odkształcenia, rzędu od 10^4 do 10^6 s^{-1} , spotykanych podczas propagacji fal uderzeniowych, musi zachodzić jakościowa zmiana mechanizmu pokonywania przeszkód przez dyslokacje. Stwierdzono, że powyżej $\dot{\epsilon}_0$ niektóre metale wykazują liniową lepkość [12].



Rys. 9



Rys. 10

Przedstawiony obraz skłania do stwierdzenia, że z fizycznego punktu widzenia dynamiczna krzywa zakładana w teorii CL nie istnieje. Należałoby postulować, aby teoretyczną dynamiczną krzywą umocnienia $\sigma_d = h_d(\epsilon)$ utożsamiać z atermiczną krzywą umocnienia $\sigma_0 = h_0(\epsilon)$. Dla zagadnień falowych w prętach nigdy w zasadzie nie zachodzi przekroczenie atermicznej krzywej umocnienia, stąd też ogranicza ona od góry stosowalność teorii CL. Natomiast równanie konstytutywne (1.1) nie jest odpowiednie do interpretacji eksperymentów przeprowadzanych w obszarze fal uderzeniowych, gdzie $\dot{\epsilon} > 10^4 \text{ s}^{-1}$.

Równie istotnym zagadnieniem, o którym wspomniano poprzednio, jest moment pojawienia się natychmiastowej reakcji plastycznej. Uzyskane rezultaty w obecnej pracy, które zostały przedstawione na rys. 6 i 7 wskazują, że natychmiastowa reakcja plastyczna pojawia się w przypadku Al i Cu z pewnym nieznacznym opóźnieniem; oznacza to z kolei, że punkt σ_{d0} z rys. 1a znajduje się nieco powyżej krzywej statycznej $\sigma_s = h_s(\epsilon)$. Nie stwierdzono natomiast faktu, że dla $\epsilon_d = 0$ zachodzi $f_1 \neq 0$, tak jak to przedstawiono na rys. 1a. Ta ostatnia sytuacja zachodzi wówczas, gdy prekursor fali dociążania propaguje się z prędkością mniejszą od prędkości dźwięku C_0 ; może to jednak być spowodowane zarówno zmniejszeniem się modułu Younga na skutek wstępnej deformacji plastycznej jak i wzrostem gęstości materiału. Jednak przypadek zwiększenia gęstości materiału wydaje się mało prawdopodobny. Dotychczas brak danych na ten temat, jedynie w pracy [4] zaobserwowano dla miedzi

podczas propagacji fal ścinania nieznaczne zmniejszenie prędkości prekursora. Natomiast podczas badań statycznych stwierdzono, że dla żelaza i miękkiej stali zachodzi zmniejszenie modułu Younga wskutek deformacji plastycznej [13]. Obserwacja ta została potwierdzona w części doświadczalnej pracy [7]. Zmiana modułu Younga, wywołana odkształceniem plastycznym, nie może jednak powodować większych zmian prędkości fali sprężystej C_0 niż kilka procent.

Uzyskane wyniki prowadzą do wniosku, że stosowalność teorii CL jest stosunkowo ograniczona z tym, że dla pewnej grupy metali (w naszym przypadku Al oraz Cu) stosowalność ta jest lepsza, natomiast dla stali istnieje znaczny obszar odkształceń, w którym teoria SM jest ściśle spełniona. Lepszą zgodność teorii CL w przypadku Al i Cu daje się tłumaczyć wspomnianymi na wstępie efektami historii prędkości odkształcenia, które właśnie obserwowano dla aluminium [8] i miedzi [21].

Analiza wyników doświadczalnych jak i przeprowadzona dyskusja skłaniałyby do następujących wniosków:

1. Równanie konstytutywne CL umożliwia opis własności reologicznych metali takich, jak pełzanie, relaksacja naprężeń i wpływ prędkości odkształcenia na krzywą umocnienia.

2. Analizując równanie CL z punktu widzenia eksperymentów, należy zawsze zbadać natychmiastową i opóźnioną reakcję plastyczną materiału. Reakcję natychmiastową można badać doświadczalnie drogą generacji i pomiaru prędkości fal sprężysto-plastycznych.

3. Stwierdzone doświadczalnie dla aluminium i miedzi pochylenie charakterystyk fali dociążania jest zgodne z przewidywaniami teorii CL. Pochylenie charakterystyk pokrywa się również z teorią TKR z przyjęciem dynamicznej krzywej umocnienia uzyskanej z odpowiednią średnią prędkością odkształcenia jako parametrem.

4. W przypadku stali głębokotłocznej stwierdzono, że w stosunkowo dużym obszarze odkształceń na czole fali dociążania teoria SM daje ściśle rozwiązania. Ponadto zaobserwowano zmniejszenie się modułu Younga badanej stali jako wynik deformacji plastycznej, co z kolei pociąga za sobą zmniejszenie się o kilka procent prędkości prekursora na czole fali dociążania.

5. Stwierdzono także, że założenie o istnieniu dynamicznej krzywej umocnienia $\sigma_d = h_d(\epsilon, \dot{\epsilon}_w)$ jest kontrowersyjne, gdyż z jednej strony teoretyczne rozwiązanie zagadnienia brzegowego dla pręta uderzanego ze stałą prędkością prowadzi do pojawienia się nieskończenie dużej prędkości odkształcenia w pobliżu końca pręta, z drugiej natomiast założenie o istnieniu takiej krzywej nie jest poprawne z fizycznego punktu widzenia.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. B. E. K. ALTER, C. W. CURTIS, *Effect of strain-rate on the propagation of a plastic strain pulse along a lead bar*, J. Appl. Phys., 9, 27, 1079, 1956.
2. J. F. BELL, *Propagation of plastic waves in prestressed bars*, U.S. Navy Technical Report No. 5, Baltimore, The John Hopkins University, 1951.

3. J. P. BELL, A. STEIN, *The incremental loading wave in the prestressed plastic field*, J. Mécanique, 4, 1, 395, 1962.
4. J. D. CAMPBELL, A. R. DOWLING, *The dynamic behaviour of materials subjected to dynamic incremental shear loading*, J. Mech. Phys. Solids, 1, 18, 43, 1970.
5. H. CONRAD, *Thermally activated deformation of metals*, J. of Metals, 7, 16, 582, 1964.
6. N. CRISTESCU, *Some problems of the mechanics of extensible strings*, Proc. Int. Symp. on Stress Waves in Anelastic Solids, Brown Univ., 1963.
7. J. KLEPACZKO, *Some experimental investigations of the elastic-plastic wave propagation in bars*. Foundations of Plasticity ed. A. SAWCZUK, Noordhoff 1974, 451.
8. J. KLEPACZKO, *Effects of strain-rate history on the strain hardening curve of aluminium*, Arch. Mech. Stos., 2, 19, 211, 1967.
9. J. KLEPACZKO, *Strain rate history, effects for polycrystalline aluminium and theory of intersections*, J. Mech. Phys. Solids, 3, 16, 255, 1968.
10. J. SULICIU, L.E. MALVERN and N. CRISTESCU, *Quasi-linear rate-type constitutive equations and incremental stress waves*, Int. J. Solids and Struct., 10, 21, 1974.
11. J. KLEPACZKO, *O potęgowej postaci mechanicznego równania stanu z uwzględnieniem temperatury*, Rozpr. Inżyn., 3, 13, 561, 1965.
12. A. KUMAR, R. G. KUMBLE, *Viscous drag on dislocation of high strain rates in copper*, J. Appl. Phys., 9, 10, 3475, 1969.
13. J. LITOŃSKI, J. KLEPACZKO, *Wpływ wstępnego plastycznego rozciągania na moduł Younga mosiądzu i niskowęglowej stali*, Rozpr. Inżyn., 2, 12, 251, 1964.
14. J. LUBLINER, *A generalized theory of strain-rate dependent plastic wave propagation in bars*, J. Mech. Phys. Solids, 2, 12, 59, 1964.
15. J. LUBLINER, *The strain-rate effect in plastic wave propagation*, J. de Mécanique, 1, 4, 111, 1965.
16. L. E. MALVERN, *Plastic wave propagation in a bar of material exhibiting a strain rate effect*, Quart. Appl. Math., 4, 8, 405, 1951.
17. L. E. MALVERN, *The propagation of longitudinal waves of plastic deformation in a bar of material exhibiting a strain-rate effect*, J. Appl. Mech., 2, 18, 203, 1951.
18. T. V. SANTOSHAM, H. RAMSEY, *Small plastic strain wave propagation in prestressed soft copper rods*, Int. J. Mech. Sci., 6, 12, 447, 1970.
19. J. A. SIMMONS, F. HAUSER, J. E. DORN, *Mathematical theories of plastic deformation under impulsive loading*, Univ. of California Press, 1962.
20. В. В. СОКОЛОВСКИЙ, *Распространение упруго-пластических волн в стержнях*, Прикл. Мат. Мех., 12, 3, 261, 1948.
21. J. KLEPACZKO, *Strain rate incremental tests on copper*, Brown University Report, No NSF-GK-40213/6 1974.

Резюме

АНАЛИЗ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ КЛ НА ОСНОВЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ВОЛНЫ НАГРУЗКИ

Предметом настоящей работы являются анализ определяющего уравнения предложенного Кристеску и Люблинером (называемого в сокращении КЛ) и отвечающая этому уравнению теория распространения упруго-пластических волн в стержнях. Обсуждение уравнения КЛ проведено опираясь на собственные экспериментальные результаты измерения скорости распространения волны нагрузки для таких металлов, как алюминий, медь и низкоуглеродистая сталь. В работе анализируется тоже возможность описания явления ползучести, релаксации напряжений и квазистатических испытаний при использовании уравнения КЛ.

Решение задачи распространения упруго-пластической волны в полубесконечном стержне методом характеристик дает возможность получения, опираясь на экспериментальные

результаты, формы материальной функции, которая описывает мгновенную пластическую реакцию исследуемого материала. Обнаружено путем измерений скорости волны нагрузки, что мгновенная пластическая реакция значительно различна между сталью, а алюминием и медью. Обнаружено тоже, что в некотором интервале значений деформаций нагрузки точно удовлетворяется теория распространения Соколовского-Мальверна. Этот интервал значительно больше для стали, чем для алюминия и меди.

SUMMARY

ANALYSIS OF CL CONSTITUTIVE EQUATION ON THE BASIS
OF THE EXPERIMENT WITH INCREMENTAL WAVES

The paper deals with the analysis of the constitutive equation, along with the adequate theory of the elastic-plastic wave propagation in bars, proposed by Cristescu and Lubliner (shortly named CL). The discussion of the CL constitutive equation was performed using author's results of experiment with incremental waves on such metals as aluminium, copper and low carbon steel. The possibility was analysed to describe creep, stress relaxation, and strain rate effects by means of the CL equation.

The solution of the elastic-plastic wave propagation in a half-infinite bar makes it possible to determine, on the basis of experimental results, the shape of the material function, which describes the instantaneous plastic response of the material examined. It was confirmed by measurements of the incremental wave speeds that the instantaneous plastic response differs significantly for steel from one side and for aluminium and copper from the other. It was also observed that within a certain range of the incremental strains the Sokolovsky-Malvern wave propagation theory is exactly satisfied. The range is significantly larger for steel than for aluminium and copper.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 października 1974 r.
