

ROZWIĄZANIE DYNAMICZNEGO ZAGADNIENIA KONTAKTOWEGO DLA TERMOSPREŻYSTEJ PÓLPRZESTRZENI

WACŁAW FRYDRYCHOWICZ (WARSZAWA)

W pracy podano rozwiązanie dynamicznego zagadnienia kontaktowego sprężonej termosprężystej półprzestrzeni z mieszanymi warunkami brzegowymi (2.19) i (2.20). Stosując podwójną transformację Fouriera, zagadnienie to sprowadzono do układu dualnych równań całkowych (2.30), który rozwiązano metodą szeregów. Przedstawiając nieznane funkcje $b_1(x)$ i $b_2(x)$ w postaci (3.1) układ ten sprowadzono do dwóch równań w postaci szeregów (3.16), zawierających nieznane współczynniki a_n^* i b_n^* . Współczynniki te wyznaczamy z równań (3.16) zmodyfikowaną metodą ortogonalizacji Schmidta.

1. WSTĘP

Mieszane zagadnienia brzegowe występują w wielu gałęziach mechaniki ośrodków ciągłych. Ich przykładami są m.in. zagadnienia kontaktowe i szczelin.

Wprowadzenie transformacji całkowych bardzo ułatwiło poszukiwanie rozwiązań takich zagadnień. Mimo to często jeszcze napotyka się na duże trudności matematyczne, szczególnie przy rozwiązaniu układów dualnych równań całkowych, do których z reguły dają się sprowadzić powyższe zagadnienia.

Wiele ciekawych problemów kontaktowych rozwiązał I. N. SNEDDON [1]. W przypadku, gdy warunki brzegowe są dane na obszarze półnieskończonym (zagadnienia dwuczęściowe), wygodnie jest stosować metodę WIENERA-HOPFA [2]. W. F. YAU i A. S. ÇAKMAK [3] po dokładnej analizie i porównaniu wyników stwierdzają, że do rozwiązania mieszanych zagadnień brzegowych trzyczęściowych metoda Wienera-Hopfa, przy której trzeba aproksymować jądro, jest mniej zalecana niż metoda szeregów. Mieszane zagadnienia brzegowe, które dają się sprowadzić do układu dualnych równań całkowych, są z reguły bardzo trudne do rozwiązania. Trudność ta polega przede wszystkim na podaniu rozwiązania w formie zamkniętej. Rozwiązania przybliżone można uzyskać stosując metodę szeregów. S. ITOU i A. ATSUMI [4] oraz S. ITOU [5] powyższym sposobem rozwiązują dynamiczne zagadnienia dla ośrodka Cosseratów.

W niniejszej pracy metodę szeregów stosujemy do rozwiązania układu dualnych równań całkowych, do którego daje się sprowadzić dynamiczne zagadnienia kontaktowe termosprężystości zdefiniowane w p. 2. Do rozważanego niżej układu równań (2.30) nie można zastosować metody podanej przez G. SZEFERA [6] ani I. N. SNEDDONA [7], ponieważ równania te nie dają się rozdzielić ze względu na postać jądra.

Stosowane w pracy operatory \mathcal{F}^{-1} , \mathcal{F}_c^{-1} , \mathcal{F}_s^{-1} są odpowiednio odwrotną wykładniczą, kosinusową i sinusową transformacją Fouriera. O funkcji $f(x)$ zakładamy, że jest klasy $L_1(-\infty, \infty)$ i posiada pochodną z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów, w których jest lewo- i prawostronnie ograniczona. Założenia te warunkują istnienie transformat Fouriera.

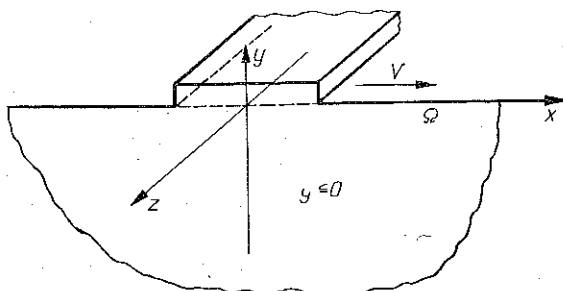
2. SFORMUŁOWANIE I SPROWADZENIE ZAGADNIENIA DO UKŁADU DUALNYCH RÓWNAŃ CAŁKOWYCH

Rozważmy następujące zagadnienie płaskiego stanu odkształcenia: po płaszczyźnie ograniczającej termosprężystą półprzestrzeń

$$\Omega = \{(x, y, z): -\infty < x < \infty, \quad y \leq 0, \quad -\infty < z < \infty\}$$

porusza się ze stałą prędkością $V < c_2$ w dodatnim kierunku osi x ogrzany stempel o szerokości $2l$, rozciągający się nieskończenie w kierunku osi z .

Zakładamy, że ciało termosprężyste jest jednorodne i izotropowe. W płaskim stanie odkształcenia w dowolnym punkcie (x, y, z) wektor przemieszczenia u ma składowe $(u, v, 0)$, a naprężenie jest scharakteryzowane przez trzy wielkości:



Rys. 1

σ_{xx} , σ_{xy} i σ_{yy} . Temperatura T i wszystkie składowe naprężenia i przemieszczenia są funkcjami tylko x, y, t i dążą do zera, gdy $(x^2 + y^2 + t^2) \rightarrow \infty$. Będziemy również zakładać, że na ciało nie działają siły masowe i źródła ciepła, tzn. $X_j = 0, j = 1, 2, 3, Q = 0$,

Wychodząc z układu równań różniczkowych termosprężystości

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho X_i - \gamma T_{,i} &= \rho \ddot{u}_i \\ T_{,jj} - \frac{1}{\kappa} \dot{T} - \eta \dot{u}_{k,k} &= -\frac{Q}{\kappa}, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

oraz wprowadzając kartezjański układ współrzędnych $Oxyz$ wnioskujemy, że tak postawione powyżej zagadnienie jest opisane następującymi równaniami:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} c_1^2 u_{,xx} + c_2^2 u_{,yy} + (c_1^2 - c_2^2) v_{,xy} - \frac{\gamma}{\rho} T_{,x} &= \ddot{u}, \\ (c_1^2 - c_2^2) u_{,xy} + c_1^2 v_{,yy} + c_2^2 v_{,xx} - \frac{\gamma}{\rho} T_{,y} &= \ddot{v}, \quad T_{,xx} + T_{,yy} - \frac{1}{\kappa} \dot{T} - \eta (\dot{u}_{,x} + \dot{v}_{,y}) = 0. \end{aligned}$$

W równaniach (2.1) i (2.2) u, v są składowymi wektora przemieszczenia odpowiednio w kierunku osi x i y ; przecinek w symbolu $u_{,j}$ ($j = x, y$) oznacza różniczkowanie względem zmiennych x, y ; pochodna względem czasu danej funkcji zazna-

czona jest kropką, $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, $c_2^2 = \mu/\rho$ są odpowiednio prędkościami dylatacyjnej P -fali i skrętnej S -fali rozchodzących się w ciele zajmującym obszar Ω , α jest współczynnikiem rozszerzalności cieplnej, λ , μ są stałymi Lamégo dla procesu izotermicznego, κ jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego; temperatura T jest mierzona od temperatury odniesienia T_0 w ciele znajdującym się w stanie nienaprężonym, $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha$, $\eta = \gamma T_0/\kappa c_e$ oraz c_e jest ciepłem właściwym, a ρ gęstością.

Równania (2.2) przepiszemy w następujących współrzędnych bezwymiarowych:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} x' &= x \frac{c_1}{\kappa}, & y' &= y \frac{c_1}{\kappa}, & t' &= t \frac{c_1^2}{\kappa}, \\ T' &= \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu} T, & u' &= u \frac{c_1}{\kappa}, & v' &= v \frac{c_1}{\kappa}. \end{aligned}$$

Przyjmą one postać

$$(2.4) \quad \begin{aligned} u_{,xx} + \beta_1^2 u_{,yy} + (1 - \beta_1^2) v_{,xy} - T_{,x} &= \ddot{u}, & (1 - \beta_1^2) u_{,xy} + v_{,yy} + \beta_1^2 v_{,xx} - T_{,y} &= \ddot{v}, \\ T_{,xx} + T_{,yy} - \dot{T} - \varepsilon(\dot{u}_{,x} + \dot{v}_{,y}) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie «primy» zostały już opuszczone, a ε jest parametrem sprężenia, zdefiniowanym za pomocą wzoru

$$(2.5) \quad \varepsilon = \frac{\gamma^2 T_0}{(\lambda + 2\mu) \rho c_e}$$

oraz

$$(2.6) \quad \beta_1^2 = \frac{1}{\beta^2} = \frac{c_2^2}{c_1^2} < 1.$$

Składowe naprężenia we współrzędnych bezwymiarowych (2.3) przyjmą postać (2.7) $\sigma_{xx} = \beta^2 u_{,x} + (\beta^2 - 2)v_{,y} - \beta^2 T$, $\sigma_{yy} = (\beta^2 - 2)u_{,x} + \beta^2 v_{,y} - \beta^2 T$, $\sigma_{xy} = u_{,y} + v_{,x}$ gdzie «primy» również opuszczono.

Do równań (2.4) stosujemy podwójną wykładniczą transformację Fouriera względem zmiennych x i t , zdefiniowaną następująco:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} f(\xi, y, \tau) &= \mathcal{F}_2 \{f(x, y, t): x \rightarrow \xi, t \rightarrow \tau\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{R}^2} f(x, y, t) \exp \{i(\xi x + \tau t)\} dV, \\ f(x, y, t) &= \mathcal{F}_2^{-1} \{f(\xi, y, \tau): \xi \rightarrow x, \tau \rightarrow t\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{R}_1^2} \bar{f}(\xi, y, \tau) \exp \{-i(\xi x + \tau t)\} dW, \end{aligned}$$

gdzie $dV = dx dt$, $dW = d\xi d\tau$, \mathcal{R}^2 oznacza całą czasoprzestrzeń xt , \mathcal{R}_1^2 — całą czasoprzestrzeń $\xi\tau$. Wykorzystując (2.8)₁, równania (2.4) przekształcimy do następującej formy:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} (\tau^2 - \xi^2) \bar{u} + \beta_1^2 D^2 \bar{u} - i\xi (1 - \beta_1^2) D \bar{v} + i\xi \bar{T} &= 0, \\ -i\xi (1 - \beta_1^2) D \bar{u} + (\tau^2 - \xi^2 \beta_1^2) \bar{v} + D^2 \bar{v} - D \bar{T} &= 0, \\ \xi \tau \bar{u} + i \tau \bar{v} + (i \tau - \xi^2) \bar{T} + D^2 \bar{T} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie operator D oznacza różniczkowanie $\partial/\partial y$.

Podwyższając rząd równań (2.9) i dokonując kilku przekształceń można pokazać, że powyższy układ równań daje się rozdzielić w sposób następujący:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} [D^2 \mathcal{L}_2 - \xi^2 \mathcal{L}_2 - (i\tau - \xi^2) \mathcal{L}_1 - D^2 \mathcal{L}_1] \bar{T} &= 0, \\ i\tau \mathcal{L}_1 \bar{u} &= \xi \mathcal{L}_2 \bar{T}, \\ i\tau \mathcal{L}_1 \bar{v} &= -D \mathcal{L}_2 \bar{T}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \beta_1^2 D^2 + (\tau^2 - \beta_1^2 \xi^2), \\ \mathcal{L}_2 &= -\{[(1 - \beta_1^2)(i\tau - \xi^2) + i\tau \varepsilon] + (1 - \beta_1^2) D^2\}. \end{aligned}$$

Po przekształceniach równanie (2.10)₁ przyjmie postać

$$(2.12) \quad \{D^4 - [(2\xi^2 - \tau^2) - i\tau(1 + \varepsilon)] D^2 - [(\xi^2 - \tau^2)(i\tau - \xi^2) + i\tau \varepsilon \xi^2]\} \bar{T} = 0.$$

Łatwo zauważyć, że jest to równanie różniczkowe zwyczajne czwartego rzędu o stałych współczynnikach zespolonych. Wystarczy zatem znaleźć rozwiązanie równania (2.12) i wówczas funkcje \bar{u} , \bar{v} określimy z równań (2.10)_{2,3}.

W celu wyrugowania zmiennej t , występującej w równaniach i warunkach brzegowych opisujących nasze zagadnienie, wprowadzimy następujący układ współrzędnych:

$$(2.13) \quad x'' = \frac{c_1(x - Vt)}{\kappa} = x' - \frac{V}{c_1} t' = x' - ct', \quad y'' = y',$$

gdzie

$$(2.14) \quad c = V/c_1$$

jest bezwymiarową prędkością stempla oraz gdzie x' , y' , t' są określone przez (2.3), a bezwymiarowy układ współrzędnych x'' , y'' porusza się w dodatnim kierunku osi x z prędkością c .

Korzystając z (2.13) wnioskujemy, że przy wykładniczej transformacji Fouriera zachodzi następujący związek pomiędzy ξ i τ :

$$(2.15) \quad \tau = -c\xi.$$

Zatem równania (2.9), (2.10) i (2.12) po wstawieniu do nich (2.15) przyjmą postać:

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \xi^2 (c^2 - 1) \bar{u} + \beta_1^2 D^2 \bar{u} - i\xi (1 - \beta_1^2) D\bar{v} + i\xi \bar{T} &= 0, \\ -i\xi (1 - \beta_1^2) D\bar{u} + \xi^2 (c^2 - \beta_1^2) \bar{v} + D^2 \bar{v} - D\bar{T} &= 0, \\ -c\xi^2 \varepsilon \bar{u} - i(\rho \varepsilon D\bar{v} - (\xi^2 + ic\xi) \bar{T} + D^2 \bar{T}) &= 0; \end{aligned}$$

$$(2.17) \quad c\varepsilon \mathcal{L}_1 \bar{u} = -\mathcal{L}_2 \bar{T}, \quad ic\varepsilon \mathcal{L}_1 \bar{v} = D \mathcal{L}_2 \bar{T};$$

$$(2.18) \quad \{D^4 - [\xi^2(2 - c^2) + ic\xi(1 + \varepsilon)] D^2 + \xi^2 [(1 - c^2)(\xi^2 + ic\xi) + ic\varepsilon \xi]\} \bar{T} = 0,$$

przy tym do operatorów różniczkowych \mathcal{L}_1 i \mathcal{L}_2 należy wstawić funkcję (2.15).

Warunki brzegowe będą zależały od zmiennych x i y . Będziemy poszukiwać rozwiązania zagadnienia opisanego równaniami (2.16) lub (2.17) i (2.18) przy następujących warunków brzegowych:

warunki termiczne

$$(2.19) \quad \begin{aligned} T(x, y) &= \theta(x), & y=0, & |x| \leq 1, \\ \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} &= 0, & y=0, & |x| > 1; \end{aligned}$$

warunki mechaniczne

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \sigma_{xy}(x, y) &= 0, & y=0, & -\infty < x < \infty, \\ v(x, y) &= w(x), & y=0, & |x| \leq 1, \\ \sigma_{yy}(x, y) &= 0, & y=0, & |x| > 1. \end{aligned}$$

Weźmy pod uwagę równanie (2.18). Jego rozwiązaniem jest funkcja

$$(2.21) \quad \bar{T}(\xi, y) = A_1(\xi) e^{\lambda_1(\xi)y} + A_2(\xi) e^{\lambda_2(\xi)y},$$

gdzie

$$(2.22) \quad \lambda_{1,2} = \left\{ \left[\frac{1}{2} \xi^2 (2 - c^2) + \frac{1}{2} ic\xi (1 + \varepsilon) \right] \mp \frac{1}{2} ic\xi [(1 + \varepsilon)^2 - 2ic\xi (1 - \varepsilon) - \xi^2 c^2]^{1/2} \right\}^{1/2},$$

przy tym żądamy, by $\forall \xi \in \mathcal{R}$, $\text{Re } \lambda_{1,2}(\xi) \geq 0$. $A_j(\xi)$, $j=1, 2$ są «stałymi» całkowania, które na ogół zależą od ξ . Przy poszukiwaniu rozwiązania $\bar{T}(\xi, y)$ żąda się, aby opisywało ono fale rozchodzące się w półpłaszczyźnie $y \leq 0$ i zanikające w nieskończoności.

Rozwiązaniem równań (2.17) są następujące funkcje:

$$(2.23) \quad \begin{aligned} \bar{u}(\xi, y) &= B_1^*(\xi) e^{\lambda_3(\xi)y} + \sum_{j=1}^2 \frac{m_j(\xi) A_j(\xi)}{c\varepsilon \gamma_j(\xi)} e^{\lambda_j(\xi)y}, \\ \bar{v}(\xi, y) &= B_2^*(\xi) e^{\lambda_3(\xi)y} + \sum_{j=1}^2 \frac{im_j(\xi) A_j(\xi)}{c\xi \varepsilon \gamma_j(\xi)} e^{\lambda_j(\xi)y}, \end{aligned}$$

gdzie i jest jednostką urojoną,

$$(2.24) \quad \begin{aligned} m_j(\xi) &= (1 - \beta_1^2) (\xi^2 + ic\xi - \lambda_j^2(\xi)) + ic\xi \varepsilon, \\ \gamma_j(\xi) &= (\beta_1^2 - c^2) \xi^2 - \beta_1^2 \lambda_j^2(\xi), \quad j=1, 2, \\ \lambda_3(\xi) &= |\xi| (1 - \beta^2 c^2)^{1/2} \end{aligned}$$

oraz $B_j^*(\xi)$, $j=1, 2$ są stałymi całkowania zależnymi od ξ . Jeżeli otrzymane rozwiązanie na \bar{u} , \bar{v} i \bar{T} wstawimy do równań (2.16), to otrzymamy następujący związek między stałymi $B_j^*(\xi)$, $j=1, 2$:

$$(2.25) \quad \xi B_1^*(\xi) + i\lambda_3(\xi) B_2^*(\xi) = 0.$$

Do funkcji \bar{u} , \bar{v} , \bar{T} zastosujemy odwrotną transformację Fouriera, określoną wzorem (2.8)₂. Jeżeli jednocześnie przy retransformacji \bar{v} wykorzystamy związek (2.25), to otrzymamy następującą postać przemieszczeń i temperatury:

$$(2.26) \quad \begin{aligned} u(x, y) &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ B_1^*(\xi) e^{\lambda_3(\xi)y} + \sum_{j=1}^2 \frac{m_j(\xi) A_j(\xi)}{c\varepsilon\gamma_j(\xi)} e^{\lambda_j(\xi)y}; \xi \rightarrow x \right\}, \\ v(x, y) &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{i\xi}{\lambda_3(\xi)} B_1^*(\xi) e^{\lambda_3(\xi)y} + \sum_{j=1}^2 \frac{im_j(\xi) A_j(\xi) \lambda_j(\xi)}{c\varepsilon\gamma_j(\xi)} e^{\lambda_j(\xi)y}; \xi \rightarrow x \right\}, \\ T(x, y) &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^2 A_j(\xi) e^{\lambda_j(\xi)y}; \xi \rightarrow x \right\}. \end{aligned}$$

Funkcje $A_j(\xi)$, $j=1, 2$ i $B_1^*(\xi)$ określimy z warunków brzegowych. Z warunku, że $\sigma_{xy}(x, 0) = 0$ dla $-\infty < x < \infty$ wynika, że

$$(2.27) \quad B_1^*(\xi) = - \frac{2\lambda_3(\xi)}{(2 - \beta^2 c^2)\xi^2} \sum_{j=1}^2 \frac{m_j(\xi) A_j(\xi) \lambda_j(\xi)}{c\varepsilon\gamma_j(\xi)}.$$

Jeżeli następnie wykorzystamy pozostałe warunki brzegowe mechaniczne i związek (2.27), to otrzymamy następujące dualne równania całkowe na funkcje $A_j(\xi)$, $j=1, 2$:

$$(2.28) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^2 \left[i \frac{m_j(\xi)}{c\varepsilon\gamma_j(\xi)} \left[\beta^2 \lambda_j^2(\xi) - (\beta^2 - 2)\xi^2 - \frac{4\lambda_j(\xi) \lambda_3(\xi)}{2 - \beta^2 c^2} \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \beta^2 \right] A_j(\xi); \xi \rightarrow x \right\} = 0 \quad \text{dla } |x| > 1, \\ \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^2 i \frac{\beta^2 c^2 m_j(\xi) \lambda_j(\xi)}{(\beta^2 c^2 - 2) c\varepsilon \gamma_j(\xi)} A_j(\xi); \xi \rightarrow x \right\} = w(x) \quad \text{dla } |x| \leq 1. \end{aligned}$$

Termiczne warunki brzegowe prowadzą do dualnych równań całkowych, które można napisać w formie:

$$(2.29) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^2 A_j(\xi); \xi \rightarrow x \right\} = \theta(x) \quad \text{dla } |x| \leq 1, \\ \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^2 \lambda_j(\xi) A_j(\xi); \xi \rightarrow x \right\} = 0 \quad \text{dla } |x| > 1. \end{aligned}$$

Z powyższej analizy wynika, że zagadnienie sprowadza się do wyznaczenia funkcji $B_j(\xi)$, $j=1, 2$ z następującego układu dualnych równań całkowych:

$$(2.30) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \{ \kappa_1(\xi) B_1(\xi) + \kappa_2(\xi) B_2(\xi); \xi \rightarrow x \} = \theta(x), \\ \mathcal{F}^{-1} \{ \kappa_3(\xi) B_1(\xi) + \kappa_4(\xi) B_2(\xi); \xi \rightarrow x \} = w(x), \quad |x| \leq 1, \\ \mathcal{F}^{-1} \{ B_1(\xi); \xi \rightarrow x \} = 0, \\ \mathcal{F}^{-1} \{ B_2(\xi); \xi \rightarrow x \} = 0, \quad |x| > 1, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.31) \quad \kappa_1(\xi) = \frac{p_2(\xi) - p_1(\xi)}{\lambda_1(\xi) p_2(\xi) - \lambda_2^2(\xi) p_1(\xi)}, \quad \kappa_2(\xi) = \frac{\lambda_1(\xi) - \lambda_2(\xi)}{\lambda_1(\xi) p_2(\xi) - \lambda_2(\xi) p_1(\xi)},$$

$$\kappa_3(\xi) = \frac{n_1(\xi) p_2(\xi) - n_2(\xi) p_1(\xi)}{\lambda_1(\xi) p_2(\xi) - \lambda_2(\xi) p_1(\xi)}, \quad \kappa_4(\xi) = \frac{-n_1(\xi) \lambda_2(\xi) + n_2(\xi) \lambda_1(\xi)}{\lambda_1(\xi) p_2(\xi) - \lambda_2(\xi) p_1(\xi)};$$

$$(2.32) \quad n_j(\xi) = i \frac{\beta^2 c^2 m_j(\xi) \lambda_j(\xi)}{(\beta^2 c^2 - 2) c \xi \varepsilon \gamma_j(\xi)},$$

$$p_j(\xi) = i \frac{m_j(\xi)}{c \xi \varepsilon \gamma_j(\xi)} \left[\beta^2 \lambda_j^2(\xi) - (\beta^2 - 2) \xi^2 - \frac{4 \lambda_j(\xi) \lambda_3(\xi)}{2 - \beta^2 c^2} \right] - \beta^2;$$

$$(2.33) \quad B_1(\xi) = \sum_{j=1}^2 \lambda_j(\xi) A_j(\xi), \quad B_2(\xi) = \sum_{j=1}^2 p_j(\xi) A_j(\xi).$$

Można udowodnić, że dla każdego $j=1, 2, 3, 4$ część rzeczywista $\kappa_j(\xi)$ jest funkcją parzystą zmiennej ξ , a część urojona $\kappa_j(\xi)$ jest funkcją nieparzystą zmiennej ξ , tzn. jeśli

$$(2.34) \quad \kappa_j(\xi) = \varphi_j(\xi) + i \psi_j(\xi), \quad i^2 = -1, \quad j=1, 2, 3, 4,$$

to

$$(2.35) \quad \forall (\xi \in \mathcal{D}) [\varphi_j(-\xi) = \varphi_j(\xi) \wedge \psi_j(-\xi) = -\psi_j(\xi), \quad j=1, 2, 3, 4].$$

3. SPROWADZENIE UKŁADU DUALNYCH RÓWNAŃ CAŁKOWYCH DO DWÓCH RÓWNAŃ DANYCH W POSTACI SZEREGÓW

Rozważmy układ dualnych równań całkowych (2.30). Załóżmy, że $\theta(x)$ i $w(x)$ są funkcjami parzystymi zmiennej x . Z własności funkcji $\kappa_j(\xi)$, $j=1, 2, 3, 4$ i z ostatniego warunku wynika, że funkcje $B_1(\xi)$ i $B_2(\xi)$ musimy poszukiwać w takiej postaci, żeby 1) był spełniony układ dualnych równań całkowych (2.30), 2) funkcje $B_1(\xi)$ i $B_2(\xi)$ były funkcjami parzystymi zmiennej ξ . Jeżeli przyjąć, że $B_1(\xi)$ i $B_2(\xi)$ są wykładniczymi transformatami Fouriera funkcji $b_1(x)$ i $b_2(x)$, to powyższe warunki będą spełnione, jeżeli

$$(3.1) \quad b_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} T_{2n-2}(x) (1-x^2)^{-1/2}, \quad |x| \leq 1;$$

$$b_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} P_{2n-2}^{(1/2, 1/2)}(x) (1-x^2)^{1/2},$$

$$b_1(x) = b_2(x) = 0, \quad |x| > 1.$$

Wielkości a_{2n} i b_{2n} są stałymi współczynnikami, które należy znaleźć; $T_n(x)$ i $P_n^{(1/2, 1/2)}(x)$ są odpowiednio wielomianami Czebyszewa i Jacobięgo [8], a czynniki $(1-x^2)^{-1/2}$ i $(1-x^2)^{1/2}$ są funkcjami wagowymi, wpływającymi na lepszą zbieżność szeregów.

Z nierówności Bessela [9] wynika, że szeregi

$$(3.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}^2 \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}^2$$

są zbieżne.

Wykładnicze transformaty Fouriera funkcji (3.1) [10] są następujące:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} B_1(\xi) &= \mathcal{F}\{b_1(x): x \rightarrow \xi\} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} (-1)^{n-1} J_{2n-2}(\xi), \\ B_2(\xi) &= \mathcal{F}\{b_2(x): x \rightarrow \xi\} = 2^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} (-1)^{n-1} \frac{\Gamma\left(2n - \frac{1}{2}\right)}{(2n-2)! \xi} J_{2n-1}(\xi). \end{aligned}$$

Symbole $\Gamma(\cdot)$ i $J_n(\cdot)$ występujące w równaniach (3.3) oznaczają odpowiednio funkcje gamma i Bessela pierwszego rodzaju.

LEMAT 1. *Funkcje $B_1(\xi)$ i $B_2(\xi)$ są funkcjami parzystymi.*

Dowód. Ponieważ dla dowolnego $n \in N$ i $\xi \in \mathcal{R}$

$$\begin{aligned} J_{2n-2}(-\xi) &= (-1)^{2n-2} J_{2n-2}(\xi) = J_{2n-2}(\xi), \\ \frac{1}{(-\xi)} J_{2n-1}(-\xi) &= (-1) (-1)^{2n-1} \frac{1}{\xi} J_{2n-1}(\xi) = \frac{1}{\xi} J_{2n-1}(\xi), \end{aligned}$$

to

$$\forall (\xi \in \mathcal{R}), [B_1(-\xi) = B_1(\xi)] \wedge [B_2(-\xi) = B_2(\xi)],$$

co kończy dowód lematu.

TWIERDZENIE 1. *Funkcje $B_1(\xi)$ i $B_2(\xi)$, zdefiniowane wzorami (3.3), tożsamościowo spełniają równania (2.30)_{3,4}.*

Dowód. Wstawmy (3.3)₁ do (2.30)₃:

$$(3.4) \quad \mathcal{F}^{-1}\{B_1(\xi): \xi \rightarrow x\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} (-1)^{n-1} J_{2n-2}(\xi): \xi \rightarrow x\right\}.$$

Ponieważ operator \mathcal{F}^{-1} jest operatorem liniowym [11], to (3.4) można napisać następująco:

$$(3.5) \quad \mathcal{F}^{-1}\{B_1(\xi): \xi \rightarrow x\} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} (-1)^{n-1} \mathcal{F}^{-1}\{J_{2n-2}(\xi): \xi \rightarrow x\}.$$

Korzystając z lematu 1, wzorowi (3.5) możemy nadać postać

$$(3.6) \quad \mathcal{F}^{-1}\{B_1(\xi): \xi \rightarrow x\} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} (-1)^{n-1} \mathcal{F}_c^{-1}\{J_{2n-2}(\xi): \xi \rightarrow x\}.$$

Jeżeli teraz skorzystamy z faktu, że [12]

$$\mathcal{F}_c^{-1} \left\{ \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} J_{2n}(a\xi) : \xi \rightarrow b \right\} = \begin{cases} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} T_{2n} \left(\frac{b}{a} \right), & \text{jeśli } 0 < b < a, \\ 0, & \text{jeśli } 0 < a < b, \end{cases}$$

to

$$(3.7) \quad \mathcal{F}_c^{-1} \left\{ \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} J_{2n-2}(\xi) \rightarrow x \right\} \equiv 0, \quad \text{gdy } |x| > 1.$$

Wstawiając następnie (3.7) do (3.6) wnioskujemy, że równanie (2.30)₃ jest spełnione tożsamościowo przez $B_1(\xi)$.

Dokonując analogicznych przekształceń i wykorzystując zależność [12]

$$\int_0^\infty J_\nu(\alpha x) \cos(\beta x) \frac{dx}{x} = \begin{cases} \frac{1}{\nu} \cos\left(\nu \arcsin \frac{\beta}{\alpha}\right), & \text{jeśli } \beta \leq \alpha, \\ \frac{\alpha^\nu \cos(\nu/2 \cdot \pi)}{\nu(\beta + \sqrt{(\beta^2 - \alpha^2)})^\nu}, & \text{jeśli } \beta \geq \alpha, \end{cases}$$

gdy $\text{Re } \nu > 0$, dowodzimy, że funkcja $B_2(\xi)$ tożsamościowo spełnia równanie (2.30)₄, co należało wykazać.

TWIERDZENIE 2. Równanie (2.30)₁ i równanie

$$(3.8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} G_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} H_n(x) = \theta(x), \quad |x| \leq 1$$

są równoważne, przy tym funkcje $G_n(x)$ i $H_n(x)$ są określone następująco:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} G_n(x) &= (-1)^{n-1} \frac{\Gamma\left(2n - \frac{1}{2}\right)}{(2n-2)!} \left[\mathcal{F}_c^{-1} \left\{ 2^{1/2} \varphi_2(\xi) J_{2n-1}(\xi) \frac{1}{\xi} : \xi \rightarrow x \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{F}_s^{-1} \left\{ 2^{1/2} \psi_2(\xi) J_{2n-1}(\xi) \frac{1}{\xi} : \xi \rightarrow x \right\} \right], \\ H_n(x) &= (-1)^{n-1} \left[\mathcal{F}_c^{-1} \left\{ \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \varphi_1(\xi) J_{2n-2}(\xi) : \xi \rightarrow x \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{F}_s^{-1} \left\{ \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \psi_1(\xi) J_{2n-2}(\xi) : \xi \rightarrow x \right\} \right]. \end{aligned}$$

Dowód. Rozważmy równanie (2.30)₁. Wstawiając do jego lewej strony funkcje (3.3) oraz wykorzystując własności (2.34), (2.35) i lemat 1, otrzymamy

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \{ \kappa_1(\xi) B_1(\xi) + \kappa_2(\xi) B_2(\xi) : \rightarrow x \} &= \\ &= \mathcal{F}^{-1} \{ (\varphi_1(\xi) + i\psi_1(\xi)) B_1(\xi) + (\varphi_2(\xi) + i\psi_2(\xi)) B_2(\xi) : \xi \rightarrow x \} = \\ &= \mathcal{F}_c^{-1} \{ \varphi_1(\xi) B_1(\xi) + \varphi_2(\xi) B_2(\xi) : \xi \rightarrow x \} + \mathcal{F}_s^{-1} \{ \psi_1(\xi) B_1(\xi) + \\ &\quad + \psi_2(\xi) B_2(\xi) : \xi \rightarrow x \} = \mathcal{F}_c^{-1} \left\{ \varphi_1(\xi) \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} (-1)^{n-1} x \right\} \end{aligned}$$

$$(3.10) \quad \left. \begin{aligned} & \times J_{2n-2}(\xi) + \varphi_2(\xi) \cdot 2^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} (-1)^{n-1} \frac{\Gamma\left(2n - \frac{1}{2}\right)}{(2n-2)! \xi} J_{2n-1}(\xi); \xi \rightarrow x \right\} + \\ & + \mathcal{F}_s^{-1} \left\{ \psi_1(\xi) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} (-1)^{n-1} J_{2n-2}(\xi) + \right. \\ & \left. + \psi_2(\xi) \cdot 2^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} (-1)^{n-1} \frac{\Gamma\left(2n - \frac{1}{2}\right)}{(2n-2)! \xi} J_{2n-1}(\xi); \xi \rightarrow x \right\} \end{aligned}$$

Ponieważ operatory \mathcal{F}_c^{-1} i \mathcal{F}_s^{-1} są liniowe [11], to (3.10) ma postać

$$(3.11) \quad \mathcal{F}^{-1} \{ \kappa_1(\xi) B_1(\xi) + \kappa_2(\xi) B_2(\xi); \xi \rightarrow x \} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} G_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} H_n(x),$$

gdzie $G_n(x)$ i $H_n(x)$ są określone wzorami (3.9). Jeżeli teraz porównamy związek (3.11) z (2.30)₁, otrzymamy równanie (3.8), co kończy dowód.

Twierdzenie 3. Równanie (2.30)₂ i równanie

$$(3.12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} E_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} F_n(x) = w(x), \quad |x| \leq 1$$

są równoważne, przy tym funkcje $E_n(x)$ i $F_n(x)$ są określone następującymi wzorami:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} E_n(x) = & (-1)^{n-1} \frac{\Gamma\left(2n - \frac{1}{2}\right)}{(2n-2)!} \left[\mathcal{F}_c^{-1} \left\{ 2^{1/2} \varphi_4(\xi) J_{2n-1}(\xi) \frac{1}{\xi}; \xi \rightarrow x \right\} + \right. \\ & \left. + \mathcal{F}_s^{-1} \left\{ 2^{1/2} \psi_4(\xi) J_{2n-1}(\xi) \frac{1}{\xi}; \xi \rightarrow x \right\} \right], \\ F_n(x) = & (-1)^{n-1} \left[\mathcal{F}_c^{-1} \left\{ \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \varphi_3(\xi) J_{2n-2}(\xi); \xi \rightarrow x \right\} + \right. \\ & \left. + \mathcal{F}_s^{-1} \left\{ \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \psi_3(\xi) J_{2n-2}(\xi); \xi \rightarrow x \right\} \right]. \end{aligned}$$

Dowód. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 2 rozważmy lewą stronę równania (2.30)₂. Wykorzystując jednocześnie wzory (3.3), (2.34), (2.35) i lemat 1 otrzymamy

$$(3.14) \quad \begin{aligned} & \mathcal{F}^{-1} \{ \kappa_3(\xi) B_1(\xi) + \kappa_4(\xi) B_2(\xi); \xi \rightarrow x \} = \\ & = \mathcal{F}^{-1} \{ (\varphi_3(\xi) + i\psi_3(\xi)) B_1(\xi) + (\varphi_4(\xi) + i\psi_4(\xi)) B_2(\xi); \xi \rightarrow x \} = \\ & = \mathcal{F}_c^{-1} \{ \varphi_3(\xi) B_1(\xi) - (\xi) + \varphi_4(\xi) B_2(\xi); \xi \rightarrow x \} + \\ & + \mathcal{F}_s^{-1} \{ \psi_3(\xi) B_1(\xi) + \psi_4(\xi) B_2(\xi); \xi \rightarrow x \} = \\ & = \mathcal{F}_c^{-1} \left\{ \varphi_3(\xi) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} (-1)^{n-1} J_{2n-2}(\xi) + \right. \end{aligned}$$

$$(3.14) \quad \left. \begin{aligned} & + \varphi_4(\xi) \cdot 2^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} (-1)^{n-1} \frac{\Gamma\left(2n - \frac{1}{2}\right)}{(2n-2)! \xi} J_{2n-1}(\xi); \xi \rightarrow x \Bigg\} + \\ & + \mathcal{F}_s^{-1} \left\{ \psi_3(\xi) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} (-1)^{n-1} J_{2n-2}(\xi) + \right. \\ & \left. + \psi_4(\xi) \cdot 2^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} (-1)^{n-1} \frac{\Gamma\left(2n - \frac{1}{2}\right)}{(2n-2)! \xi} J_{2n-1}(\xi); \xi \rightarrow x \right\}. \end{aligned} \right\} \text{[c.d.]}$$

Korzystając z addytywności operatorów \mathcal{F}_c^{-1} i \mathcal{F}_s^{-1} równości (3.14) nadamy następującą postać:

$$(3.15) \quad \mathcal{F}^{-1} \{ \kappa_3(\xi) B_1(\xi) + \kappa_4(\xi) B_2(\xi); \xi \rightarrow x \} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} E_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} F_n(x),$$

gdzie $E_n(x)$ i $F_n(x)$ są określone wzorami (3.13). Porównując związek (3.15) z (2.30)₂, otrzymujemy (3.13), co należało wykazać.

Z twierdzeń 1, 2, 3 wynika, że układ dualnych równań całkowych (2.30) jest równoważny następującemu układowi równań:

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* E_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* F_n(x) &= w(x), \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* G_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* H_n(x) &= \theta(x), \quad |x| \leq 1, \end{aligned}$$

gdzie $b_n^* = b_{2n}$, $a_n^* = a_{2n}$ oraz $E_n(x)$, $F_n(x)$, $G_n(x)$ i $H_n(x)$ są określone za pomocą wzorów (3.9) i (3.13).

Z układu równań (3.16) wyznaczamy współczynniki b_n^* i a_n^* , których znajomość pozwala określić niewiadome funkcje $B_1(\xi)$ i $B_2(\xi)$, a tym samym rozwiązać układ dualnych równań całkowych (2.30). Do znalezienia współczynników b_n^* i a_n^* zastosujemy zmodyfikowaną metodę ortogonalizacji SCHMIDTA [13].

4. ORTOGONALIZACJA SCHMIDTA

Założmy, że dana jest funkcja

$$(4.1) \quad \varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n(z), \quad |z| \leq 1,$$

gdzie $h_n(z)$ tworzą układ zupełny lecz nieortogonalny. Wówczas zupełny ortogonalny układ funkcji $\chi_q(z)$ konstruujemy z $h_n(z)$ w postaci

$$(4.2) \quad \chi_q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{qn} h_n(z)$$

z następującymi zmodyfikowanymi warunkami ortogonalności:

$$(4.3) \quad \int_{-1}^1 h_p \chi_q dz = \delta_{pq} N_q, \quad p \leq q,$$

$$N_q = \int_{-1}^1 \chi_q^2 dz = \int_0^1 h_q \chi_q dz$$

i rekurencyjną formułą dla $\chi_q(z)$:

$$(4.4) \quad \chi_q(z) = h_q - \sum_{p=1}^{q-1} \chi_p(z) \frac{1}{N_p} \int_{-1}^1 \chi_p h_q dz,$$

$$N_q = \int_{-1}^1 h_q^2 dz - \sum_{p=1}^{q-1} \frac{1}{N_p} \left[\int_{-1}^1 \chi_p h_q dz \right]^2.$$

Jeżeli (4.2) wstawimy do (4.3)₁, to otrzymamy

$$(4.5) \quad \sum_{n=1}^q \alpha_{qn} d_{np} = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } p < q, \\ N_q, & \text{jeżeli } p = q, \end{cases}$$

gdzie

$$(4.6) \quad d_{np} = \int_{-1}^1 h_n h_p dz.$$

Współczynniki α_{qn} można określić za pomocą minorów elementów wyznacznika zbudowanego z elementów d_{np} . Rozważmy wyznaczniki D_q :

$$(4.7) \quad D_1 = d_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}, \dots$$

Z (4.5) wynika, że współczynniki α_{qn} są proporcjonalne do dopełnienia algebraicznego M_{nq} elementu d_{nq} wyznacznika D_q . Wniosek ten otrzymujemy z następującej własności M_{nq} :

$$(4.8) \quad \sum_{n=1}^q M_{nq} d_{np} = \delta_{pq} D_q, \quad p \leq q.$$

Związek (4.8) łatwo udowodnimy, jeśli wykorzystamy znane następujące twierdzenie [14]: *Dla dowolnego wyznacznika $D = \det [a_{ik}]$ prawdziwe są wzory:*

$$(4.9) \quad D = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{jk} A_{jk}, \quad j=1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{il} = \sum_{k=1}^n a_{jk} A_{lk} = 0, \quad j \neq l,$$

gdzie $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} .

Jeśli zażądamy, by współczynnik przy h_q w (4.2) był równy jedności, to musimy wziąć $\alpha_{qn} = M_{nq}/M_{qq}$, a χ_q przyjmie wówczas postać:

$$(4.10) \quad \chi_q(z) = \sum_{n=1}^q \frac{M_{nq}}{M_{qq}} h_n(z).$$

W naszym przypadku rodzinę funkcji $P_n(x)$, które spełniają warunek ortogonalności

$$(4.11) \quad \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \delta_{mn} N_n, \quad N_n = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx,$$

można skonstruować z danej rodziny funkcji $G_n(x)$ w postaci:

$$(4.12) \quad P_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{M_{in}}{M_{nn}} G_i(x);$$

M_{in} jest dopełnieniem algebraicznym elementu d_{in} wyznacznika D_n , zdefiniowanego następująco:

$$(4.13) \quad D_n = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & \dots & & d_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{n1} & & & d_{nn} \end{vmatrix}, \quad d_{in} = \int_{-1}^1 G_i(x) G_n(x) dx.$$

Przedstawmy pierwszy szereg (3.16)₂ w postaci szeregu ortogonalnego $P_n(x)$ ze współczynnikami c_n . Wówczas prawdziwa jest równość

$$(4.14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* G_n(x) = \sum_{n=1}^n c_n P_n(x) = \theta(x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* H_n(x).$$

Z drugiej równości (4.14) wynika, że

$$(4.15) \quad c_n = \frac{1}{N_n} \int_{-1}^1 \left[\theta(x) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i^* H_i(x) P_n(x) \right] dx.$$

Jeżeli w (4.15) dokonamy drobnych przekształceń, to współczynniki c_n można napisać w formie

$$(4.16) \quad c_n = \zeta_n + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ni} a_i^*,$$

gdzie

$$(4.17) \quad \zeta_n = \frac{1}{N_n} \int_{-1}^1 \theta(x) P_n(x) dx,$$

$$\alpha_{ni} = -\frac{1}{N_n} \int_{-1}^1 H_i(x) P_n(x) dx.$$

Z pierwszej równości (4.14), wykorzystując (4.12), otrzymujemy

$$(4.18) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* G_n(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j P_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \sum_{n=1}^j \frac{M_{nj}}{M_{jj}} G_n(x).$$

Rozwińmy prawa stronę (4.18):

$$(4.19) \quad \sum_{j=1}^{\infty} c_j \left(\sum_{n=1}^j \frac{M_{nj}}{M_{jj}} G_n(x) \right) = c_1 \left(\frac{M_{11}}{M_{11}} G_1 \right) + c_2 \left[\frac{M_{12}}{M_{22}} G_1 + \frac{M_{22}}{M_{22}} G_2 \right] + \\ + c_3 \left[\frac{M_{13}}{M_{33}} G_1 + \frac{M_{23}}{M_{33}} G_2 + \frac{M_{33}}{M_{33}} G_3 \right] + \dots$$

Prawą stronę (4.19) pogrupujemy względem G_n :

$$(4.20) \quad \sum_{j=1}^{\infty} c_j \sum_{n=1}^j \frac{M_{nj}}{M_{jj}} G_n = \left[c_1 \frac{M_{11}}{M_{11}} + c_2 \frac{M_{12}}{M_{22}} + c_3 \frac{M_{13}}{M_{33}} + \dots \right] G_1 + \\ + \left[c_2 \frac{M_{22}}{M_{22}} + c_3 \frac{M_{23}}{M_{33}} + \dots \right] G_2 + \left[c_3 \frac{M_{33}}{M_{33}} + \dots \right] G_3 + \dots$$

Jeżeli następnie porównamy lewą stronę (4.18) z prawą stroną (4.20), to otrzymamy

$$(4.21) \quad b_n^* = \sum_{j=n}^{\infty} c_j \frac{M_{nj}}{M_{jj}}.$$

Wstawiając (4.16) do (4.21), określimy współczynniki b_n^* :

$$(4.22) \quad b_n^* = \omega_n + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{ni} a_i^*,$$

gdzie

$$(4.23) \quad \omega_n = \sum_{j=n}^{\infty} \zeta_j \frac{M_{nj}}{M_{jj}} = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{N_j} \frac{M_{nj}}{M_{jj}} \int_{-1}^1 \theta(x) P_j(x) dx, \\ \gamma_{ni} = - \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{N_j} \frac{M_{nj}}{M_{jj}} H_i(x) P_j(x) dx.$$

Formuła (4.22) pozwoli nam wyrugować b_n^* z (3.8)₁, a następnie określić współczynniki a_n^* . Wstawmy (4.22) do lewej strony (3.8)₁

$$(4.24) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\omega_n + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{ni} a_i^* \right) E_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* F_n(x) = \\ = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\omega_i + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{in} a_n^* \right) E_i(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* F_n(x) = \\ = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i E_i(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \left[F_n(x) + \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{in} E_i(x) \right].$$

Z (4.24) i (3.8)₁ wynika, że

$$(4.25) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* Y_n(x) = W(x),$$

gdzie

$$(4.26) \quad Y_n(x) = F_n(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{in} E_i(x), \quad W(x) = w(x) - \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i E_i(x).$$

Tę samą procedurę stosujemy do ortogonalizacji szeregu (4.25). Załóżmy, że funkcje $Q_n(x)$ spełniają warunek ortogonalności:

$$(4.27) \quad \int_{-1}^1 Q_m(x) Q_n(x) dx = \delta_{mn} K_n, \quad K_n = \int_{-1}^1 Q_n^2(x) dx.$$

Przedstawiając (4.25) w postaci szeregu ortogonalnego $Q_n(x)$ otrzymujemy

$$(4.28) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* Y_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n Q_n(x) = W(x).$$

Z drugiej równości (4.28) możemy określić q_n :

$$(4.29) \quad q_n = \frac{1}{K_n} \int_{-1}^1 Q_n(x) W(x) dx,$$

gdzie

$$(4.30) \quad Q_j(x) = \sum_{i=1}^j \frac{L_{ij}}{L_{jj}} Y_i(x)$$

oraz L_{jn} jest dopełnieniem algebraicznym elementu e_{jn} wyznacznika C_n :

$$(4.31) \quad C_n = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & \dots & & e_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ e_{n1} & \dots & & e_{nn} \end{vmatrix}, \quad e_{jn} = \int_{-1}^1 Y_j(x) Y_n(x) dx.$$

Z pierwszej równości (4.28), wykorzystując (4.30), otrzymujemy

$$(4.32) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* Y_n(x) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j Q_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \left(\sum_{n=1}^j \frac{L_{nj}}{L_{jj}} Y_n(x) \right).$$

Jeżeli rozwiniemy prawą stronę (4.32), a następnie pogrupujemy względem Y_n i porównamy z lewą stroną (4.32), to otrzymamy formułę na a_n^* :

$$(4.33) \quad a_n^* = \sum_{j=n}^{\infty} q_j \frac{L_{nj}}{L_{jj}},$$

gdzie q_j jest określone wzorem (4.29), Q_j — wzorem (4.30), a L_{nj} jest dopełnieniem elementu e_{jn} wyznacznika C_n .

Wzory (4.22) i (4.33) wyznaczają poszukiwane współczynniki a_n^* i b_n^* , a te z kolei pozwalają znaleźć niewiadome funkcje $B_1(\xi)$ i $B_2(\xi)$. Przy znanych funkcjach

$B_1(\xi)$ i $B_2(\xi)$ możemy zbadać postawione zagadnienie brzegowe, które daje się sprowadzić do układu dualnych równań całkowych (2.30).

Na brzegu składowe przemieszczenia i naprężenia wyrażone w zależności od współczynników a_n^* i b_n^* są następujące:

$$(4.34) \quad \sigma_{xx}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n^* \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \mathcal{F}^{-1}\{\kappa_7(\xi) J_{2n-2}(\xi); \xi \rightarrow x\} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n^* 2^{1/2} \frac{\Gamma\left(2n - \frac{1}{2}\right)}{(2n-2)!} \mathcal{F}^{-1}\left\{\kappa_8(\xi) \frac{1}{\xi} J_{2n-1}(\xi); \xi \rightarrow x\right\},$$

$$(4.35) \quad \sigma_{yy}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* P_{2n-2}^{(1/2, 1/2)}(x) (1-x^2)^{1/2}, \quad |x| \leq 1,$$

$$(4.36) \quad u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n^* \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \mathcal{F}^{-1}\{\kappa_5(\xi) J_{2n-2}(\xi); \xi \rightarrow x\} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n^* 2^{1/2} \frac{\Gamma\left(2n - \frac{1}{2}\right)}{(2n-2)!} \mathcal{F}^{-1}\left\{\kappa_6(\xi) \frac{1}{\xi} J_{2n-1}(\xi); \xi \rightarrow x\right\},$$

$$(4.37) \quad v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* E_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* F_n(x), \quad |x| > 1,$$

gdzie

$$(4.38) \quad \kappa_5(\xi) = \frac{m_1(\xi) P_2(\xi)}{c\varepsilon\gamma_1(\xi) K(\xi)} \left[1 - \frac{2\lambda_1 - (\xi)\lambda_3(\xi)}{(2-\beta^2 c^2)\xi^2}\right] - \\ - \frac{m_2(\xi) P_1(\xi)}{c\varepsilon\gamma_2(\xi) K(\xi)} \left[1 - \frac{2\lambda_2(\xi)\lambda_3(\xi)}{(2-\beta^2 c^2)\xi^2}\right],$$

$$(4.39) \quad \kappa_6(\xi) = \frac{m_1(\xi)\lambda_2(\xi)}{c\varepsilon\gamma_1(\xi) K(\xi)} \left[1 - \frac{2\lambda_1(\xi)\lambda_3(\xi)}{(2-\beta^2 c^2)\xi^2}\right] + \frac{m_2(\xi)\lambda_1(\xi)}{c\varepsilon\gamma_2(\xi) K(\xi)} \left[1 - \frac{2\lambda_2(\xi)\lambda_3(\xi)}{(2-\beta^2 c^2)\xi^2}\right],$$

$$(4.40) \quad \kappa_7(\xi) = \frac{P_3(\xi)P_2(\xi) - P_4(\xi)P_1(\xi)}{K(\xi)},$$

$$(4.41) \quad \kappa_8(\xi) = \frac{P_4(\xi)\lambda_2(\xi) + P_4(\xi)\lambda_1(\xi)}{K(\xi)},$$

$$(4.42) \quad P_3(\xi) = \frac{im_1(\xi)}{c\varepsilon\xi\gamma_1(\xi)} \left[\frac{4\lambda_1(\xi)\lambda_3(\xi)}{2-\beta^2 c^2} + (\beta^2 - 2)\lambda_1^2(\xi) - \beta^2 \xi^2 \right] - \beta^2,$$

$$(4.43) \quad P_4(\xi) = \frac{im_2(\xi)}{c\varepsilon\xi\gamma_2(\xi)} \left[\frac{4\lambda_2(\xi)\lambda_3(\xi)}{2-\beta^2 c^2} + (\beta^2 - 2)\lambda_2^2(\xi) - \beta^2 \xi^2 \right] - \beta^2,$$

$$(4.44) \quad K(\xi) = \lambda_1(\xi)P_2(\xi) - \lambda_2(\xi)P_1(\xi).$$

Autor pragnie wyrazić swoją głęboką wdzięczność Panu Prof. Z. OLEKSIAKOWI za pomoc okazaną w trakcie pisania pracy.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. I. N. SNEDDON, *Fourier transforms*, Mc Graw-Hill, 1951.
2. B. NOBLE, *Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations*, Pergamon Press, 1958.
3. W. F. YAU, A. S. САКМАК, *The indentation problem of an infinite hollow, elastic cylinder for an axisymmetric punch of finite length and arbitrary profile*, Int. J. Engng. Sci., 4, 463-481, 1966.
4. S. ИТОУ, А. АТСУМИ, *The effect of the contact couple-stress on indentation of an elastic Cosserat layer by moving punches*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 20, 1, 1972.
5. S. ИТОУ, *The effect of couple-stresses on the dynamic stress concentration around a crack*, Int. J. Engng. Sci., 10, 4, 1972.
6. G. SZEFER, *Solution of certain dual integral equations*, Arch. Mech. Stos., 16, 4, 1964.
7. I. N. SNEDDON, *Integral transform methods for the solution of mixed boundary value problems in the classical theory of elasticity*, skrypt z wykładów, s. 62, Warszawa 1973.
8. А. ERDELYI, *Higher transcendental functions*, 2, McGraw-Hill, 183, 1953.
9. Н. У. АХИЗЕР, И. М. ГЛАЗМАН, *Теория линейных операторов в Гильбертовом пространстве*, Наука, Москва 1966.
10. А. ERDELYI, *Tables of integral transforms*, 1, McGraw-Hill, 122, 1954.
11. I. N. SNEDDON, *The use of integral transforms*, McGraw-Hill, 38, 1972.
12. И. С. ГРАДШТЕИН, Я. М. РЫЖИК, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Гос. Изд. Физ.-Мат., Ленинград-Москва 1971.
13. P. M. MORSE, H. FESHBACH, *Methods of theoretical physics*, 1, McGraw-Hill, 926, 1953.
14. G. A. KORN, T. M. KORN, *Mathematical handbook*, McGraw-Hill, 1968.

Резюме

РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕННОГО ТЕРМОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В работе дается решение динамической контактной задачи сопряженного термоупругого полупространства со смешанными граничными условиями (2.19) и (2.20). Применяя двойное преобразование Фурье эта задача сведена к системе дуальных интегральных уравнений (2.30), которую решается методом рядов. Представляя неизвестные функции $b_1(x)$ и $b_2(x)$ в виде (3.1) эта система сведена к двум уравнениям в виде рядов (3.16) содержащих неизвестные коэффициенты a_n^* и b_n^* . Эти коэффициенты определяем из уравнений (3.16) модифицированным методом ортогонализации Шмидта.

SUMMARY

SOLUTION OF CONTACT DYNAMIC PROBLEM OF COUPLED THERMOELASTIC HALF-SPACE

The solution of the dynamic contact problem of the coupled thermoelastic halfspace with boundary conditions (2.19) and (2.20) is given. Applying double Fourier transform the problem was reduced to the system of dual integral equations (2.30) and solved by the series method. Representing the unknown functions $b_1(x)$ and $b_2(x)$ in a form (3.1) this system was reduced to two series equations (3.16) containing unknown coefficients a_n^* and b_n^* . The coefficient were evaluated from Eqs. (3.16) by the modified Schmidt orthogonalization method.

UNIWERSYTET WARSZAWSKI
INSTYTUT MECHANIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 września 1974 r.