

RUCHOME ŹRÓDŁA CIEPŁA W PÓLNIESKOŃCZONEJ TARCZY

ŚLAWOMIR SZYMAŃSKI (PIŁA)

Głównym celem pracy jest znalezienie pola temperatury w półnieskończonej tarczy z typowymi warunkami granicznymi w przypadku poruszającego się ze stałą prędkością v prostopadle do prostoliniowego brzegu tarczy skupionego, a następnie liniowego źródła o stałym wydatku ciepła oraz przeanalizowanie możliwości superpozycji czasowej, przy czym konstrukcja rozwiązania powinna uwzględniać przypadek $v=0$. W rozdziale pierwszym «Skupione źródło punktowe» sformułowano zagadnienie, uzasadniono wybór metody postępowania, podano konstrukcję oraz przeprowadzono badania typu jakościowego, własności tego rozwiązania. Dla celów rachunkowych podano inną, dogodniejszą, wersję rozwiązania, ilustrując wyniki przykładem liczbowym, przydatnym w praktyce inżynierskiej. W rozdziale drugim «Liniowe źródło ciepła» sformułowano model fizyczny oraz podano model matematyczny liniowego źródła ciepła. Na przykładzie tym zbadano możliwość superpozycji czasowej rozwiązania w przypadku skupionego źródła ciepła. Uzyskane wyniki zilustrowano przykładem liczbowym.

OZNACZENIA

- $\delta(\zeta)$ funkcja Diraca,
 $\eta(\zeta)$ funkcja Heaviside'a,
 $\text{ch}(\zeta)$ cosinus hiperboliczny,
 $Ei(\zeta)$ funkcja całkowo-wykładnicza,
 $\text{Erfc}(\zeta)$ dopełnienie funkcji błędu Krampa-Laplace'a dla argumentów rzeczywistych,
 $K_0(\zeta)$ zmodyfikowana funkcja Bessela drugiego rodzaju rzędu zerowego (funkcja McDonalda),
 $\text{sh}(\zeta)$ sinus hiperboliczny,
 ϵ_1 dowolnie mała liczba występująca w argumentach funkcji Heaviside'a,
 $a = \kappa(\alpha^2 + \alpha'^2)$,
 $b_1 = \sqrt{\frac{v^2}{4\kappa^2} + \alpha'^2}$,
 $b = 2\kappa v \sqrt{\frac{v^2}{4\kappa^2} + \alpha'^2}$,
 $\sqrt{S_1} = \sqrt{\frac{v^2}{4\kappa^2} + \alpha'^2} + \frac{v}{2\kappa}$,
 $\sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{v^2}{4\kappa^2} + \alpha'^2} - \frac{v}{2\kappa}$,
 $T_c(x, \beta, t)$ transformata cosinusowa Fouriera,

t czas mierzony od umownego momentu «zero»,

v prędkość ruchu źródła ciepła,

W jednostkowy wydatek źródła ciepła,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{operator Laplace'a.}$$

WSTĘP

Rozwiązanie każdego niesprzężonego zagadnienia termosprężystości wymaga znajomości odpowiedniego pola temperatury. Wyznaczanie pola temperatury jest przedmiotem teorii przewodnictwa cieplnego. W tej pracy ograniczymy się do wyznaczenia dwu pól temperatury w cienkiej półnieskończonej tarczy, w której poruszają się skupione źródła ciepła.

Wyznaczaniem pól temperatury z ruchomymi źródłami ciepła pierwszy zajmował się w r. 1946 ROSENTHAL [9]. Szereg rozwiązań dla pól naprężeń wywołanych działaniem ruchomych źródeł ciepła w ośrodkach sprężystych można znaleźć w monografii W. NOWACKIEGO ([7], rozdz. 4, § 3). Wszystkie zagadnienia w wymienionej monografii dotyczą jednak przestrzeni nieograniczonej. Ciekawe rozwiązania dla przestrzeni sprężytej i przypadku źródła punktowego ruchomego, ale chwilowego, podała w r. 1968 Z. SOB CZYŃSKA [11].

Wymienione tutaj rozwiązania, jak również inne znane autorowi prace z tego przedmiotu, opierają się (w metodzie traktowania zagadnienia) na teorii osi ruchomych, którą do rozwiązywania omawianych zagadnień wprowadził we wspomnianej już pracy ROSENTHAL [9]. Jedyne wyjątek stanowi tutaj praca M. ŻÓRAWSKIEGO [14].

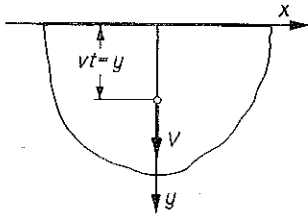
Metoda osi ruchomych jest bardzo pomocna z teoriopoznawczego punktu widzenia. Zdaje ona egzamin w przypadkach obszarów nieograniczonych, tj. gdy źródło ciepła o stałym wydatku porusza się wzdłuż osi od $-\infty$ do ∞ . Zawodzi jednak, gdy obszar jest ograniczony, co ma miejsce w naszym przypadku, lub wtedy, gdy źródło zaczyna działać nagle w określonym punkcie przestrzeni.

W niniejszej pracy rozwiązania zagadnień przewodnictwa cieplnego budować będziemy w nieruchomym układzie współrzędnych. Zajmiemy się kolejno dwoma zagadnieniami wyznaczania pól temperatury w cienkiej półnieskończonej tarczy, wywołanych działaniem ruchomych źródeł ciepła o stałym wydatku. W każdym z tych zagadnień źródło zaczyna działać na brzegu tarczy i porusza się ze stałą prędkością w jej obszarze prostopadle do brzegu. Odpowiednio do tego założenia dobieramy układ współrzędnych, co zaznaczono na odpowiednich rysunkach.

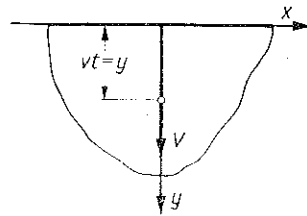
Przypadek 1. Źródło punktowe porusza się ze stałą prędkością v i ma stały wydatek w czasie; jest to ruchome źródło Diraca (rys. 1).

Przypadek 2. Źródło, jak w przypadku pierwszym, pozostawia za sobą ślad o stałym wydatku, równym wydatkowi źródła ruchomego. Jest to przesuwanie się w tarczy źródła liniowego ze stałą prędkością (rys. 2).

Przypadek drugi powinien być superpozycją przypadku pierwszego. Rozważmy go jednak oddzielnie ze względu na to, że nie jest sprawą jasną, względem której zmiennej należy dokonać superpozycji.



Rys. 1



Rys. 2

1. SKUPIONE ŹRÓDŁO PUNKTOWE

1.1. Sformułowanie zagadnienia

Rozważmy półnieskończoną cienką tarczę o grubości jednostkowej (rys. 3). Układ współrzędnych dobieramy tak jak, to pokazano na rysunku. W chwili czasu $t=0$ od brzegu tarczy z punktu $x=0$ «startuje» źródło ciepła i porusza się ze stałą prędkością v wzdłuż osi y . Wydatek źródła jest stały w czasie i rozłożony równomiernie na całej grubości tarczy.

Źródło musi spełniać warunek, aby dla $v \rightarrow 0$ odpowiedni wzór opisywał źródło nieruchome, umieszczone w początku układu współrzędnych i działające ze stałym wydatkiem w czasie poczynając od chwili $t=0$. Ten warunek spełnia źródło określone w sposób następujący:

$$(1.1) \quad W(t) = W\delta(vt - y)\delta(x)\eta(t),$$

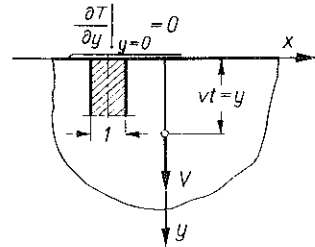
przy czym W jest stałym w czasie wydatkiem źródła ciepła na jednostkę czasu i objętości; $\delta(\xi)$ oznacza funkcję Diraca oraz $\eta(t)$ funkcję Heaviside'a. Wykonanie przejścia $v \rightarrow 0$ prowadzi do wzoru

$$W(t) \xrightarrow{v \rightarrow 0} W\delta(y)\delta(x)\eta(t),$$

który opisuje źródło nieruchome.

Pole temperatury traktujemy jako płaskie, tzn. przyjmujemy, że powierzchnie tarczy są izolowane. Liniowe równanie przewodnictwa cieplnego ma w tym przypadku postać ([7], s. 224)

$$(1.2) \quad \nabla^2 T = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{Q}{\kappa} \delta(vt - y)\delta(x)\eta(t), \quad \kappa = \frac{\lambda}{cp}, \quad Q = \frac{W}{cp},$$



Rys. 3

przy czym T oznacza temperaturę względną, mierzoną od dowolnie przyjętej temperatury odniesienia uważanej za zero względne, c ciepło właściwe materiału tarczy, ρ gęstość materiału tarczy oraz λ współczynnik przewodzenia ciepła.

Równanie (1.2) zgodnie z poprzednimi rozważaniami rozwiążemy dla warunku początkowego:

$$(1.3) \quad T(x, y, 0) = 0$$

oraz warunków brzegowych:

$$(1.4) \quad \left[\frac{\partial T}{\partial y} \right]_{y=0} = 0,$$

$$(1.5) \quad T \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad \text{gdzie} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1.2. Wyznaczenie rozwiązania

We wstępie zaznaczyliśmy, że metoda osi ruchomych w naszym przypadku nie zdaje egzaminu. Brzeg obszaru, a ściślej warunek brzegowy, staje się wtedy zależny od czasu.

Posłużenie się transformacją Laplace'a wyklucza możliwość przejścia granicznego $v \rightarrow 0$. Można się o tym przekonać wykonując transformację funkcji Diraca, wchodzącej w skład opisu źródła:

$$\int_0^{\infty} \delta(vt - y) e^{-vt} dt.$$

Stosując podstawienie $\tau = vt$ otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} (\tau - y) e^{-\frac{p\tau}{v}} d\tau.$$

Widzimy, że przejście graniczne $v \rightarrow 0$ prowadzi do nieoznaczoności górnej granicy całkowania.

Funkcję Diraca $\delta(x)$ przedstawimy w postaci całki Fouriera ([4], rozdz. 1, § 3 i 4):

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\alpha x) d\alpha.$$

Ze względu na warunek brzegowy (1.4) do określenia rozwiązania możemy posłużyć się transformacją cosinusową Fouriera [2]:

$$(1.6) \quad T_c(x, \beta, t) = \int_0^{\infty} T(x, y, t) \cos(\beta y) dy.$$

Przetransformowane równanie (1.2) z uwzględnieniem warunku brzegowego (1.4) ma teraz postać

$$(1.7) \quad \frac{\partial^2 T_c}{\partial x^2} - \beta^2 T_c - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T_c}{\partial t} = -\frac{Q}{\pi\kappa} \eta(t) \cos(\beta vt) \int_0^{\infty} \cos(\alpha x) d\alpha.$$

Rozwiązanie wypisanego równania przewidujemy w postaci

$$(1.8) \quad T_c(x, \beta, t) = \frac{Q}{\pi\kappa} \int_0^{\infty} f(t) \frac{\cos(\alpha x)}{\beta^2 + \alpha^2} d\alpha.$$

Podstawienie tego rozwiązania do równania (1.7) prowadzi do równania różniczkowego zwyczajnego, określającego funkcję $f(t)$:

$$(1.9) \quad f(t) + \frac{f'(t)}{\kappa(\beta^2 + \alpha^2)} = \eta(t) \cos(\beta vt),$$

przy czym jego rozwiązanie musi spełniać następujący warunek początkowy:

$$(1.10) \quad f(0) = 0.$$

Stosując metodę uzmiennienia stałej otrzymujemy poszukiwane rozwiązanie równania (1.9) w postaci

$$(1.11) \quad f(t) = a \frac{a \cos(\beta vt) + (\beta v) \sin(\beta vt)}{a^2 + \beta^2 v^2} - \frac{ae^{-at}}{a^2 + \beta^2 v^2},$$

przy czym

$$a = \kappa(\beta^2 + \alpha^2).$$

Z analizy funkcji $f(t)$ wynika bezpośrednio, że rozwiązanie (1.8) spełnia warunek początkowy (1.3) oraz brzegowy (1.4).

Gdy $v \rightarrow 0$, rozwiązanie nasze wyraża się wzorem

$$(1.12) \quad \tilde{T}(x, y, t) = \frac{2Q}{\pi^2} \eta(t) \int_0^{\infty} \int \frac{1 - e^{-at}}{a} \cos(\alpha x) \cos(\beta y) d\alpha d\beta,$$

które odpowiada rozwiązaniu równania przewodnictwa

$$\nabla^2 \tilde{T} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \frac{Q}{\kappa} \delta(y) \delta(x) \eta(t)$$

z warunkami początkowym (1.3) oraz brzegowymi (1.4) i (1.5). Zgodnie zatem z dyskusją opisu źródła przeprowadzoną w p. 1.1, otrzymany wynik jest poprawny.

1.3. Obliczenie całki względem parametru β

Wzór (1.8) przedstawimy w postaci następującej:

$$(1.13) \quad T = \frac{2Q}{\pi^2} \eta(t) \int_0^{\infty} \cos(\alpha x) [I_1(y, v, t) + I_2(y, v, t) - I_3(y, v, t)] d\alpha,$$

przy czym

$$(1.14) \quad \begin{aligned} I_1(y, v, t) &= \int_0^{\infty} \frac{a \cos(\beta vt)}{a^2 + \beta^2 v^2} \cos(\beta y) d\beta, \quad a = \kappa(\beta^2 + \alpha^2), \\ I_2(y, v, t) &= \int_0^{\infty} \frac{\beta v \sin(\beta vt)}{a^2 + \beta^2 v^2} \cos(\beta y) d\beta, \\ I_3(y, v, t) &= \int_0^{\infty} \frac{a e^{-\alpha t}}{a^2 + \beta^2 v^2} \cos(\beta y) d\beta. \end{aligned}$$

Zauważmy, że mianownik we wszystkich trzech całkach (1.14) jest identyczny. Jeżeli mianowniki funkcji podcałkowych (1.14) rozłożymy na ułamki proste

$$(1.15) \quad \frac{1}{a^2 + \beta^2 v^2} = \frac{1}{b} \left(\frac{1}{\beta^2 + S_2} - \frac{1}{\beta^2 + S_1} \right),$$

gdzie

$$(1.16) \quad -S_{12} = - \left[\alpha^2 + \frac{v}{\kappa} \left(\frac{v}{2\kappa} \pm \sqrt{\frac{v^2}{4\kappa^2} + \alpha^2} \right) \right]$$

oraz

$$(1.17) \quad b = 2v\kappa \sqrt{\frac{v^2}{4\kappa^2} + \alpha^2},$$

to na podstawie wzoru (1.15) możemy stwierdzić, że mianownik każdej z otrzymanych na tej drodze funkcji podcałkowych będzie dążył do zera, gdy $v \rightarrow 0$. Postępowanie takie jest więc dopuszczalne tylko przy założeniu, że $v \neq 0$. Przypadek $v = 0$ wymaga oddzielnego potraktowania i sprowadza się do obliczenia całki podwójnej, występującej we wzorze (1.12). Jest to znane w literaturze przedmiotu [7] rozwiązanie i w tym miejscu poprzestaniemy na podaniu wyniku:

$$(1.18) \quad \tilde{T}(x, y, t) = \frac{Q}{2\pi\kappa} \eta(t) \left[-Ei \left(-\frac{x^2 + y^2}{4\kappa t} \right) \right].$$

Wykorzystując wzór (1.15) dla trzech całek (1.14), otrzymujemy sześć następujących całek:

$$(1.19) \quad \begin{aligned} I_{11}(y, v, t) &= \int_0^{\infty} \frac{a \cos(\beta vt)}{b(\beta^2 + S_2)} \cos(\beta y) d\beta, \\ I_{12}(y, v, t) &= - \int_0^{\infty} \frac{a \cos(\beta vt)}{b(\beta^2 + S_1)} \cos(\beta y) d\beta, \\ I_{21}(y, v, t) &= \int_0^{\infty} \frac{\beta v \sin(\beta vt)}{b(\beta^2 + S_1)} \cos(\beta y) d\beta, \end{aligned}$$

$$(1.19) \quad I_{22}(y, v, t) = - \int_0^{\infty} \frac{\beta v \sin(\beta vt)}{b(\beta^2 + S_2)} \cos(\beta y) d\beta,$$

[c.d.]

$$I_{31}(y, v, t) = \int_0^{\infty} \frac{ae^{-at}}{b(\beta^2 + S_2)} \cos(\beta y) d\beta,$$

$$I_{32}(y, v, t) = - \int_0^{\infty} \frac{ae^{-at}}{b(\beta^2 + S_2)} \cos(\beta y) d\beta.$$

W pierwszych czterech całkach występują iloczyny funkcji trygonometrycznych. Wykorzystując znane wzory, definicję transformacji sinusowej i cosinusowej Fouriera oraz uwzględniając konieczność całkowania w całym przedziale zmiennej niezależnej, napiszemy

$$(1.20) \quad \cos(\beta vt)\cos(\beta y) = \frac{1}{2} [\eta(vt+y) \cos \beta(vt+y) + \eta(vt-y) \cos \beta(vt-y) + \\ + \eta(y-vt) \cos \beta(y-vt)],$$

$$\sin(\beta vt)\cos(\beta y) = \frac{1}{2} [\eta(vt+y) \sin \beta(vt+y) + \eta(vt-y) \sin \beta(vt-y) - \\ - \eta(y-vt) \sin \beta(y-vt)].$$

Wprowadzając wzory (1.20) do całek (1.19) otrzymujemy do obliczenia czterenaście całek. Postępowanie przy ich wypisywaniu wydaje się oczywiste. Szczegóły obliczeń tych całek nie wnoszą nowych istotnych elementów, poprzestaniemy więc na podaniu wyników całkowania:

$$(1.21) \quad I_{11} + I_{12} + I_{21} + I_{22} = \frac{\pi}{2\kappa b_1} [\eta(vt+y) e^{-(vt+y)\sqrt{S_2}} + \eta(vt-y) e^{-(vt-y)\sqrt{S_2}} + \\ + \eta(y-vt) e^{-(y-vt)\sqrt{S_1}}]$$

oraz

$$(1.22) \quad I_{31} + I_{32} = \frac{\pi}{8\kappa b_1} \left[e^{-(y+vt)\sqrt{S_2}} \operatorname{Erfc} \left(\sqrt{\kappa t S_2} - \frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} \right) + \right. \\ + e^{-(vt-y)\sqrt{S_2}} \operatorname{Erfc} \left(\sqrt{\kappa t S_2} + \frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} \right) + e^{-(y-vt)\sqrt{S_1}} \operatorname{Erfc} \left(\sqrt{\kappa t S_1} - \frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} \right) + \\ \left. + e^{(y+vt)\sqrt{S_1}} \operatorname{Erfc} \left(\sqrt{\kappa t S_1} + \frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right],$$

przy czym

$$(1.23) \quad b_1 = \sqrt{\frac{v^2}{4\kappa^2} + \alpha^2}$$

oraz

$$(1.24) \quad S_1 = \sqrt{\frac{v^2}{4\kappa^2} + \alpha^2} + \frac{v}{2\kappa}, \quad S_2 = \sqrt{\frac{v^2}{4\kappa^2} + \alpha^2} - \frac{v}{2\kappa}.$$

We wzorach (1.24) oba pierwiastki przyjęliśmy ze znakiem plus. Gdybyśmy przyjęli znaki ujemne, to w trakcie obliczania całek względem α otrzymalibyśmy zbiór rozwiązań pusty.

Przypomnijmy raz jeszcze, że wzory (1.21) i (1.22) są poprawne tylko wtedy, gdy $v > 0$. Natomiast dla wzoru (1.22) należy dołączyć dodatkowy warunek $t > 0$.

1.4. Obliczanie całek względem parametru α

W przypadku czterech pierwszych całek $I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}$, [wzór (1.21)] wyniki całkowania znajdujemy w tablicach BATEMANA [2] i na tej podstawie wyznaczamy część rozwiązania, określonego wzorem (1.14):

$$(1.25) \quad \int_0^{\infty} [I_1(y, v, t) + I_2(y, v, t)] \cos(\alpha x) d\alpha = \\ = \frac{\pi}{2\kappa} \left\{ \eta(vt+y) \exp\left[\frac{v}{2\kappa}(vt+y)\right] K_0\left[\frac{v}{2\kappa}\sqrt{(vt+y)^2+x^2}\right] + \right. \\ \left. + \eta(y-vt) \exp\left[-\frac{v}{2\kappa}(y-vt)\right] K_0\left[\frac{v}{2\kappa}\sqrt{(y-vt)^2+x^2}\right] + \right. \\ \left. + \eta(vt-y) \exp\left[\frac{v}{2\kappa}(vt-y)\right] K_0\left[\frac{v}{2\kappa}\sqrt{(vt-y)^2+x^2}\right] \right\}, \quad v > 0.$$

Analizując wzór (1.25) stwierdzamy, że dwa ostatnie składniki wyczerpują wszelkie kombinacje zmiennych $(y-vt)$. Rozdzielenie tych składników za pomocą funkcji Heaviside'a $\eta(vt-y)$ oraz $\eta(y-vt)$ jest czysto formalne. W rozpatrywanym wzorze można więc pominąć funkcje Heaviside'a i napisać, co następuje:

$$(1.26) \quad \int_0^{\infty} [I_1(y, v, t) + I_2(y, v, t)] \cos(\alpha x) d\alpha = \\ = \frac{\pi}{2\kappa} \left\{ \exp\left[\frac{v}{2\kappa}(vt+y)\right] K_0\left[\frac{v}{2\kappa}\sqrt{(vt+y)^2+x^2}\right] + \right. \\ \left. + \exp\left[\frac{v}{2\kappa}(vt-y)\right] K_0\left[\frac{v}{2\kappa}\sqrt{(vt-y)^2+x^2}\right] \right\},$$

gdzie $K_0[\xi]$ oznacza funkcję Mc Donalda drugiego rodzaju, rzędu zerowego.

Pozostają do wyznaczenia całki, w których występują funkcje $\text{Erfc}[\xi]$. Wypiszemy jedną z tych całek [rozwijając jednocześnie $\sqrt{S_2}$]; na podstawie wzoru (1.22) znajdziemy

$$(1.27) \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-(vt+y)\sqrt{S_2}}}{b_1} \text{Erfc}\left(\sqrt{\kappa t S_2} - \frac{y}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \cos(\alpha x) d\alpha =$$

$$(1.27) \quad \begin{aligned} &= \exp \left[\frac{v}{2\kappa} (vt+y) \right] \int_0^\infty \frac{\exp \left[-(vt+y) \sqrt{\frac{v^2}{4\kappa^2} + \alpha^2} \right]}{\sqrt{\frac{v^2}{4\kappa^2} + \alpha^2}} \times \\ &\times \operatorname{Erfc} \left[\sqrt{\kappa t} \sqrt{\frac{v^2}{4\kappa^2} + \alpha^2} - \frac{(vt+y)}{2\sqrt{\kappa t}} \right] \cos(\alpha x) d\alpha. \end{aligned}$$

[c.d.]

Usiłowania, aby ten typ całki sprowadzić do prostszej postaci nie dały pozytywnego wyniku. Autor nie znalazł również w literaturze przykładów analizy takiej całki. Można tylko powiedzieć, że funkcja podcałkowa nie posiada osobliwości ani ze względu na parametr całkowania α , ani też ze względu na parametry v i t . Najbardziej niekorzystny przypadek ze względu na zbieżność całki ma miejsce wtedy, gdy funkcja wykładnicza ma dodatni wykładnik. Przypadek taki zachodzi w czwartej całce (1.22). Jednak i w tym przypadku funkcja podcałkowa jest ograniczona i dąży do zera, gdy $\alpha \rightarrow \infty$ ze względu na własności funkcji Erfc [ξ].

1.5. Konstrukcja i własności rozwiązania

Reasumując wyniki obliczeń całek z pp. 1.3 i 1.4, wzory (1.22) i (1.26), rozwiązanie (1.13) przedstawiamy jak następuje:

$$(1.28) \quad \begin{aligned} T(x, y, t) = & \frac{Q}{2\pi\kappa} \eta(t) \eta(v - \varepsilon_1) \left\{ \exp \left[\frac{v}{2\kappa} (vt+y) \right] K_0 \left[\frac{v}{2\kappa} \sqrt{(vt+y)^2 + x^2} \right] + \right. \\ & \left. + \exp \left[\frac{v}{2\kappa} (vt-y) \right] K_0 \left[\frac{v}{2\kappa} \sqrt{(vt-y)^2 + x^2} \right] - \right. \\ & - \frac{Q}{4\pi\kappa} \eta(t - \varepsilon_2) \eta(v - \varepsilon_1) \eta(t) \int_0^\infty \left\{ \exp \left[(vt-y) \left(b_1 + \frac{v}{2\kappa} \right) \right] \times \right. \\ & \times \operatorname{Erfc} \left[\sqrt{\kappa t} b_1 + \frac{(vt-y)}{2\sqrt{\kappa t}} \right] + \exp \left[(vt+y) \left(b_1 + \frac{v}{2\kappa} \right) \right] \times \\ & \times \operatorname{Erfc} \left[\sqrt{\kappa t} b_1 + \frac{(vt+y)}{2\sqrt{\kappa t}} \right] + \exp \left[-(vt+y) \left(b_1 - \frac{v}{2\kappa} \right) \right] \times \\ & \times \operatorname{Erfc} \left[\sqrt{\kappa t} b_1 - \frac{(vt+y)}{2\sqrt{\kappa t}} \right] + \exp \left[-(vt-y) \left(b_1 - \frac{v}{2\kappa} \right) \right] \times \\ & \left. \left. \times \operatorname{Erfc} \left[\sqrt{\kappa t} b_1 - \frac{(vt-y)}{2\sqrt{\kappa t}} \right] \right\} \frac{\cos(\alpha x)}{b_1} d\alpha, \end{aligned}$$

przy czym

$$b_1 = \sqrt{\frac{v^2}{4\kappa^2} + \alpha^2}.$$

Liczby ε_1 i ε_2 występujące w argumencie funkcji Heaviside'a są nieskończenie małymi o odpowiednim wymiarze, co oznacza, że odpowiednie wyrazy znikają, gdy t lub v dąży do zera.

Przypadek, gdy $v \rightarrow 0$, omawialiśmy w p. 3. Rozwiązanie dla tego przypadku przedstawia wzór (1.18). Pozostaje do przedyskutowania przejście graniczne dla $t \rightarrow 0$, tzn. sprawdzenie przyjętego warunku początkowego (1.3).

Pierwsza część rozwiązania ma granicę następującą:

$$(1.29) \quad \frac{Q}{2\pi\kappa} \eta(v - \varepsilon_1) \eta(t) \left\{ \exp \left[\frac{v}{2\kappa} (vt + y) \right] K_0 \left[\frac{v}{2\kappa} \sqrt{(vt + y)^2 + x^2} \right] + \right. \\ \left. + \exp \left[\frac{v}{2\kappa} (vt - y) \right] K_0 \left[\frac{v}{2\kappa} \sqrt{(vt - y)^2 + x^2} \right] \right\} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{Q}{2\pi\kappa} \times \\ \times \eta(v - \varepsilon_1) \operatorname{ch} \left(\frac{v}{2\kappa} y \right) K_0 \left[\frac{v}{2\kappa} \sqrt{y^2 + x^2} \right].$$

Granice drugiej części rozwiązania trzeba znaleźć na innej drodze, ponieważ przejście graniczne $t \rightarrow 0$ dla tej postaci nie prowadzi do celu, co wynika z wniosków z przeprowadzonego poprzednio rozumowania. Funkcję tę możemy określić wykonując przejście graniczne $t \rightarrow 0$ już w całkach I_{31}, I_{32} [wzory (1.19)]:

$$(1.30) \quad I_{31} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{a}{b(\beta^2 + S_2)} \cos(\alpha x) d\alpha, \\ I_{32} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{a}{b(\beta^2 + S_1)} \cos(\alpha x) d\alpha, \quad \text{gdym} \quad t \rightarrow 0.$$

Pamiętamy, że $a = \kappa(\beta^2 + \alpha^2)$ oraz że $b = 2\kappa v \sqrt{\frac{v^2}{4\kappa^2} + \alpha^2}$.

Posługując się tablicami BATEMANA ([2], s. 7 wzór 5; s. 8 wzór 11; s. 17 wzór 28) po niezbędnych przekształceniach, otrzymamy na podstawie wzoru (1.14)

$$(1.31) \quad -\frac{2Q}{\pi^2} \eta(t) \int_0^{\infty} I_3(y, v, t) \cos(\alpha x) d\alpha \xrightarrow{t \rightarrow 0} -\frac{Q}{2\pi\kappa} \times \\ \times \eta(v - \varepsilon_1) \operatorname{ch} \left(\frac{v}{2\kappa} y \right) K_0 \left[\frac{v}{2\kappa} \sqrt{y^2 + x^2} \right].$$

Suma wartości granic obliczonych na podstawie wzorów (1.29) i (1.31) pozwala stwierdzić, że

$$(1.32) \quad T(x, y, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0,$$

przy czym w przejściach granicznych należało założyć $v > 0$. W przypadku $v = 0$ przejście graniczne należy wykonać już we wzorze (1.14). W tym ostatnim przypadku zbieżność (1.32) do zera jest oczywista z uwagi na własności funkcji $E_1(-\xi)$. \square

Można sprawdzić, że w każdym z rozważanych przypadków spełnione są warunki brzegowe (1.4) i (1.5).

W punkcie działania źródła, gdy $y=vt$, $x=0$, na podstawie wzoru (1.28) mamy

$$(1.33) \quad T(0, vt, t) = \frac{Q}{2\pi\kappa} \eta(t) \eta(v - \varepsilon_1) \left\{ \exp\left(\frac{v^2 t}{\kappa}\right) K_0\left(\frac{v^2 t}{\kappa}\right) + \lim_{vt \rightarrow y} K_0\left[\frac{v}{2\kappa}(vt - y)\right] \right\} - \frac{Q}{4\pi\kappa} \eta(t - \varepsilon_2) \eta(v - \varepsilon_1) \times \\ \times \eta(t) \int_0^\infty \left\{ 2\text{Erfc}\sqrt{\kappa t} b_1 + \exp\left[2vt\left(b_1 + \frac{v}{2\kappa}\right)\right] \times \text{Erfc}\left(\sqrt{\kappa t} b_1 + \frac{vt}{\kappa t}\right) + \right. \\ \left. + \exp\left[-2vt\left(b_1 - \frac{v}{2\kappa}\right)\right] \times \text{Erfc}\left(\sqrt{\kappa t} b_1 - \frac{vt}{\kappa t}\right) \right\} \frac{\cos(\alpha x)}{b_1} d\alpha.$$

Widzimy, że osobliwość występuje w drugim składniku wzoru, tzn.

$$\lim_{vt \rightarrow y} K_0\left[\frac{2\kappa}{v}(vt - y)\right] \approx \lim_{vt \rightarrow y} \left\{ -\ln\left[\frac{v}{2\kappa}(vt - y)\right] + \ln 2 \right\}$$

i zgodnie z definicją funkcji $K_0(\zeta)$ jest to osobliwość logarytmiczna.

1.6. Druga postać rozwiązania

Rozwiązanie podane w pp. 1.5 ma głównie znaczenie poznawcze. Jest ono niewygodne dla obliczeń numerycznych. W tym podpunkcie znajdziemy inne rozwiązanie, bardziej dogodne dla tego celu.

Nasze rozważania rozpoczniemy od wzoru (1.13). Zajmiemy się przekształceniem całki $I_3(y, v, t)$ [wzór (1.14)]. Funkcję podcałkową rozkładamy na ułamki proste:

$$(1.34) \quad \frac{1}{a^2 + \beta^2 v^2} = \frac{1}{(a + i\beta v)(a - i\beta v)} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{a + i\beta v} + \frac{1}{a - i\beta v} \right).$$

Zgodnie ze wzorem (1.14) zamiast całki I_3 będziemy mieli teraz dwie całki:

$$(1.35) \quad I_3 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-at}}{a + i\beta v} \cos(\beta y) d\beta + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-at}}{a - i\beta v} \cos(\beta y) d\beta = \frac{1}{2} [I_{31} + I_{32}].$$

Zajmiemy się całką I_{31} . Funkcję podcałkową mnożymy przez $e^{i\beta vt} e^{-i\beta vt}$; otrzymujemy

$$I_{31} = \int_0^\infty \frac{e^{i\beta vt} e^{-(a+i\beta v)t}}{a + i\beta v} \cos(\beta y) d\beta.$$

Funkcję $e^{-(a+i\beta v)t}$ różniczkujemy i całkujemy względem czasu:

$$(1.36) \quad I_{31} = - \int_0^\infty e^{i\beta vt} \int_0^t e^{-(a+i\beta v)\tau} \cos(\beta y) d\beta d\tau + \int_0^\infty e^{i\beta vt} \frac{\cos(\beta y)}{a + i\beta v} d\beta.$$

Druga całka we wzorze (1.36) odpowiada dolnej granicy w całce względem czasu w pierwszej części wzoru, ale jest wzięta z przeciwnym znakiem.

Identyczne postępowanie z całką $I_{3,2}$ prowadzi do wzoru

$$(1.37) \quad I_{3,2} = - \int_0^{\infty} e^{-i\beta v t} \int_0^t e^{-(a-i\beta v)\tau} \cos(\beta y) d\beta d\tau + \int_0^{\infty} e^{-i\beta v t} \frac{\cos(\beta y)}{a-i\beta v} d\beta.$$

Suma drugich składników we wzorach (1.36) i (1.37) wynosi

$$(1.38) \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{i\beta v t}}{a+i\beta v} \cos(\beta y) d\beta + \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\beta v t}}{a-i\beta v} \cos(\beta y) d\beta = 2 [I_1(y, v, t) + I_2(y, v, t)],$$

przy czym I_1 oraz I_2 są określone wzorami (1.14).

Jeżeli uwzględnimy otrzymany wynik oraz wzory (1.36), (1.37) i (1.35), to wzór (1.13) przyjmie postać

$$T = \frac{Q}{\pi^2} \eta(t) \left\{ \int_0^{\infty} \cos(\beta y) d\beta \int_0^t e^{-i\beta v(\tau-t)} d\tau \int_0^{\infty} e^{-\alpha \tau} \cos(\alpha x) d\alpha + \int_0^{\infty} \cos(\beta y) d\beta \times \right. \\ \left. \times \int_0^t e^{i\beta v(\tau-t)} d\tau \int_0^{\infty} e^{-\alpha \tau} \cos(\alpha x) d\alpha \right\}.$$

Z tablic {[2], s. 15, wzór (11)} znajdujemy całki względem parametru α , a następnie także {[2], s. 21, wzór (20)} względem parametru β . Ponadto korzystamy ze znanej zależności:

$$e^{i\beta v(\tau-t)} + e^{-i\beta v(\tau-t)} = 2 \operatorname{ch} [i\beta v(\tau-t)] = 2 \cos [\beta v(\tau-t)]$$

i piszemy

$$(1.39) \quad T = \frac{Q}{2\pi\kappa} \eta(t) \int_0^t \frac{\exp \left[-\frac{x^2 + y^2 + v^2(\tau-t)^2}{4\kappa\tau} \right]}{\tau} \operatorname{ch} \left[\frac{yv(\tau-t)}{2\kappa\tau} \right] d\tau.$$

Jeżeli jeszcze rozwiemy $\operatorname{ch}(\zeta)$, to zamiast wzoru (1.39) otrzymujemy

$$(1.40) \quad T = \frac{Q}{4\pi\kappa} \eta(t) \int_0^t \left\{ \exp \left[-\frac{x^2 + [y+v(\tau-t)]^2}{4\kappa\tau} \right] + \right. \\ \left. + \exp \left[-\frac{x^2 + [y-v(\tau-t)]^2}{4\kappa\tau} \right] \right\} \frac{d\tau}{\tau}.$$

Obie postacie rozwiązania (1.39) i (1.40) są wygodne dla obliczeń numerycznych. Widać natychmiast, że spełniony jest warunek początkowy (1.3) i warunki brzegowe (1.4) oraz (1.5). Gdy $v \rightarrow 0$, rozwiązanie redukuje się do znanego już wzoru (1.18).

W punkcie działania źródła, gdy $x=0$, $y=vt$, rozwiązanie (1.40) sprowadza się do wzoru

$$(1.41) \quad \begin{aligned} [T]_{\substack{y=vt \\ x=0}} &= \frac{Q}{4\pi\kappa} \eta(t) \int_0^t \left\{ \exp\left(-\frac{v^2\tau}{4\kappa}\right) + \exp\left[-\frac{v^2(\tau+2t)^2}{4\kappa\tau}\right] \right\} \frac{d\tau}{\tau} = \\ &= \frac{Q}{4\pi\kappa} \eta(t) \left\{ \text{Ei}\left(\frac{v^2\tau}{4\kappa}\right) \Big|_0^t + \int_0^t \exp\left[-\frac{v^2(\tau-2t)^2}{4\kappa\tau}\right] \frac{d\tau}{\tau} \right\}. \end{aligned}$$

Całka w otrzymanym wyniku nie zawiera osobliwości. Osobliwość tkwi w pierwszym składniku wzoru. Jest to osobliwość logarytmiczna. Taką samą osobliwość zawiera funkcja $K_0(\zeta)$, gdy $\zeta \rightarrow 0$. W obu wersjach rozwiązania otrzymaliśmy więc te same osobliwości w punkcie działania źródła.

Wykażemy z kolei, że oba rozwiązania zawierają te same osobliwości. Otrzymane rozwiązanie (1.40) dzielimy na dwie całki: I_1 i I_2 według kolejności składników w nawiasie klamrowym. Następnie rozwijamy wykładniki potęgowe i stosujemy podstawienie

$$\tau = \frac{1}{z}, \quad \gamma_1 = \frac{x^2 + (vt+y)^2}{4\kappa}, \quad \gamma_2 = \frac{x^2 + (y-vt)^2}{4\kappa}, \quad \beta = \frac{v^2}{4\kappa^2}.$$

Opierając się na tablicach {[8], s. 354, wzór (3.471.9)}, otrzymujemy następujące wyniki:

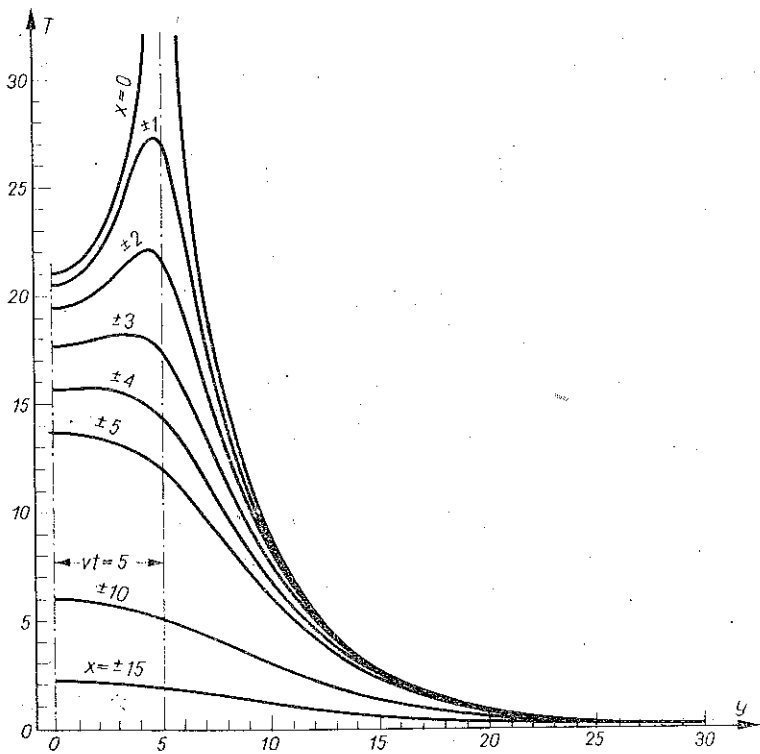
$$\begin{aligned} I_1 &= \exp\left[\frac{v}{2\kappa}(vt+y)\right] \left\{ 2K_0\left[\frac{v}{2\kappa}\sqrt{(vt+y)^2+x^2}\right] - \int_0^{1/t} \exp\left[-\left(\gamma_1 z + \beta \frac{1}{z}\right)\right] \frac{dz}{z} \right\}, \\ I_2 &= \exp\left[\frac{v}{2\kappa}(vt-y)\right] \left\{ 2K_0\left[\frac{v}{2\kappa}\sqrt{(vt-y)^2+x^2}\right] - \int_0^{1/t} \exp\left[-\left(\gamma_2 z + \beta \frac{1}{z}\right)\right] \frac{dz}{z} \right\}. \end{aligned}$$

Widzimy, że rozwiązanie (1.40) zawiera funkcje McDonalda, które występują w poprzedniej wersji rozwiązania, a zatem części osobliwe obu rozwiązań są tego samego rodzaju.

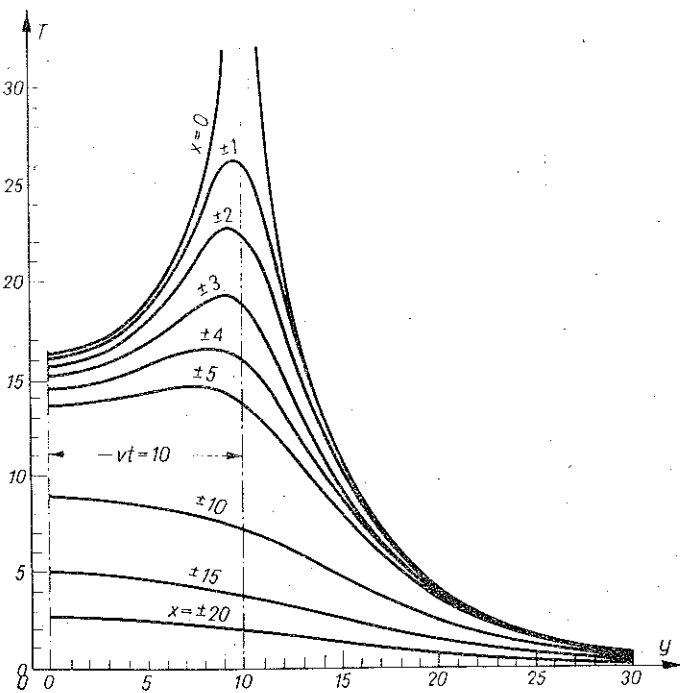
1.7. Przykład liczbowy

Dla ilustracji otrzymanego rozwiązania podajemy wykresy temperatury dla kilku wartości zmiennej x oraz kilku wartości zmiennej $y=vt$. Wyniki liczbowe, uzyskane na maszynie matematycznej, posłużyły do sporządzenia załączonych wykresów, podanych na rys. 4—9.

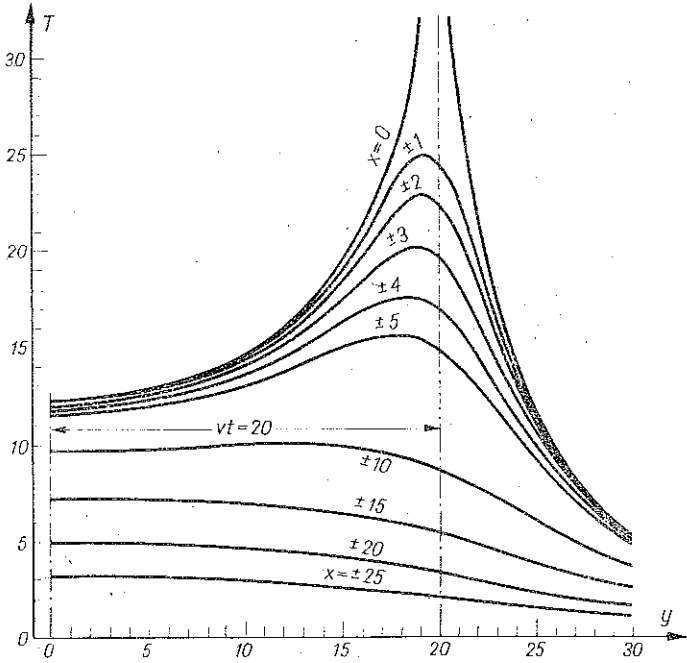
Do obliczeń przyjęto, że tarcza jest miedziana. Dla miedzi $\kappa = 1,15$ [cm²/sec]. Przyjęto, że źródło ciepła odpowiada palnikowi spawalniczemu. Prędkość palnika przyjęto $v = 0,1$ [cm/sec]. Grubość tarczy wynosiła 1 [cm]. Przyjmując dodatkowo średni wydatek ciepła z palnika w jednostce czasu i objętości, możemy zestawić dane wyjściowe do obliczeń (Tablica 1).



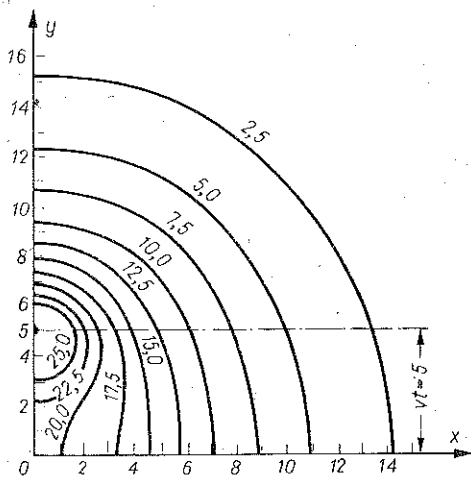
Rys. 4



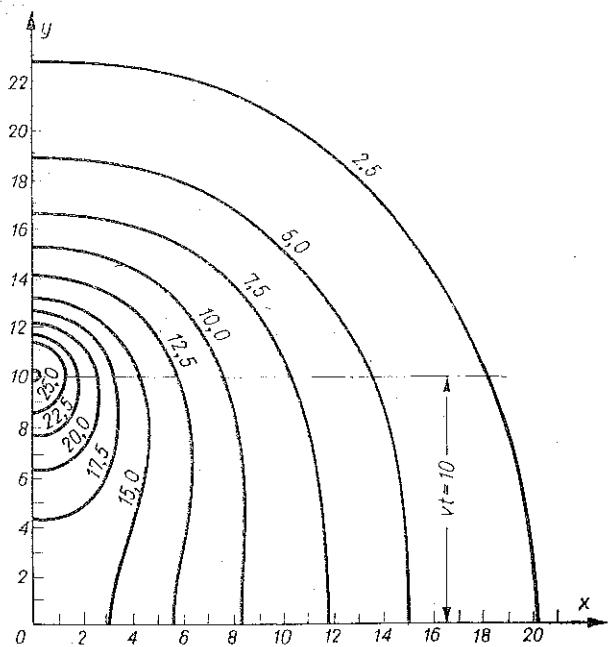
Rys. 5



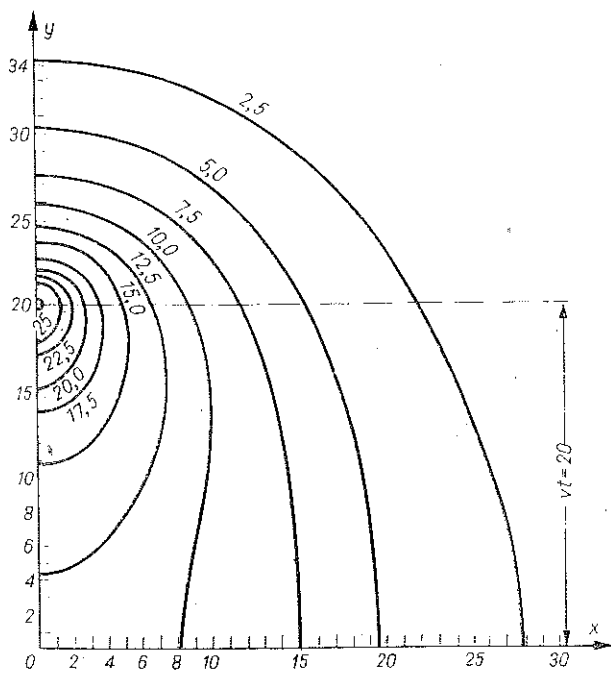
Rys. 6



Rys. 7. Wykresy izoterm rozkładu temperatury (tarcza miedziana; źródło punktowe; $vt=5$ cm)



Rys. 8. Wykresy izoterm rozkładu temperatury (tarcza miedziana; źródło punktowe; $vt=10$ cm)



Rys. 9. Wykresy izoterm rozkładu temperatury (tarcza miedziana; źródło punktowe; $vt=20$ cm)

Tablica 1. Dane wyjściowe do obliczeń

Stale materiałowe i obliczeniowe			
Symbol	Wyszczególnienie	Jednostka miary	Wartość
λ	Współczynnik przewodzenia ciepła	$\frac{\text{cal}}{\text{cm sec } ^\circ\text{C}}$	0,945
α	Współczynnik przewodzenia temperatury	$\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$	1,150
ρ	Gęstość materiału tarczy	$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$	8,930
c	Ciepło właściwe materiału tarczy	$\frac{\text{cal}}{\text{g } ^\circ\text{C}}$	0,092
vt	Droga źródła ciepła	cm	zmienna
v	Prędkość źródła ciepła	$\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	0,100
W	Wydatek jednostkowy źródła ciepła na jednostkę objętości i jednostkę czasu	$\frac{\text{cal}}{\text{cm sec}}$	59,3
Q	$Q = \frac{W}{cp}$	$\frac{^\circ\text{C}}{\text{sec}}$	72,2
	$\frac{Q}{4\pi\kappa}$	$\frac{^\circ\text{C}}{\text{cm}^2}$	5

$$T = 5 \int_0^{vt} \left\{ \exp \left\{ -v \frac{x^2 + [y + (z-vt)]^2}{4\kappa z} \right\} + \exp \left\{ -v \frac{x^2 + [y - (z-vt)]^2}{4\kappa z} \right\} \right\} \frac{dz}{z}$$

2. LINIOWE ŹRÓDŁO CIEPŁA

2.1. Sformułowanie zagadnienia

Zgodnie z zapowiedzią we wstępie jako drugi rozważamy przypadek, w którym liniowe źródło ciepła o stałym wydatku posuwa się w obszarze tarczy ze stałą prędkością v w kierunku prostopadłym do jej brzegu wzdłuż osi y , jak to zaznaczono na rys. 10. Źródło zaczyna wnikać w obszar tarczy w chwili czasu $t=0$. Opisane słownie źródło ciepła w przyjętym na rys. 10 układzie współrzędnych określa wzór

$$(2.1) \quad W(t) = W\eta(vt - y) \delta(x) \eta(t).$$

Uwzględniając (2.1), równanie przewodnictwa piszemy jak następuje:

$$(2.2) \quad \nabla^2 T = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{Q}{\kappa} \eta(vt - y) \delta(x) \eta(t).$$

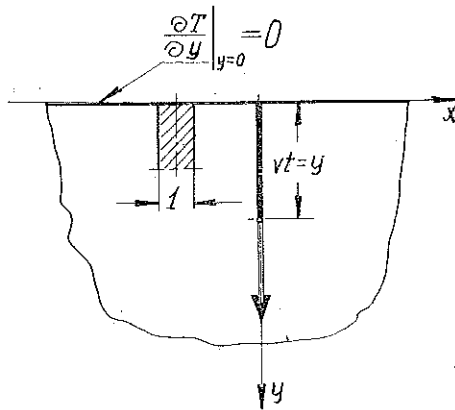
Poszukujemy takiego rozwiązania równania (2.2), które spełni warunek początkowy:

$$(2.3) \quad T(x, y, 0) = 0$$

oraz warunki brzegowe

$$(2.4) \quad \left[\frac{\partial T}{\partial y} \right]_{y=0} = 0,$$

$$(2.5) \quad T \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad \text{gdzie} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Rys. 10

2.2. Wyznaczenie rozwiązania

Ze względu na warunek brzegowy (2.4) dla określenia rozwiązania wykorzystujemy transformację cosinusową Fouriera względem zmiennej y . Następnie postępując podobnie jak w przypadku pierwszym otrzymujemy rozwiązanie w postaci

$$(2.6) \quad T(x, y, t) = \frac{2Q}{\pi^2 \kappa} \eta(t) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(t)}{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\alpha x) \cos(\beta y) d\alpha d\beta,$$

przy czym funkcja $f(t)$ wyraża się wzorem

$$(2.7) \quad f(t) = \eta(t) \frac{a^2 \sin(\beta vt) - a\beta v \cos(\beta vt) + a\beta v e^{-at}}{\beta(a^2 + \beta^2 v^2)},$$

gdzie $a = \kappa(a^2 + \beta^2)$.

Otrzymane rozwiązanie (2.6) spełnia warunek początkowy (2.3) i warunek brzegowy (2.5). Zauważmy jeszcze, że w przypadku gdy $v \rightarrow 0$, rozwiązanie (2.6) staje się zerem, co wynika bezpośrednio ze wzoru (2.7).

Jeżeli dokonamy porównania rozwiązań (1.8) dla przypadku pierwszego i (2.6) dla drugiego, to dojdziemy do wniosku, że różnią się one od siebie tylko funkcjami $f(t)$, czyli wzorami (1.11) i (2.7).

Formułując zagadnienie podkreślano, że badamy rozwiązania podstawowe, będące funkcjami Greena. W przypadku źródła punktowego — otrzymane rozwiązanie ma wymiar $^{\circ}\text{C}/\text{cm}^2$; a dla źródła liniowego $^{\circ}\text{C}/\text{cm}$. Wynika stąd, że superpozycji musimy dokonać względem zmiennej o wymiarze [cm].

We wzorach (1.13) i (2.7) występują argumenty funkcji trygonometrycznych βvt . Parametr β ma wymiar cm^{-1} . Wobec tego superpozycji musimy dokonać względem zmiennej vt lub $vt-y$, które mają wymiar cm. Raesumując, rozwiązanie dla źródła ruchomego liniowego możemy zbudować posługując się rozwiązaniem dla źródła ruchomego punktowego, co opisuje wzór

$$(2.8) \quad T(x, y, t) = \int_0^{vt} T_1(x, y, vt - \tau) d\tau.$$

W tym wzorze funkcja $T_1(x, y, vt - \tau)$ ma budowę rozwiązania (1.8) dla źródła ruchomego punktowego, w którym na miejsce vt należy podstawić $(vt - \tau)$.

Po podstawieniu i dokonaniu przekształceń upraszczających otrzymujemy wzór

$$(2.9) \quad T = \frac{Q}{4\pi\kappa} \eta(t) \int_0^{vt} \int_0^{(vt-\tau)} \left\{ \exp \left[-v \frac{x^2 + [y + (vt - \tau - \tau_1)]^2}{4\kappa\tau} \right] + \exp \left[-v \frac{x^2 + [y - (vt - \tau - \tau_1)]^2}{4\kappa\tau} \right] \right\} \frac{d\tau_1}{\tau_1} d\tau.$$

2.3. Przykład liczbowy

Dla ilustracji otrzymanego rozwiązania podajemy wykresy temperatury dla kilku wartości zmiennej x oraz kilku wartości zmiennej $y=vt$. Wyniki liczbowe przedstawiono na rys 11—13.

Do obliczeń przyjęto takie same wartości liczbowe dla poszczególnych parametrów jak w przypadku pierwszym (Tablica 2).

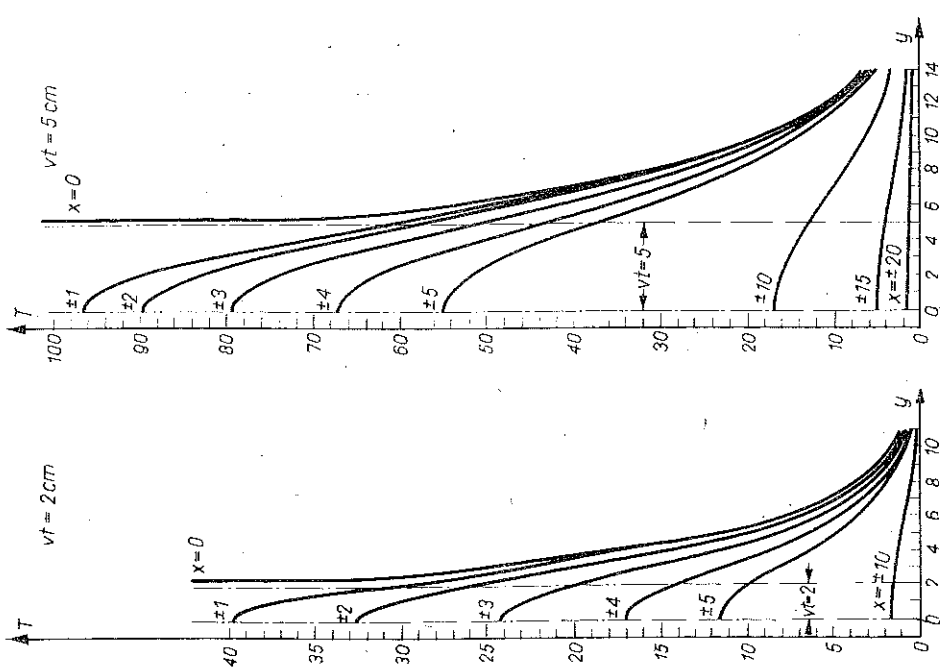
WNIOSKI KOŃCOWE

Z otrzymanych w pracy wyników narzucają się następujące wnioski:

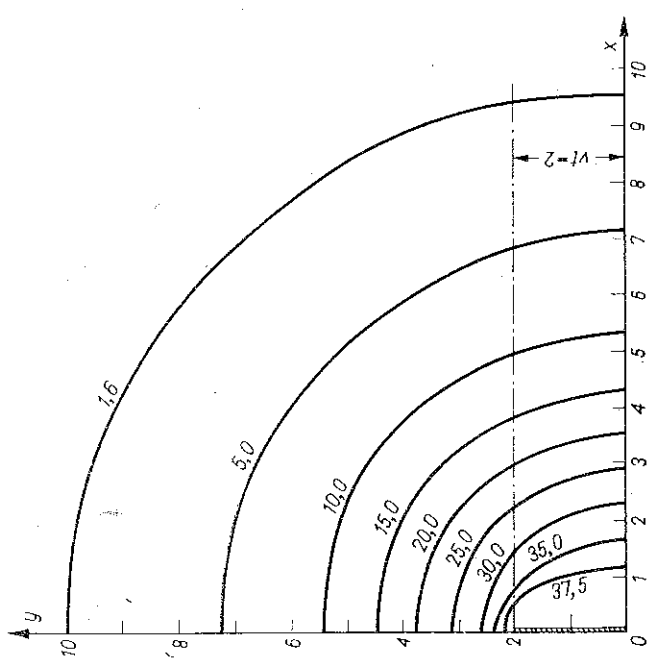
1. Teoria osi ruchomych nie znajduje zastosowania w obszarach ograniczonych ze względu na nieupraszczanie się równania przewodnictwa, jak również dodatkowe komplikacje wynikające z uzależnienia warunku brzegowego od czasu. Usiłowanie posłużenia się metodą Rossenthala było jedną z przyczyn, dla których zagadnienia źródeł ruchomych w obszarach ograniczonych nie mają dotąd poprawnych rozwiązań.

2. Przekształcenie Laplace'a nie ma tutaj zastosowania z uwagi na niejednoznaczność górnej granicy całkowania względem przejścia granicznego $v \rightarrow 0$. Sprawdzono, że nie istnieje rozwiązanie, w którym można by wykonywać przejście graniczne $v \rightarrow 0$.

3. Zasadę superpozycji dla źródeł ruchomych należy wykonać względem zmiennej vt lub $(vt - x_1)$.



Rys. 11. Wykres rozkładu temperatury dla miedzianej tarczy (w tarczy działa liniowe źródło ciepła)

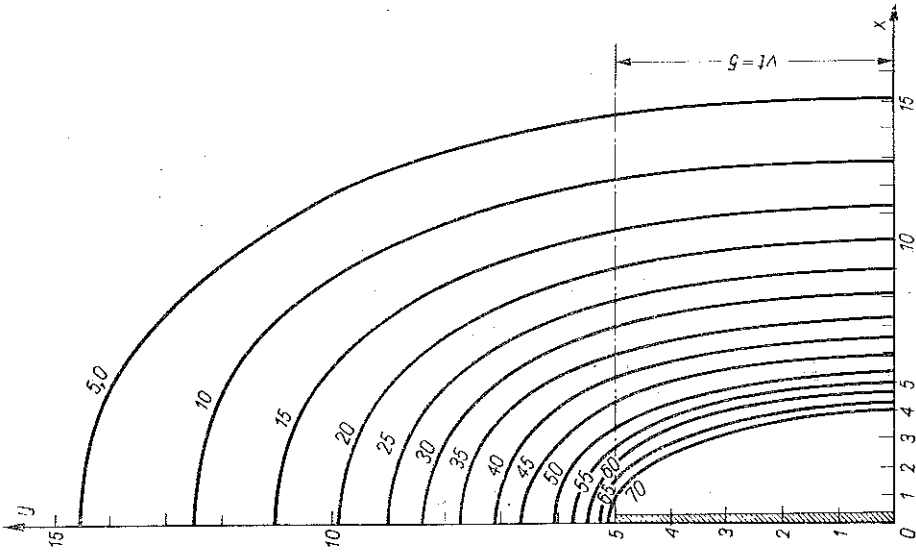


Rys. 12. Wykres izoterm rozkładu temperatury (tarcza miedziana; źródło liniowe; $vt = 2$ cm)

Tablica 2. Dane wyjściowe do obliczeń

Symbol	Stałe materiałowe i obliczeniowe	
	Wyszczególnienie	Jednostka miary
λ	Współczynnik przewodzenia ciepła	$\frac{\text{cal}}{\text{cm sec } ^\circ\text{C}}$
α	Współczynnik przewodzenia temperatury	$\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$
ρ	Gęstość materiału tarczy	$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
c	Ciepło właściwe materiału tarczy	$\frac{\text{cal}}{\text{g } ^\circ\text{C}}$
v	Prędkość źródła ciepła	$\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$
vt	Droga źródła ciepła	cm
W	Wydatek jednostkowy źródła ciepła na jednostkę objętości i jednostkę czasu	$\frac{\text{cal}}{\text{cm}^3\text{sec}}$
Q	$Q = \frac{W}{cp}$ $Q = \frac{Q}{4\pi\kappa}$	$\frac{^\circ\text{C}}{\text{sec}}$ $\frac{^\circ\text{C}}{\text{cm}}$

$$T = \frac{Q}{4\pi\kappa} \int_0^{vt} \int_0^{\infty} \left\{ \exp \left[-v \frac{x^2 + [y + (vt - \tau - \tau_1)]^2}{4\kappa\tau} \right] + \exp \left[-v \frac{x^2 + [y - (vt - \tau - \tau_1)]^2}{4\kappa\tau} \right] \right\} \frac{d\tau_1}{\tau_1} dt$$



Rys. 13. Wykresy izoterm rozkładu temperatury (tarcza miedziana; źródło liniowe; $vt=5$ cm)

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. ANTONIEWICZ, *Tablice funkcji dla inżynierów*, PWN, Warszawa, 1969.
2. H. BATEMAN, *Tables of integral transforms*, 1, Mc Graw-Hill, New York 1954.
3. G. FICHTENHOLZ, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, 2 i 3, PWN, Warszawa 1966.
4. Д. ИВАНЕНКО, А. СОКОЛОВ, *Классическая теория поля*, Изд. второе, Ленинград—Москва 1951.
5. N. W. MC LACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1964.
6. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PAN, Instytut Podstawowych Problemów Techniki, Warszawa 1960.
7. W. NOWACKI, *Thermoelasticity*, Pergamon Press-PWN, Oxford-Warszawa 1962.
8. Я. РЫЖИК, И. ГРАДШТЕЙН, *Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений*, Изд. Наука, Москва 1971.
9. D. ROSENTHAL, *The theory of moving sources of heat and its applications to metal treatments*, Trans. of the A.S.M.E., 1946.
10. К. СЕМЕНДЯЕВ, *Пятизначные математические таблицы*, Гос. изд. физ.-мат. лит., Москва 1966.
11. W. SOBZYŃSKA, *Działanie ruchomego punkowego źródła ciepła w przestrzeni nieograniczonej*, *Mech. Teoret. i Stos.* 7, 1, 1969.
12. T. TRAJDOS-WRÓBEL, *Matematyka dla inżynierów*, Wyd. 2, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1966.
13. S. WOELKE, *Dynamiczne zagadnienia naprężeń cieplnych w cienkiej nieograniczonej tarczy, wywołanych działaniem chwilowego punkowego źródła ciepła z uwzględnieniem wymiany ciepła na powierzchniach tarczy*, *Zeszyty Politechniki Poznańskiej — Mechanizacja i Elektryfikacja Rolnictwa*, Nr. 8, 48, 1967.
14. M. ŻÓRAWSKI, *Moving dynamic sources in a visco-elastic speace and corresponding basic solutions for moving sources*, *Arch. Mech. Stos.*, 13, 2, 1961.

Резюме

ПОДВИЖНЫЕ ТЕПЛОИСТОЧНИКИ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ДИСКЕ

Главной целью работы является нахождение поля температуры в полубесконечном диске с типичными граничными условиями в случае движущегося, с постоянной скоростью v перпендикулярно к прямолинейной грани диска, сосредоточенного, а затем линейного источника с постоянной выдачей тепла, причем построение решения должно учитывать случай $v=0$. В первой главе „Сосредоточенные точечные источники” сформулирована задача, обоснован подбор метода поступания, дается построение решения и проведены исследования, качественного типа, свойств этого решения. Для расчетных целей дается другой, более пригодный, вариант решения, иллюстрируя результаты числовым примером пригодным в инженерской практике.

Во второй главе „Линейный теплоисточник” сформулирована физическая модель и дается математическая модель линейного теплоисточника. На этом примере исследована возможность временной суперпозиции решения в случае сосредоточенного теплоисточника. Полученные результаты иллюстрированы числовым примером.

SUMMARY

MOVING HEAT SOURCES IN A SEMI-INFINITE SHIELD

The main aim of this paper is to determine the temperature field in a semi-infinite shield with typical boundary conditions. The concentrated at a point or line heat source of constant flux is travelling with constant velocity v in the direction perpendicular to the straight line boundary of the shield. The possibility of the time superposition of the solution at the condition $v=0$ is analyzed.

The first section "Concentrated point sources" contains the formulation of the problem, argumentation of the chosen method of solution, construction and qualitative examination of the solution properties.

A different but more convenient in computation version of the solution is presented and illustrated a numerical example useful in engineering practice.

In the second section "Linear heat sources" both physical and mathematical models for the linear heat source are presented. By this example the possibility of the time superposition of the solution for a concentrated heat source is investigated. The results obtained are illustrated by a numerical example.

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 maja 1974 r.
