

O PRĘDKOŚCIACH FALI KULISTEJ W IZOTROPOWYM MATERIALE SPRĘŻYSTYM

ZBIGNIEW WESOŁOWSKI (WARSZAWA)

Na podstawie teorii powierzchni nieciągłości konstruuje się kulistą falę przyspieszenia. Z kolei konstruuje się kulistą falę bieżącą i wyznacza prędkość fazową i grupową. Pokazano, że prędkość fazowa jest większa od prędkości propagacji i prędkości grupowej. Dla dostatecznie dużych częstotliwości prędkość propagacji jest średnią geometryczną prędkości fazowej i grupowej. Pokazano również, że prędkość sygnału jest mniejsza od prędkości propagacji. Udowodniono, że fala kulista jest sumą fal płaskich i że fala płaska jest sumą fal kulistych.

W licznych podręcznikach i monografiach omawia się falę kulistą w izotropowym, liniowym materiale sprężystym. Wiadomo, że jest to fala dyspersyjna, której prędkości zależą od częstotliwości. Na ogół porzeczkuje się jednak na wyznaczeniu prędkości propagacji fali podłużnej i poprzecznej, które określone są takimi samymi wzorami, jak dla fali płaskiej. Nie wyznacza się ani prędkości fazowej, ani grupowej, ani prędkości sygnału. Nie omawia się też związku z falą przyspieszenia i płaską falą sinusoidalną.

Opracowanie niniejsze ma na celu omówienie w zwartej postaci całości zagadnienia. Podstawą rozważań jest teoria powierzchni nieciągłości w najprostszej wersji i liniowa teoria sprężystości.

1. RÓWNANIA PODSTAWOWE

Podstawą rozważań są równania liniowej teorii izotropowego ciała sprężystego:

$$(1.1) \quad \varepsilon_{ij} = u_{(i|j)},$$

$$(1.2) \quad \tau^{ij} = \lambda \varepsilon_r^r g^{ij} + 2\mu \varepsilon^{ij},$$

$$(1.3) \quad \tau^{ij}|_j = \rho \ddot{u}^i.$$

Przez u_i , ε_{ij} , τ^{ij} oraz ρ oznaczono tutaj odpowiednio wektor przemieszczenia, tensory odkształcenia i naprężenia oraz gęstość. Pionowa kreska oznacza różniczkowanie kowariantne, kropka — różniczkowanie względem czasu (w teorii liniowej różniczkowanie cząstkowe i materialne są nieodróżnialne), a λ oraz μ są stałymi Lamégo.

Podstawienie (1.1) oraz (1.2) do (1.3) prowadzi do następującego układu równań:

$$(1.4) \quad \mathcal{L}_{ir} u^r = B_{ik}^r u^k|_{rs} - \rho \ddot{u}_i = 0,$$

gdzie

$$(1.5) \quad B_i^r s = \lambda g_i^r g_k^s + \mu g_{ik} g^{rs} + \mu g_i^s g_r^k.$$

Obliczenia będziemy prowadzili w kulistym układzie współrzędnych $\theta^i = (r, \vartheta, \varphi)$. Jeśli przez $x^i = (x, y, z)$ oznaczymy współrzędne kartezjańskie punktu θ^i , to zachodzą związki

$$(1.6) \quad x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta.$$

Oznaczmy przez e_k jednostkowe wektory w kierunku x^k , a przez g_k wektory bazy układu θ^k . Zachodzą związki

$$(1.7) \quad \begin{aligned} g_1 &= e_1 \sin \vartheta \cos \varphi + e_2 \sin \vartheta \sin \varphi + e_3 \cos \vartheta, \\ g_2 &= e_1 \cos \vartheta \cos \varphi + e_2 \cos \vartheta \sin \varphi - e_3 \sin \vartheta, \\ g_3 &= e_1 \sin \vartheta \sin \varphi + e_2 \sin \vartheta \cos \varphi. \end{aligned}$$

Współrzędne tensora metrycznego i symbole Christoffella są odpowiednio równe:

$$(1.8) \quad g_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{bmatrix}, \quad g^{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 \sin^2 \vartheta \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \vartheta, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \vartheta \cos \vartheta,$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \operatorname{ctg} \vartheta; \quad \text{pozostałe } \Gamma_{km}^i = 0.$$

Symbole Christoffella pozwalają wyrazić pochodne kowariantne $u_{i|k}$, $u_{i|km}$ przez pochodne cząstkowe $u_{i,k}$, $u_{i,km}$:

$$\begin{aligned} u_{i|k} &= u_{i,k} - \Gamma_{ik}^r u_r, \\ u_{i|km} &= (u_{i|k})_{,m} - \Gamma_{im}^r (u_r|k) - \Gamma_{km}^r (u_{i|r}). \end{aligned}$$

Na podstawie (1.5) i (1.8) otrzymujemy następujące wzory na współrzędne tensora $B_i^r s$ (w kulistym układzie współrzędnych):

$$(1.9) \quad \begin{aligned} B_{11}^{11} &= \lambda + 2\mu, & B_{11}^{22} &= \frac{\mu}{r^2}, & B_{11}^{33} &= \frac{\mu}{r^2 \sin^2 \vartheta}, \\ B_{12}^{12} &= B_{13}^{13} = \lambda, & B_{12}^{21} &= B_{13}^{31} = \mu, \\ B_{22}^{11} &= \mu r^2, & B_{22}^{22} &= \lambda + 2\mu, & B_{22}^{33} &= \frac{\mu}{\sin^2 \vartheta}, \\ B_{21}^{21} &= B_{23}^{23} = \lambda, & B_{21}^{12} &= B_{23}^{32} = \mu, \\ B_{33}^{11} &= \mu r^2 \sin^2 \vartheta, & B_{33}^{22} &= \mu \sin^2 \vartheta, & B_{33}^{33} &= \lambda + 2\mu, \\ B_{31}^{31} &= B_{32}^{32} = \lambda, & B_{31}^{13} &= B_{32}^{23} = \mu; & \text{pozostałe } B_i^r s &= 0. \end{aligned}$$

Podstawiając z kolei (1.9) do równań ruchu (1.4) i oznaczając $u_i = (u, v, w)$, $\partial u / \partial r = u_r$ itd., otrzymujemy następujący układ równań:

$$(1.10) \quad (\lambda + 2\mu) \left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r - \frac{2}{r^2} u \right) + \frac{1}{r^2} \mu \left(u_{\vartheta\vartheta} + u_{\vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} u_{\varphi\varphi} \right) + \\ + \frac{1}{r^2} (\lambda + \mu) (v_{r\vartheta} + v_r \operatorname{ctg} \vartheta) - \frac{2}{r^3} (\lambda + 2\mu) (v_{\vartheta} + v \operatorname{ctg} \vartheta) + \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} (\lambda + \mu) w_{r\varphi} - \frac{2}{r^2 \sin^2 \vartheta} (\lambda + 2\mu) w_{\varphi} = \rho \ddot{u}_r$$

$$(1.11) \quad (\lambda + 2\mu) u_{r\vartheta} + \frac{2}{r} (\lambda + 2\mu) u_{\vartheta} + \mu \left(v_{rr} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} v_{\varphi\varphi} \right) + \\ + \frac{1}{r^2} (\lambda + 2\mu) \left(v_{\vartheta\vartheta} + v_{\vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} v \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} (\lambda + \mu) w_{\vartheta\varphi} - \\ - \frac{2}{r^2 \sin^2 \vartheta} (\lambda + 2\mu) w_{\varphi} \operatorname{ctg} \vartheta = \rho \ddot{v}_r$$

$$(1.12) \quad (\lambda + \mu) u_{r\varphi} + \frac{2}{r} (\lambda + 2\mu) u_{\varphi} + \frac{1}{r^2} (\lambda + \mu) v_{\vartheta\varphi} + \frac{1}{r^2} (\lambda + 3\mu) v_{\varphi} \operatorname{ctg} \vartheta + \\ + \mu \left(w_{rr} + \frac{1}{r^2} w_{\vartheta\vartheta} - \frac{1}{r^2} w_{\vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} (\lambda + 2\mu) w_{\varphi\varphi} = \rho \ddot{w}_r$$

Z powyższego układu będziemy korzystali przy dyskusji otrzymanych dalej rozwiązań. Nie jest on podstawą rozważań nad falą kulistą.

2. FALA PRZYSPIESZENIA

Rozważmy ruchomą powierzchnię \mathcal{S} , na której drugie pochodne wektora przemieszczenia u_i są nieciągłe. Pierwsze pochodne i przemieszczenie u_i są ciągłe w całym obszarze. Niech równanie powierzchni \mathcal{S} będzie równaniem następującym:

$$(2.1) \quad t = \Psi(\theta^k), \quad \Phi(\theta^k, t) \stackrel{\text{def}}{=} \Psi(\theta^k) - t = 0.$$

Powierzchnia \mathcal{S} może oddzielać obszar zaburzony od niezaburzonego. W takiej sytuacji zaburzenie dochodzi do punktu θ^k w chwili $t = \Psi(\theta^k)$. Wektor jednostkowy normalny do \mathcal{S} oznaczmy przez n_i , a prędkość powierzchni \mathcal{S} w kierunku normalnej n_i przez U . Zachodzą związki (por. np. [1])

$$(2.2) \quad n_i = \frac{\Psi_i}{\sqrt{\Psi_r \Psi^r}}, \quad U = \frac{1}{\sqrt{\Psi_r \Psi^r}}.$$

Dla krótkości zapisu pochodne funkcji Ψ oraz Φ oznaczamy indeksem bez przecinka.

Ponieważ pierwsze pochodne wektora przemieszczenia u_i są ciągłe na \mathcal{S} , więc skoki drugich pochodnych tego wektora muszą spełniać związki

$$(2.3) \quad [[u_i]_{rs}] = a_i n_r n_s, \quad [[\dot{u}_i]_r] = -a_i U n_r, \quad [[\ddot{u}_i]] = a_i U^2.$$

Podwójnym nawiasem oznaczono skok. Wektor a_i określa wielkość skoku i jest nazywany amplitudą. Szczegółowe wyprowadzenie związków (2.3), które przedstawiają szczególny przypadek geometrycznych i kinematycznych warunków zgodności, podane jest np. w [1]. Ogół zjawisk na powierzchni \mathcal{S} , na której pierwsze pochodne przemieszczenia są ciągłe, a drugie nieciągłe, nazywamy falą przyspieszenia. Zgodnie z (2.3) skokowi przyspieszenia zawsze towarzyszy skok gradientu prędkości.

Równanie ruchu (1.4) spełnione jest po obu stronach powierzchni \mathcal{S} . Ponieważ $B_i^{r,s}$ oraz ρ są ciągłe, więc spełnione jest równanie

$$(2.4) \quad B_i^{r,s} \llbracket u^k \rrbracket_{rs} = \rho \llbracket \dot{u}_i \rrbracket.$$

Podstawiając do tego równania związki (2.3) otrzymuje się warunek propagacji powierzchni \mathcal{S} :

$$(2.5) \quad (Q_{ik} - \rho U^2 g_{ik}) a^k = 0,$$

gdzie Q_{ik} jest tensorem akustycznym, odpowiadającym kierunkowi propagacji n_i :

$$(2.6) \quad Q_{ik} = B_i^{r,s} n_r n_s.$$

Tensor ten jest tensorem symetrycznym. Zgodnie z (2.5) amplituda a_i jest wektorem własnym, a iloczyn ρU^2 wartością własną tensora Q_{ik} . Wektory własne, odpowiadające różnym wartościom własnym, są wzajemnie ortogonalne.

Ograniczymy się teraz do punktowo-symetrycznej powierzchni nieciągłości o równaniu

$$(2.7) \quad t = \Psi(r).$$

Ponieważ normalna do tej powierzchni ma składowe

$$(2.8) \quad n_i = (1, 0, 0),$$

zgodnie więc z (2.6) otrzymujemy tensor akustyczny:

$$(2.9) \quad Q_{ik} = B_i^{1,k^1} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu r^2 \sin^2 \vartheta \end{bmatrix}.$$

Warunek propagacji (2.5) prowadzi w tym przypadku do wniosku, że istnieją trzy możliwe amplitudy i trzy odpowiadające im prędkości propagacji:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} a^k &= (1, 0, 0), & U &= \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \\ a^k &= (0, 1, 0), & U &= \sqrt{\mu/\rho}, \\ a^k &= (0, 0, 1), & U &= \sqrt{\mu/\rho}. \end{aligned}$$

Pierwsza z amplitud jest równoległa do kierunku propagacji n_k . Falę odpowiadającą tej amplitudzie nazywamy falą podłużną. Pozostałe amplitudy są ortogonalne

do kierunku propagacji $a^k \perp n_k$, $a^k \perp n_k$. Fale odpowiadające tym amplitudom nazywamy falami poprzecznymi. W dalszych punktach niniejszej pracy zajmiemy się bliższą analizą fali podłużnej. Rozważania dla fali poprzecznej przebiegałyby dokładnie w ten sam sposób.

3. PODŁUŻNA FALA PRZYSPIĘZENIA

W celu uproszczenia zapisu będziemy pomijali wszędzie wskaźnik 1 (por. (2.10)). Mamy więc

$$(3.1) \quad a^k = (1, 0, 0), \quad U = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}.$$

Jak wynika ze związków (2.2) oraz (2.1) funkcje Ψ oraz Φ są następujące:

$$(3.2) \quad \Psi = \frac{r}{U}, \quad \Phi = \frac{r}{U} - t.$$

Przedstawmy przemieszczenie u_i w postaci nieskończonego szeregu:

$$(3.3) \quad u^i(\theta^k, t) = \sum_{v=0}^{\infty} S_{v+2}(\Phi) g_v^i(\theta^k, t),$$

$$S_v = \frac{1}{v!} \left[\frac{1}{2} (|\Phi| + \Phi) \right]^v, \quad v = 1, 2, 3, \dots$$

Zgodnie z (3.3) przemieszczenie u^i oraz jego pierwsze pochodne są ciągłe na \mathcal{S} . Nieciągła jest druga pochodna i pochodne wyższych rzędów. Bliższe uzasadnienie celowości takiego przedstawienia funkcji u_i podane jest w [2] oraz [3]. Istotne znaczenie ma następująca własność funkcji $S_v(\Phi)$:

$$(3.4) \quad \frac{dS_v(\Phi)}{d\Phi} = S_{v-1}, \quad v = 1, 2, 3, \dots$$

Funkcje S_v są liniowo niezależne. Funkcja S_0 jest funkcją Heaviside'a.

Podstawiając wyrażenie (3.3) do równań ruchu (1.4) otrzymujemy równanie postaci

$$\sum_{v=0}^{\infty} S_v(\Phi) R_v(\theta^k, t) = 0.$$

Równanie to można spełnić przyrównując wszystkie R_v do zera. Otrzymujemy w ten sposób układ równań na funkcje $g_v^i(\theta^k, t)$:

$$(3.5) \quad (B_{i k}^r \Phi_r \Phi_s - \rho g_{ik}) g_0^k = 0,$$

$$(3.6) \quad (B_{i k}^r \Phi_r \Phi_s - \rho g_{ik}) g_1^k + (B_{i k}^r \Phi_r g_0^k|_s + B_{i k}^r \Phi_s g_0^k|_r + 2\rho g_{ik} \dot{g}_0^k) + (B_{i k}^r \Phi_r|_s + B_{i k}^r|_r \Phi_s) \dot{g}_0^k = 0,$$

$$(3.7) \quad (B_{i k}^r \Phi_r \Phi_s - \rho g_{ik}) g_{v+2}^k + (B_{i k}^r \Phi_r g_v^k|_s + B_{i k}^r \Phi_s g_v^k|_r + 2\rho g_{ik} \dot{g}_{v+1}^k) + (B_{i k}^r \Phi_r|_s + B_{i k}^r|_r \Phi_s) g_{v+1}^k + \mathcal{L}_{ir} g_v^r = 0, \quad v = 0, 1, 2, \dots$$

Zauważmy, że wyrażenie występujące w pierwszym nawiasie każdego z równań (3.5), (3.6) i (3.7) jest proporcjonalne do $(Q_{ik} - \rho U^2 g_{ik})$. Zgodnie z (2.5) zachodzi więc związek

$$(3.8) \quad g_0^k = \kappa_0 a^k,$$

gdzie $\kappa_0 = \kappa_0(\theta^k, t)$ jest skalarnym parametrem. Zgodnie z (3.1) mamy więc

$$(3.9) \quad g_0^1 = \kappa_0, \quad g_0^2 = g_0^3 = 0.$$

W celu wyznaczenia parametru κ_0 pomnożmy równanie (3.6) przez a^l . Zostaje w ten sposób wyrugowana funkcja g_1^k [por. warunek propagacji (2.5)] i równanie to zawiera tylko jedną niewiadomą κ_0 . Wprowadźmy krzywą $\theta^i = \theta^i(v)$, $t = t(v)$ określoną równaniami różniczkowymi

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \frac{d\theta^s}{dv} &= (B_i^r{}^s + B_i^s{}^r) \Phi_r a^i a^k, \\ \frac{dt}{dv} &= 2\rho g_{ik} a^i a^k. \end{aligned}$$

Podstawienie (1.9), (3.1) oraz (3.2) do (3.10) prowadzi do równań

$$(3.11) \quad \frac{dr}{dv} = 2\rho U, \quad \frac{d\vartheta}{dv} = \frac{d\varphi}{dv} = 0, \quad \frac{dt}{dv} = 2\rho.$$

Po scałkowaniu i pominięciu nieistotnych dla dalszych obliczeń stałych całkowania otrzymujemy

$$(3.12) \quad r = 2\rho Uv, \quad \vartheta = \text{const}, \quad \varphi = \text{const}, \quad t = 2\rho v.$$

Równania (3.10)–(3.12) są równaniami bicharakterystyki równania ruchu (1.4). Ich część przestrzenna jest równaniem promienia akustycznego. Pokrywa się on z prostą $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$. Celowość wprowadzenia bicharakterystyki polega na tym, że równanie (3.6) pomnożone przez a^l sprowadza się do równania wzdłuż bicharakterystyki:

$$(3.13) \quad \frac{d\kappa_0}{dv} + \frac{\kappa_0}{v} = 0.$$

Zgodnie z (3.12) otrzymujemy stąd

$$(3.14) \quad \frac{d\kappa_0}{dr} + \frac{\kappa_0}{r} = 0,$$

$$(3.15) \quad \kappa_0 = C_0 \frac{1}{r},$$

gdzie C_0 jest stałą.

Przejdziemy do wyznaczenia z kolei funkcji g_1^k . Podstawiając wyliczone wyżej g_0^k do równania (3.6) otrzymujemy równanie

$$(3.16) \quad (B_i^r{}^s \Phi_r \Phi_s - \rho g_{ik}) g_1^k = 0.$$

Ponieważ wielkość w nawiasie jest proporcjonalna do wielkości w nawiasie w warunku propagacji (2.5), zachodzi więc równość

$$(3.17) \quad g_1^k = \kappa_1 a^k,$$

gdzie κ_1 jest nieznaną funkcją. W celu wyznaczenia tej funkcji mnożymy równanie (3.7) dla $\nu=0$ przez a^i eliminując w ten sposób funkcję g_2^k . Podstawiając do tak otrzymanego równania amplitudę a^k oraz wyznaczone wyżej g_0^k otrzymujemy równanie na funkcję κ_1 :

$$(3.18) \quad \frac{d\kappa_1}{dv} + \frac{\kappa_1}{v} = \frac{C_0}{4\rho^2 Uv^3}.$$

Po zamianie zmiennych (3.12) równanie to przechodzi w równanie

$$(3.19) \quad \frac{d\kappa_1}{dr} + \frac{\kappa_1}{r} = \frac{C_0 U}{r^3},$$

którego ogólnym rozwiązaniem jest funkcja

$$(3.20) \quad \kappa_1 = \frac{C_1}{r} - \frac{C_0 U}{r^2}.$$

Przez C_1 oznaczono stałą całkowania. Postępując w analogiczny sposób z równaniem (3.7) dla $\nu=1, 2, 3, \dots$ otrzymalibyśmy ostatecznie przemieszczenie u^i w postaci

$$(3.21) \quad u^i = [C_0(\dots) + C_1(\dots) + C_2(\dots) + \dots] a^i.$$

Każde z wyrażeń przy C_ν , $\nu=0, 1, 2, \dots$ jest rozwiązaniem, którego pochodne rzędu $\nu+2$ są nieciągłe na powierzchni \mathcal{S} . Rozwiązanie (3.21) przedstawia więc sumę fali przyspieszenia oraz fali rzędu trzeciego, czwartego itd. Ponieważ zamierzamy rozważać tylko falę przyspieszenia, więc przyjmiemy, że stałe dowolne C_1, C_2, C_3, \dots są równe zero. Związek (3.20) zastępujemy więc związkiem

$$(3.22) \quad \kappa_1 = -\frac{C_0 U}{r^2}.$$

Podstawiając otrzymane wyżej g_0^k oraz g_1^k do równania (3.7), dla $\nu=0$ otrzymujemy równanie

$$(3.23) \quad (B_i^r{}^s \Phi_r \Phi_s - \rho g_{ik}) g_2^k = 0,$$

które prowadzi do związku

$$(3.24) \quad g_2^k = \kappa_2 a^k.$$

Funkcję κ_2 można wyznaczyć w taki sam sposób, jak funkcje κ_0 oraz κ_1 . Spełnia ona równanie

$$(3.25) \quad \frac{d\kappa_2}{dr} + \frac{\kappa_2}{r} = 0,$$

którego rozwiązaniem jest funkcja

$$(3.26) \quad \kappa_2 = \frac{C_2}{r}.$$

Zgodnie z podaną wyżej dyskusją przyjmujemy $C_2=0$. Wszystkie pozostałe g_v^k oraz κ_v spełniają takie same związki, jak g_2^k oraz κ_2 . Zgodnie więc z (3.3), (3.15) oraz (3.22) otrzymujemy rozwiązanie dla kulistej fali przyspieszenia:

$$(3.27) \quad u^k = C_0 a^k \left[\frac{1}{r} S_2(\Phi) - \frac{U}{r^2} S_3(\Phi) \right].$$

4. PODŁUŻNA FAŁA BIEŻĄCA

Jak wyżej podkreśliliśmy, istotne znaczenie przy konstruowaniu rozwiązania (3.27) ma własność (3.4) funkcji $S_v(\Phi)$, a nie szczególna budowa tej funkcji określona przez (3.3). Wynika stąd, że ze wzoru (3.27) można natychmiast otrzymać inne rozwiązanie, jeśli funkcję $S_v(\Phi)$ zastąpić dowolną funkcją $T_v(\Phi)$ spełniającą tożsamość

$$(4.1) \quad \frac{dT_v}{d\Phi} = T_{v-1}.$$

Funkcją taką jest w szczególności funkcja

$$(4.2) \quad T_v(\Phi) = \frac{1}{(i\omega)^v} e^{i\omega\Phi},$$

gdzie ω jest ustalonym parametrem. Zgodnie z (3.27) rozwiązaniem równań ruchu jest więc funkcja

$$(4.3) \quad u^k = C_0 a^k \left(\frac{1}{r} - \frac{U}{i\omega r^2} \right) e^{i\omega\Phi}.$$

Rozwiązanie to nazywamy falą bieżącą. Zgodnie z (3.1) i (3.2) mamy więc

$$(4.4) \quad u = C_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{U}{i\omega r^2} \right) \exp \left[i\omega \left(\frac{r}{U} - t \right) \right], \quad v = w = 0.$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja (4.4) spełnia tożsamościowo równania ruchu (1.10)–(1.12). Rozważania podane w poprzednim punkcie miały na celu wyselekcjonowanie rozwiązania o określonej budowie, ściśle związanego z kulistą, podłużną falą przyspieszenia. Należy podkreślić, że żądanie $u = u(r, t)$, $w = 0$, $v = w = 0$ nie prowadzi bezpośrednio do rozwiązania (4.4), gdyż rozwiązaniem spełniającym te warunki jest np. funkcja

$$u = \frac{1}{r} J_{3/2} \left(\frac{\omega r}{U} \right) e^{i\omega t}.$$

Wzór (4.4) przedstawia formalne, zespolone rozwiązanie równań ruchu. W celu znalezienia rozwiązania rzeczywistego należy zbudować odpowiednią kombinację

liniową rozwiązań (4.4). Ponieważ (4.4) jest rozwiązaniem dla każdego ω i każdego C_0 , więc rozwiązaniem jest również funkcja

$$(4.5) \quad C_0^* \left(\frac{1}{r} - \frac{U}{-i\omega r^2} \right) \exp \left[-i\omega \left(\frac{r}{U} - t \right) \right],$$

gdzie C_0^* oznacza liczbę zespoloną sprzężoną z C_0 . Jest widoczne, że rozwiązanie (4.5) jest równe u^* . Rozwiązaniem rzeczywistym jest więc

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{1}{2} (u + u^*) = \operatorname{Re} u, \\ &= \operatorname{Re} \left\{ C_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{U}{i\omega r^2} \right) \exp \left[i\omega \left(\frac{r}{U} - t \right) \right] \right\}, \quad v = w = 0, \end{aligned}$$

co po rozwinięciu funkcji wykładniczej prowadzi do rozwiązania

$$(4.7) \quad \begin{aligned} u &= \frac{D_0}{r} \sqrt{1 + \frac{U^2}{\omega^2 r^2}} \cos \left[\omega \left(\frac{r}{U} - t \right) - \alpha \right], \quad v = w = 0, \\ \alpha &= \arctg \left(-\frac{U}{\omega r} \right), \end{aligned}$$

gdzie D_0 jest dowolną stałą rzeczywistą. Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest fazą. Powierzchnie stałej fazy są w rozpatrywanym przypadku powierzchniami $r = \text{const}$. Prędkość punktu przecięcia powierzchni stałej fazy

$$(4.8) \quad \omega \left(\frac{r}{U} - t \right) - \arctg \left(-\frac{U}{\omega r} \right) = \text{const}$$

z promieniem akustycznym, a więc prostą $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ jest prędkością fazową U_f . Równanie (4.8) definiuje funkcję $r = r(t)$, dla której $dr/dt = U_f$. Różniczkując (4.8) względem czasu, otrzymujemy

$$(4.9) \quad U_f = U \left[1 - \frac{U^2}{\omega^2 r^2 + U^2} \right]^{-1}$$

Jest widoczne, że $U_f \geq U$. Jeśli $r \rightarrow \infty$, to prędkość fazowa dąży do prędkości propagacji U .

Przejdziemy do prędkości grupowej. Rozważmy w tym celu dwie fale o częstościach $\omega + \Delta\omega$ oraz $\omega - \Delta\omega$, gdzie $\Delta\omega$ jest infitezymalnie małe. Przemieszczenie jest w tym przypadku określone wzorem

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{D_0}{r} \sqrt{1 + \frac{U^2}{(\omega + \Delta\omega)^2 r^2}} \cos \left[(\omega + \Delta\omega) \left(\frac{r}{U} - t \right) - \arctg \left(-\frac{U}{(\omega + \Delta\omega) r} \right) \right] + \\ &+ \frac{D_0}{r} \sqrt{1 + \frac{U^2}{(\omega - \Delta\omega)^2 r^2}} \cos \left[(\omega - \Delta\omega) \left(\frac{r}{U} - t \right) - \arctg \left(-\frac{U}{(\omega - \Delta\omega) r} \right) \right]. \end{aligned}$$

Po rozwinięciu w szereg i pominięciu $\Delta\omega$ w potęgach wyższych niż jeden otrzymujemy

$$(4.11) \quad \bar{u} = \left[\frac{D_0}{r} \sqrt{1 + \frac{U^2}{\omega^2 r^2}} \cos \Delta\omega \left(\frac{r}{U} - t - \frac{rU}{\omega^2 r^2 + U^2} \right) \right] \times \\ \times \cos \left[\omega \left(\frac{r}{U} - t \right) - \text{arc tg} \left(-\frac{U}{\omega r} \right) \right].$$

Rozwiązanie to przedstawia fale (4.7) z amplitudą zmieniającą się w czasie i przestrzeni tak, jak wyrażenie w pierwszym nawiasie. Amplituda ta jest stała na powierzchniach, na których

$$(4.12) \quad \frac{r}{U} - t - \frac{rU}{\omega^2 r^2 + U^2} = \text{const.}$$

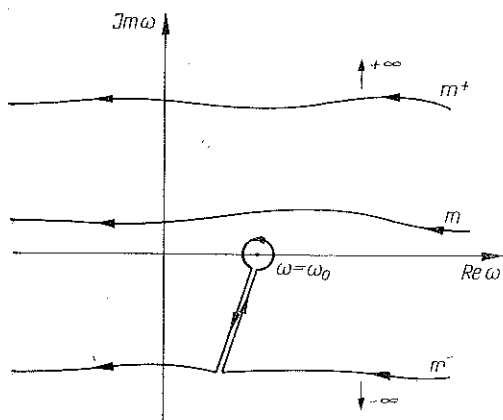
Prędkość punktu przecięcia tych powierzchni z prostą $\mathcal{G} = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ jest prędkością grupową U_g . Równanie (4.12) definiuje funkcję $r = r(t)$, przy czym $dr/dt = U_g$. Różniczkując względem czasu otrzymujemy

$$(4.13) \quad U_g = U \left[1 - \frac{U^2}{\omega^2 r^2 + U^2} + \frac{2r^2 \omega^2 U^2}{(\omega^2 r^2 + U^2)^2} \right]^{-1}.$$

Ze związków (4.13) i (4.9) wynika $U_g \leq U_f$. Jeśli $r \rightarrow \infty$, to prędkość grupowa dąży do prędkości propagacji U . Łatwo pokazać, że dla dostatecznie dużych częstotliwości ω zachodzi związek

$$(4.14) \quad U_g U_f = U^2.$$

Dla $r\omega < U$ prędkość grupowa jest większa od prędkości propagacji U .



Rys. 1

Omówimy teraz prędkość sygnału U_s . Sygnał nadany w pewnym, ustalonym punkcie r_0 zdefiniowany jest funkcją

$$(4.15) \quad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ \sin \omega_0 t & \text{dla } t \geq 0. \end{cases}$$

Częstość ω_0 jest częstością sygnału. Funkcja (4.15) może być napisana w dogodniejszej postaci

$$(4.16) \quad g(t) = \frac{1}{2\pi} \text{Re} \int_m \frac{d\omega}{\omega - \omega_0} e^{-i\omega t},$$

gdzie m jest dowolną krzywą leżącą ponad punktem $\omega = \omega_0$, (rys. 1). Na

krzywej m^+ mamy $\omega = \text{Re } \omega + i\infty$ i funkcja podcałkowa dąży do zera dla $t < 0$, a więc $g(t) = 0$ dla $t < 0$. Krzywa m^- okrąża punkt osobliwy $\omega = \omega_0$. Całka (4.16) jest w tym przypadku dla $t > 0$ równa residuum w punkcie $\omega = \omega_0$, które jest równe

$2\pi i \exp(-i\omega_0 t)$. Sygnał (4.15) został więc rozłożony na drgania sinusoidalne o częstościach ω , $-\infty < \omega < \infty$ i amplitudach $d\omega/2\pi(\omega - \omega_0)$.

Zgodnie z (4.4) i (4.6) fala bieżąca o częstości ω powoduje w punkcie r_0 przemieszczenie

$$(4.17) \quad \tilde{u}(r_0, t) = \text{Re} \left\{ \left[C_0 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{U}{i\omega r_0^2} \right) e^{i\omega \frac{r_0}{U}} \right] e^{-i\omega t} \right\}.$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest niezależne od czasu. Drgania (4.17) powodują więc w punkcie r przemieszczenie (4.6). Należy podkreślić, że drgania te nie są sygnałem w sensie podanej wyżej definicji, gdyż nie rozpoczęły się w chwili $t=0$. Drgania

$$(4.18) \quad \text{Re} \frac{d\omega}{\omega - \omega_0} e^{-i\omega t}$$

powodują w punkcie r przemieszczenie (4.6) pomnożone przez stosunek amplitud drgań (4.18) i (4.17). Przemieszczenie w punkcie r , wywołane przez drgania (4.18), jest więc równe

$$(4.19) \quad \text{Re} \frac{d\omega}{\omega - \omega_0} \frac{\left(\frac{1}{r} - \frac{U}{i\omega r^2} \right) \exp i\omega \left(\frac{r}{U} - t \right)}{\left(\frac{1}{r_0} - \frac{U}{i\omega r_0^2} \right) \exp i\omega \frac{r_0}{U}}.$$

Przemieszczenie w punkcie r wywołane sygnałem (4.15) jako suma przemieszczeń wywołanych przez drgania postaci (4.18) jest ostatecznie równe

$$(4.20) \quad \tilde{u} = \frac{1}{2\pi} \text{Re} \int_m \frac{d\omega}{\omega - \omega_0} \frac{\frac{1}{r} - \frac{U}{i\omega r^2}}{\frac{1}{r_0} - \frac{U}{i\omega r_0^2}} \exp i\omega \left(\frac{r-r_0}{U} - t \right)$$

lub po przekształceniu

$$(4.21) \quad \tilde{u} = \frac{1}{2\pi} \frac{r_0^2}{r^2} \text{Re} \int_m \frac{d\omega}{\omega - \omega_0} \frac{i\omega r - U}{i\omega r_0 - U} \exp i\omega \left(\frac{r-r_0}{U} - t \right).$$

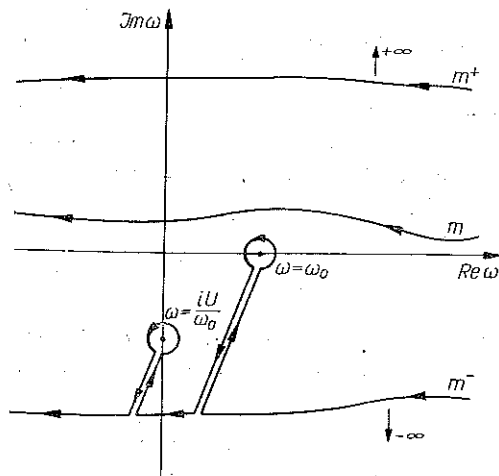
Należy zwrócić uwagę, że funkcja podcałkowa ma oprócz bieguna $\omega = \omega_0$ funkcji podcałkowej w (4.16) również biegun

$$(4.22) \quad \omega = -\frac{iU}{r_0}.$$

To pojawienie się nowego bieguna wymaga dokładniejszego ustalenia krzywej całkowania m . Jak podkreślono wyżej przechodzi ona ponad punktem $\omega = \omega_0$. Gdyby przechodziła ona poniżej bieguna (4.22), to otrzymalibyśmy dla $t=0$, $r > r_0$ przemieszczenie \tilde{u} proporcjonalne do residuum w punkcie $\omega = -iU/r_0$, które nie jest równe zero. Zaczynający się w chwili $t=0$ sygnał nie może jednak wywołać przemieszczenia w punkcie $r > r_0$ już w chwili $t=0$. Stąd wniosek, że krzywa całkowania m przechodzi ponad punktem osobliwym (4.22) (krzywa m na rys. 2).

Całki wzdłuż krzywych m , m^+ , m^- (rys. 2) są sobie równe. Na krzywej m^+ dla $tU < r - r_0$ funkcja podcałkowa jest równa zeru. Zachodzi więc związek

$$(4.23) \quad \tilde{u} = 0 \quad \text{dla} \quad r - r_0 > tU.$$



Rys. 2

Całkujemy z kolei wzdłuż krzywej m^- (rys. 2). Krzywa ta obiega punkty osobliwe $\omega = \omega_0$ i $\omega = -iU/r_0$. Dla $r - r_0 < Ut$ funkcja wykładnicza jest w tym przypadku w nieskończoności równa zeru, a całka jest równa sumie residuum w punkcie $\omega = \omega_0$ i residuum w punkcie $\omega = -iU/r_0$:

$$(4.24) \quad \tilde{u} = \frac{r_0^2}{r^2} \operatorname{Re} i \left[\frac{U - i\omega_0 r}{U - i\omega_0 r_0} \exp i\omega_0 \left(\frac{r - r_0}{U} - t \right) + \frac{U}{U - r\omega_0 r_0} \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right) \exp \frac{U}{r_0} \left(\frac{r - r_0}{U} - t \right) \right] \quad \text{dla} \quad r - r_0 < Ut.$$

Jest widoczne, że zaburzenie rozchodzi się z prędkością propagacji U (por. (4.23) i (4.24)). Proste przekształcenia prowadzą do wzoru

$$(4.25) \quad \tilde{u} = \frac{r_0^2}{r^2} \frac{1}{U^2 + \omega_0^2 r^2} \left[(U^2 + \omega_0^2 r r_0) \sin \omega_0 \left(t - \frac{r - r_0}{U} \right) + \omega_0 U (r - r_0) \cos \omega_0 \left(t - \frac{r - r_0}{U} \right) - \omega_0 U (r - r_0) \exp \left(-\frac{U}{r_0} \left(t - \frac{r - r_0}{U} \right) \right) \right]$$

dla $r - r_0 < Ut$.

Jeśli $\omega_0 r_0 \gg U$ lub $\omega_0 r_0 \ll U$, to decydujące znaczenie ma pierwszy wyraz w nawiasie kwadratowym. Przedstawia on drgania sinusoidalne o częstotliwości ω_0 , które rozpoczynają się w chwili $t = (r - r_0)/U$. Suma wyrazu drugiego i trzeciego jest wtedy równa zeru. W chwili dojścia zaburzenia do punktu r jest więc $\tilde{u} = 0$. Dla dużych

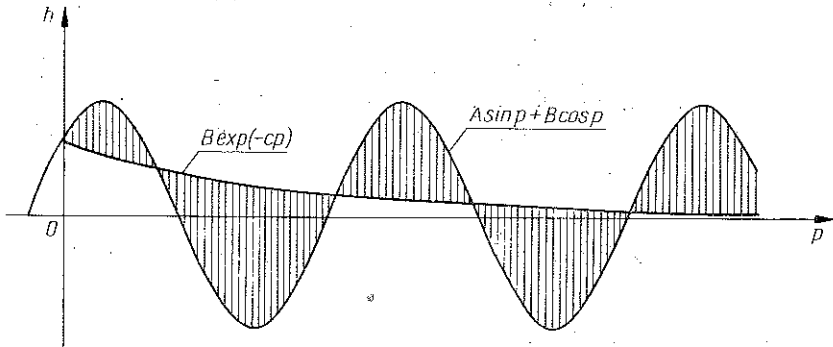
t ustalają się drgania, które są sumą dwu pierwszych wyrazów w nawiasie, a więc drgania postaci

$$\sin \omega_0 \left(t - \frac{r-r_0}{U} + \text{const} \right).$$

Dla $p = \omega_0 [t - (r-r_0)/U]$ typowy kształt funkcji

$$h = A \sin p + B [\cos p - \exp(-Cp)]$$

[A, B, C są to stałe; por. (4.25)] pokazany jest na rys. 3. Zaburzenie dochodzi do punktu r w chwili $t = (r-r_0)/U$. Sygnał odebrany w tym punkcie jest zdeformowaną



Rys. 3

sinusoidą (rzędne funkcji $h(p)$ zaznaczone są liniami pionowymi). Pierwsza połówka tej sinusoidy może być niewykrywalna dla odbiornika sygnału (urządzenia mierzącego przemieszczenie), który zawsze ma pewien próg czułości. Odbiornik ten reaguje dopiero na dostatecznie duże przemieszczenie, które pojawia się w chwili późniejszej niż $t = (r-r_0)/U$. Czas przejścia sygnału jest więc większy niż czas przejścia frontu fali. Wynika stąd, że prędkość sygnału U_s jest mniejsza niż prędkość propagacji U , $U_s < U$.

5. SUPERPOZYCJA FAL KULISTYCH I SUPERPOZYCJA FAL PŁASKICH

Podamy na koniec prostą interpretację fali bieżącej (4.4). Niech \mathbf{r} oznacza wektor położenia punktu (r, ϑ, φ) , a \mathbf{n} wektor jednostkowy. Jednym z rozwiązań równań (1.4) jest funkcja

$$(5.1) \quad \mathbf{u} = \mathbf{n} \exp i \omega \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{U} - t \right), \quad U = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}.$$

Funkcja ta przedstawia płaską falę sinusoidalną. Składowa przemieszczenia \mathbf{u} w kierunku wektora \mathbf{r} jest równa

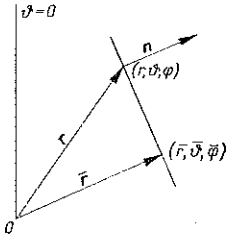
$$(5.2) \quad u_r = \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r} \exp i \omega \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{U} - t \right).$$

Oznaczmy przez $(\bar{r}, \bar{\vartheta}, \bar{\varphi})$ współrzędne tego punktu, dla którego wektor położenia $\bar{\mathbf{r}}$ jest kolinearny z wektorem \mathbf{n} i dla którego $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = n \cdot \bar{r}$ (por. rys. 4). Oczywiście

$$(5.3) \quad \mathbf{r} = r \mathbf{g}_1(r, \vartheta, \varphi), \quad \mathbf{n} = \mathbf{g}_1(\bar{r}, \bar{\vartheta}, \bar{\varphi}),$$

a więc zgodnie z (1.7)

$$(5.4) \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = r (\sin \vartheta \sin \varphi \sin \bar{\vartheta} \sin \bar{\varphi} + \sin \vartheta \cos \varphi \sin \bar{\vartheta} \cos \bar{\varphi} + \cos \vartheta \cos \bar{\vartheta}).$$



Rys. 4

Wyznamy przemieszczenie \mathbf{u} odpowiadające nałożeniu się fal propagujących się we wszystkich możliwych kierunkach półprzestrzeni z jednakowymi intensywnościami. Należy w tym celu scałkować (5.2) po powierzchni półkuli. Ze względu na symetrię zagadnienia styczne składowe przemieszczenia \mathbf{u} są równe zeru. Dla wygody obliczeń będziemy wyznaczać całkowite przemieszczenie promieniowe w punkcie $(r, 0, \varphi)$. Mamy więc

$$(5.5) \quad u = |\mathbf{u}| = \int_0^{\pi/2} d\bar{\vartheta} \int_0^{2\pi} d\bar{\varphi} \sin \bar{\vartheta} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r} \exp i\omega \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{U} - t \right)$$

lub po podstawieniu (5.4) dla $\vartheta = 0$

$$(5.6) \quad u = \int_0^{\pi/2} d\bar{\vartheta} \int_0^{2\pi} \sin \bar{\vartheta} \cos \bar{\vartheta} \exp i\omega \left(\frac{r \cos \bar{\vartheta}}{U} - t \right).$$

Całkowanie względem $\bar{\varphi}$ jest elementarne. Przez podstawienie $s = \cos \bar{\vartheta}$ sprowadzamy całkę względem $\bar{\vartheta}$ do całki

$$(5.7) \quad \int s ds \exp i\omega \left(\frac{rs}{U} - t \right) = \left(\frac{sU}{i\omega r} - \frac{U^2}{(i\omega r)^2} \right) \exp i\omega \left(\frac{rs}{U} - t \right).$$

Podstawiając odpowiednie granice otrzymujemy na koniec

$$(5.8) \quad u = -2\pi \frac{iU}{\omega} \left(\frac{1}{r} - \frac{U}{i\omega r^2} \right) \exp i\omega \left(\frac{r}{U} - t \right),$$

a więc z dokładnością do stałego współczynnika rozwiązanie (4.4). Fala kulista może więc być uważana za sumę fal płaskich. Ze względu na kulistą symetrię zagadnienia wzór (5.8) jest prawdziwy dla każdego ϑ . Należy podkreślić, że całkowanie rozciągnięte jest na półkulę. Całkowanie po całej kuli włączyłoby do (5.8) płaskie fale sinusoidalne, które od punktu (r, ϑ, φ) dochodzą do nieskończoności.

Dla kompletności pokażemy jeszcze, że płaska fala sinusoidalna może być uważana za sumę fal kulistych, a więc twierdzenie odwrotne do podanego wyżej. Fakt, że każda fala sinusoidalna jest sumą fal kulistych jest treścią twierdzenia Fouriera.

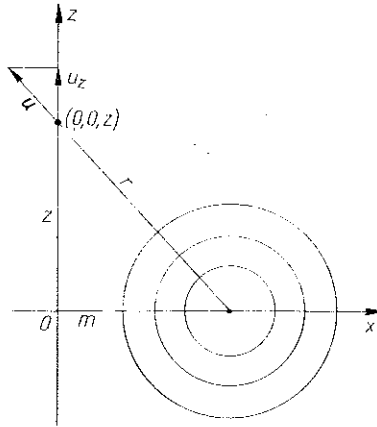
Niech z każdego punktu płaszczyzny $z=0$ (rys. 5) rozchodzi się fala kulista (4.4). Przemieszczenie w punkcie $(0, 0, z)$ ma następującą składową pionową

$$(5.9) \quad u_z = u \cos(r, z) = u \frac{z}{r},$$

gdzie

$$(5.10) \quad r^2 = z^2 + m^2.$$

Przez m oznaczono odległość środka fali kulistej od osi z .



Rys. 5

Zgodnie z (4.4) i (5.9) pionowa składowa wypadkowego przemieszczenia jest określona wzorem

$$(5.11) \quad \begin{aligned} \tilde{u}_z &= \int_0^\infty dm 2\pi m u \frac{z}{r} = \\ &= 2\pi C_0 \exp(-i\omega t) z \int_0^\infty m dm \left(\frac{1}{z^2 + m^2} - \frac{U}{i\omega(z^2 + m^2)^{3/2}} \right) \exp i\omega \frac{\sqrt{z^2 + m^2}}{U}. \end{aligned}$$

Zamieniając zmienne i całkując otrzymujemy

$$(5.12) \quad \begin{aligned} \tilde{u}_z &= 2\pi C_0 z \exp(-i\omega t) \int_z^\infty dr \left(\frac{1}{r} - \frac{U}{i\omega r^2} \right) \exp i\omega \frac{r}{U} = \\ &= 2\pi C_0 z \exp(-i\omega t) \frac{U}{i\omega r} \exp i\omega \frac{r}{U} \Big|_z^\infty. \end{aligned}$$

Podstawiając granice całkowania mamy na koniec

$$(5.13) \quad \tilde{u}_z = 2\pi C_0 \frac{U}{i\omega} \exp i\omega \left(\frac{z}{U} - t \right).$$

Zę względu na symetrię zagadnienia poziome składowe wypadkowego przemieszczenia są równe zeru. Związek (5.13) przedstawia więc płaską falę sinusoidalną (5.1) (z dokładnością do stałego mnożnika). Ze względu na symetrię zagadnienia związek (5.13) prawdziwy jest dla każdego punktu (x, y, z) , a nie tylko dla punktu $(0, 0, z)$.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. C. TRUESDELL, R. TOUPIN, *The classical field theories*, Handbuch der Physik, III/1, Berlin 1960
2. Z. WESOŁOWSKI, *Acoustic wave in finitely deformed elastic material*, Arch. Mech. Stos., 24, 5-6 1972.
3. Z. WESOŁOWSKI, *Acceleration wave and progressive wave in non-linear elastic material*, Arch. Mech. Stos., 26, 2, 1974.
4. L. BRILLOUIN, *Wave propagation and group velocity*, New York 1960.

Резюме

О СКОРОСТЯХ СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В ИЗОТРОПНОМ УПРУГОМ МАТЕРИАЛЕ

Опираясь на теорию поверхностей разрыва строится сферическая волна ускорения. В свою очередь строится сферическая бегущая волна и определяются фазовая и групповая скорости. Показано, что фазовая скорость больше чем скорость распространения и групповая скорость. Для достаточно больших частот скорость распространения является средней геометрической фазовой и групповой скоростей. Показано тоже, что скорость сигнала меньше чем скорость распространения. Доказано, что сферическая волна является суммой плоских волн и что плоская волна является суммой сферических волн.

SUMMARY

ON VELOCITIES OF SPHERICAL WAVES IN ISOTROPIC ELASTIC MATERIALS

Using the theory discontinuity surfaces the spherical acceleration wave is constructed. Subsequently, the moving spherical wave is built and phase and group velocities are evaluated. It was shown that the phase velocity is greater than the propagation velocity and group velocity. For sufficiently large frequencies the propagation velocity is the geometric mean of the phase and group velocities. It was also demonstrated that the velocity of signal is smaller than the propagation velocity. It was proved that the spherical wave is a sum of plane waves and the plane wave is a sum of spherical waves.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 października 1974 r.